

AULA 20

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Complemento ortogonal.

Espaços fundamentais de uma matriz.

Espaços fundamentais de uma matriz, característica e nulidade.

Ortogonalização de Gram-Schmidt.

20. Os 4 espaços fundamentais.

20.1. Complemento ortogonal.

Seja $\mathbb{W}$ um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que um vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ é **ortