

AULA 16

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Exercícios.

16. Exercícios.

DETERMINAR A EXPRESSÃO GERAL E A MATRIZ DE UMA TL CONHECIDAS AS IMAGENS DE UMA BASE DO SEU DOMÍNIO

16.1. Considere-se a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1) = (1,1,0)$ e $T(0,1) = (0,1,-1)$. Vamos determinar a expressão geral de T , isto é, $T(x,y) \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Sendo

$$T(0,1) = \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e

$$T(1,1) = \mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

então

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

, logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pelo que

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ x - y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

, ficando assim determinada a expressão geral de T : $T(x, y) = (x, y, x - y)$

16.2. Dada a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(\mathbf{e}_1) = (-1, 2, 0)$ e $T(\mathbf{e}_2) = (0, 2, -1)$ escreva a matriz da transformação.

Sendo a matriz canónica da transformação dada por $\mathbf{A} = [T(\mathbf{e}_1) \ T(\mathbf{e}_2)]$, temos de imediato

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

16.3. Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$\begin{aligned} T(1, 0, 0) &= (1, 0, 2) \\ T(0, 1, 0) &= (0, -3, 0) \\ T(0, 0, 1) &= (2, 0, 1) \end{aligned}$$

Determine a representação matricial de T relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$ e a expressão de $T(x, y, z)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Designando por $\mathbf{A}$ a matriz canónica da transformação, temos $T(x, y, z) = \mathbf{A}(x, y, z)$, logo, escrevendo a equação matricial das equações acima, resulta

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{I}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo $T(x, y, z) = \mathbf{A}(x, y, z)$, temos

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= \begin{bmatrix} x - 2z \\ -3y \\ 2x + z \end{bmatrix} \\ &= (x - 2z, -3y, 2x + z) \end{aligned}$$

16.4. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$T(1, -1) = (1, 0, -1)$$

$$T(0, 1) = (2, 1, -1)$$

Justifique a existência e unicidade da transformação. Determine a representação matricial de T e a expressão de $T(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Uma aplicação linear cujo domínio é um espaço vectorial de dimensão finita fica perfeitamente definida quando se conhecem as imagens dos vectores de uma qualquer base desse domínio, existindo uma e só uma transformação que relaciona os dois conjuntos de vectores.

Designando por $\mathbf{A}$ a matriz canónica da transformação, temos $T(x, y) = \mathbf{A}(x, y)$, logo, escrevendo a equação matricial das equações acima, resulta

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} &= \mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sendo $T(x, y) = \mathbf{A}(x, y)$, temos

$$\begin{aligned}
 T(x, y) &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 3x + 2y \\ x + y \\ -2x - y \end{bmatrix} \\
 &= (3x + 2y, x + y, -2x - y)
 \end{aligned}$$

DETERMINAR A MATRIZ DE UMA TL DADA A SUA EXPRESSÃO GERAL

16.5. Seja $\mathbf{w} = f(x_1, x_2)$ uma função de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que

$$\begin{aligned}
 w_1 &= x_1 \\
 w_2 &= 2x_1 - x_2 \\
 w_3 &= 3x_1 + 4x_2
 \end{aligned}$$

Adoptando a notação matricial, podemos escrever

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

, e ainda

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

A função $\mathbf{w} = f(x_1, x_2)$ considerada, sendo uma transformação matricial, é uma transformação linear, $\mathbf{w} = T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, sendo a matriz da transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

16.6. Determine as matrizes canônicas das transformações

$$T_1(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 - 3x_2)$$

$$T_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 - x_2, x_2 - x_3)$$

$$T_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_3, x_1 - x_4, x_2 - x_3, x_1 - 3x_4)$$

Conhecida a expressão analítica da transformação a determinação da matriz canônica da transformação é imediata. Para $(w_1, w_2) = T_1(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 - 3x_2)$ temos

$$\begin{cases} w_1 = 2x_1 - x_2 \\ w_2 = x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

logo

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Procedendo de modo análogo para $T_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 - x_2, x_2 - x_3)$, temos:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

, e para $T_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_3, x_1 - x_4, x_2 - x_3, x_1 - 3x_4)$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

16.7. Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (2x + y - 2z, x - y, 3y - 2z)$$

Escreva a matriz da transformação em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Designando por $\mathbf{A}$ a matriz canónica da transformação, temos

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= (2x + y - 2z, x - y, 3y - 2z) \\ &= \begin{bmatrix} 2x + y - 2z \\ x - y \\ 3y - 2z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A}(x, y, z) \end{aligned}$$

Logo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

16.8. Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y) = (x - y, y - x, 2x - 2y)$$

Escreva a matriz da transformação em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ e à base de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$

Usando a matriz calculada verifique se o vector $(-1, 3, 1)$ pertence à imagem de T .

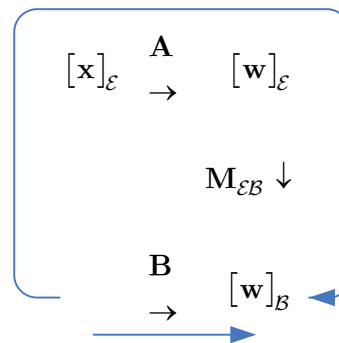
Podemos começar por calcular a matriz canónica da transformação. Temos

$$\begin{aligned} T(x, y) &= (x - y, y - x, 2x - 2y) \\ \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x - y \\ y - x \\ 2x - 2y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Podemos agora calcular a matriz da transformação em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ e à base de $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$. Atendendo ao diagrama



temos

$$\begin{aligned} [\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} &= \mathbf{B}[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} \\ &= \mathbf{M}_{\mathcal{E}\mathcal{B}}\mathbf{A}[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

, pelo que

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{M}_{\mathcal{E}\mathcal{B}}\mathbf{A} \\ &= (\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{E}})^{-1}\mathbf{A} \end{aligned}$$

Dado que $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ tem por colunas os vectores da base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ escritos na base canónica

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

, temos

$$\mathbf{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Em alternativa, e mais rapidamente, podemos atender a que

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= (\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{E}})^{-1} \mathbf{A} \\ \mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{E}} \mathbf{B} &= \mathbf{A} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Resolvendo os dois sistemas de equações em simultâneo, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

, logo

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Atenda-se a que o vector $\mathbf{w} = (-1, 3, 1)$ está escrito na base canónica. A partir da matriz $\mathbf{A}$ é imediato verificar que $\mathbf{w}$ não pertence à imagem de T , dado que o sistema $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ é impossível

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para tirar conclusões utilizando a matriz $\mathbf{B}$ atenda-se a que

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{B}[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}$$

e

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{M}_{\mathcal{E}\mathcal{B}} [\mathbf{w}]_{\mathcal{E}}$$

, pelo que

$$\begin{aligned}\mathbf{B}[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} &= \mathbf{M}_{\mathcal{E}\mathcal{B}} [\mathbf{w}]_{\mathcal{E}} \\ &= (\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{E}})^{-1} [\mathbf{w}]_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{E}} \mathbf{B}[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} &= [\mathbf{w}]_{\mathcal{E}} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema tiraríamos a mesma conclusão (aliás o sistema é o mesmo, dado que, obviamente, $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{E}} \mathbf{B} = \mathbf{A}$ e $\mathbf{A}[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = [\mathbf{w}]_{\mathcal{E}}$).

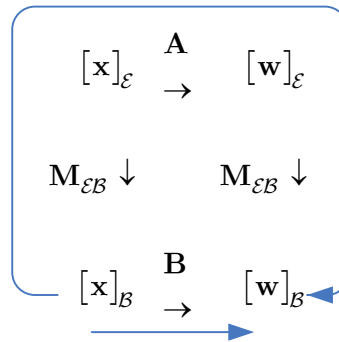
16.9. Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + 2y, -2y, x - y)$$

Tomando a mesma base no domínio e no contradomínio, escreva a matriz da transformação em relação à base de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, -1, 1), (0, 0, -1)\}$$

Atenda-se ao diagrama



, temos

$$\begin{aligned} [w]_{\mathcal{B}} &= \mathbf{B}[x]_{\mathcal{B}} \\ &= \mathbf{M}_{\mathcal{E}\mathcal{B}} \mathbf{A} (\mathbf{M}_{\mathcal{E}\mathcal{B}})^{-1} [x]_{\mathcal{B}} \\ &= (\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{E}})^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{E}} [x]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

, logo

$$\mathbf{B} = (\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{E}})^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$$

Sendo

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

, e

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= (x + 2y, -2y, x - y) \\ &= \begin{bmatrix} x + 2y \\ -2y \\ x - y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

, pelo que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

, temos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= (\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{E}})^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{E}} \\
 &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Note que a relação acima pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{E}} \mathbf{B} &= \mathbf{A} \mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{E}} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

, pelo que, alternativamente, temos, resolvendo os 3 sistemas de equações em simultâneo, o mesmo resultado de modo mais expedito

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

MISCELÂNEAS.

16.10. Em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ é possível fazer uma representação geométrica simples do efeito da aplicação de uma transformação linear, quer se considere que os pares ou ternos ordenados são representativos de pontos ou de vectores. Em $\mathbb{R}^n$ a interpretação do resultado da aplicação de uma transformação linear é idêntica, embora a sua representação geométrica não seja possível.

a) Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear, $\mathbf{w} = T(x, y)$

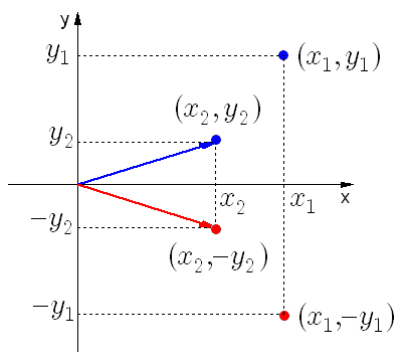


Figura 16.1

$$\mathbf{w} = \mathbf{A} \mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Temos então $w_1 = x$ e $w_2 = -y$. Da aplicação da matriz da transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a qualquer objecto de $\mathbb{R}^2$ resulta uma imagem que corresponde ao seu simétrico relativamente ao eixo dos $\mathbf{xx}$

$$T(x, y) = (x, -y)$$

b) Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear, $\mathbf{w} = T(x, y)$

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

em que θ é um ângulo medido no sentido directo.

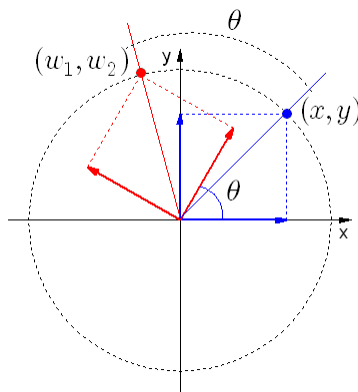
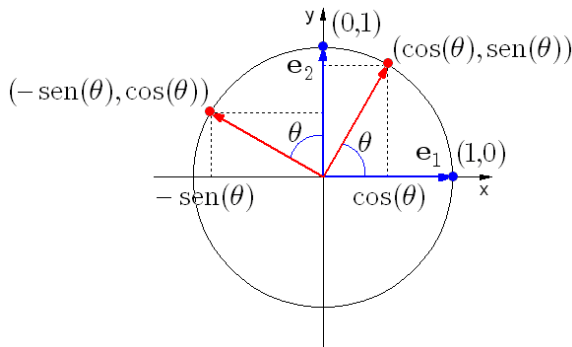


Figura 16.2

Cada uma das colunas da matriz de transformação resulta da aplicação da transformação a cada um dos vectores da base canónica de $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = [T(\mathbf{e}_1) : T(\mathbf{e}_2)]$$

Temos assim que

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

e

$$T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Ambos os vectores da base canónica de $\mathbb{R}^2$ sofrem uma rotação de θ no sentido directo. Em resultado da aplicação de uma transformação com matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

, todos os objectos do plano sofrem uma rotação de θ no sentido directo. A matriz é, por isso, chamada **matriz de rotação em $\mathbb{R}^2$** .

16.11. Considere o endomorfismo T que, tomando um vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, o reflecte em relação ao plano yz e depois o projecta ortogonalmente sobre o plano xz (num referencial xyz ortonormado). Escreva a matriz de T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ e determine todos os vectores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $T(x, y, z) = (3, 0, -1)$.

Sendo, em $\mathbb{R}^3$, a matriz de reflexão em relação ao plano yz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e a matriz de projecção sobre o plano xz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

temos

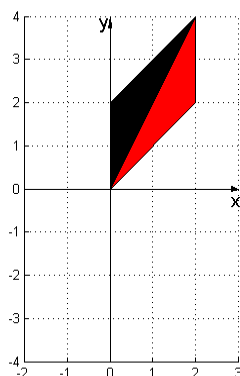
$$\begin{aligned}
 T(x, y, z) &= \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{x} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\
 &= (-x, 0, z)
 \end{aligned}$$

Os vectores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $T(x, y, z) = (3, 0, -1)$ são as soluções do sistema

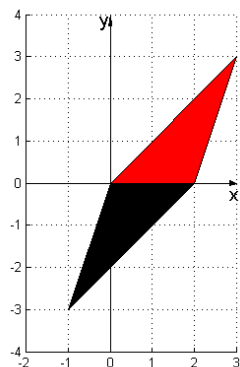
$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

, ou seja $(-3, y, -1) \forall y \in \mathbb{R}$.

16.12. Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que transforma o paralelogramo da figura a) no paralelogramo da figura b). Qual das seguintes matrizes pode ser a matriz da transformação em causa



a)



b)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ -1/3 & -1 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ 3 & -3/2 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ 2 & -4/3 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_4 &= \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Basta atender a que

$$T(0, 2) = (-1, -3)$$

Ora, sendo

$$T(0, 2) = \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} 2\mathbf{e}_2 = 2\mathbf{A}\mathbf{e}_2 = 2T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

, temos

$$T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

, pelo que, das matrizes candidatas a única que pode ser a matriz da transformação em causa é a matriz $\mathbf{A}_2$.

Escolhendo dois vectores linearmente independentes, por exemplo, $\mathbf{u}_1 = (0, 2)$ e $\mathbf{u}_2 = (2, 4)$, temos $\mathbf{w}_1 = T(\mathbf{u}_1) = (-1, -3)$ e $\mathbf{w}_2 = T(\mathbf{u}_2) = (2, 0)$, pelo que, sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{A}\mathbf{u} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} &= \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} &= \mathbf{A} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ 3 & -3/2 \end{bmatrix} &= \mathbf{A} \end{aligned}$$

Genericamente

$$\mathbf{A} = [\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2][\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2]^{-1}$$

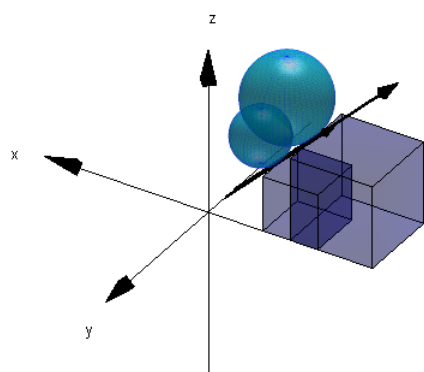
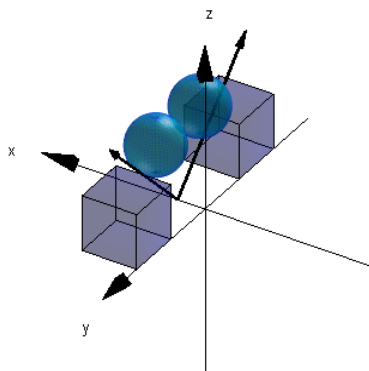


```
>> u1=[0 2]';
>> u2=[2 4]';
>> w1=[-1 -3]';
>> w2=[ 2 0]';
>> A=[w1 w2]*inv([u1 u2])
A =
      2      -1/2
      3     -3/2
```

COMPOSIÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES

16.13. Sendo $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reflexão sobre o plano xz

$$\mathbf{w} = T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}_T \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$



, $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma rotação de $\theta = -\pi/2$ sobre o eixo do $\mathbf{z}$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= S(\mathbf{w}) \\
 &= \mathbf{A}_S \mathbf{w} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w}
 \end{aligned}$$

, $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma expansão de $k = 1.5$

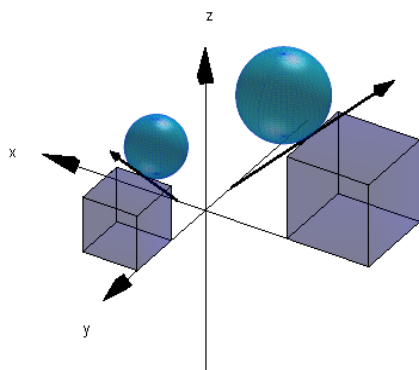
$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} &= U(\mathbf{v}) \\
 &= \mathbf{A}_U \mathbf{v} \\
 &= \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \mathbf{v}
 \end{aligned}$$

A composição de U com S com T , $\mathbf{r} = V(\mathbf{u}) = U(S(T(\mathbf{u}))) = (U \circ S \circ T)(\mathbf{u}) = \mathbf{A}_U \mathbf{A}_S \mathbf{A}_T \mathbf{u}$, é uma transformação linear, $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, com matriz de transformação

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_V &= \mathbf{A}_U \mathbf{A}_S \mathbf{A}_T \\
 &= \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0 \\ -1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

, ou seja

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} &= V(\mathbf{u}) \\
 &= \mathbf{A}_V \mathbf{u} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0 \\ -1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \mathbf{u}
 \end{aligned}$$



Saliente-se que a composição de transformações lineares não é comutativa (basta atender ao facto de se efectuar à custa de um produto matricial).

16.14. Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$T(x, y, z, w) = (-x + y - z, 2y + z - w, z + 3w, 0)$$

Escreva a matriz da transformação T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^4$. Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e seja $S: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz em relação à base $\mathcal{B}$ e à base canónica de $\mathbb{R}^4$ é

$$\mathbf{S}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine a expressão geral de S e determine $(S \circ T)(1,1,-1,1)$.

A matriz da transformação T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^4$, sendo

$$T(x, y, z, w) = (-x + y - z, 2y + z - w, z + 3w, 0)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} -x + y - z \\ 2y + z - w \\ z + 3w \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \end{aligned}$$

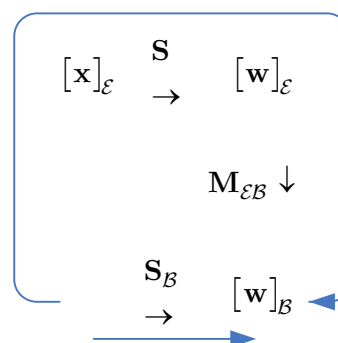
é

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de mudança da base $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ para a base canónica de $\mathbb{R}^3$ é

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Atendendo ao diagrama



temos

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_B &= \mathbf{M}_{\mathcal{E}B} \mathbf{S} \\ (\mathbf{M}_{\mathcal{E}B})^{-1} \mathbf{S}_B &= \mathbf{S} \\ \mathbf{M}_{B\mathcal{E}} \mathbf{S}_B &= \mathbf{S}\end{aligned}$$

, logo, a matriz da transformação S em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$ é

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \mathbf{M}_{B\mathcal{E}} \mathbf{S}_B \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

, ou seja, a expressão geral de S é

$$\begin{aligned}S(x, y, z, w) &= \mathbf{S}(x, y, z, w) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \\ &= (x + y - w, y + z, x + 3y)\end{aligned}$$

Finalmente, para $(S \circ T)(1, 1, -1, 1)$, temos

$$\begin{aligned}(S \circ T)(1, 1, -1, 1) &= \mathbf{S} \mathbf{T} \mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

TRANSFORMAÇÃO LINEAR INVERSA

16.15 Sendo $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma rotação de $\theta = -\pi/2$ sobre o eixo do zz

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}_T \mathbf{u} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(-\pi/2) & -\sin(-\pi/2) & 0 \\ \sin(-\pi/2) & \cos(-\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \end{aligned}$$

, a sua transformação inversa tem matriz de transformação

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= T^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{A}_{T^{-1}} \mathbf{w} = \mathbf{A}_T^{-1} \mathbf{w} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{w} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) & 0 \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w} \end{aligned}$$

ou seja, como seria de esperar, uma rotação de $\theta = \pi/2$.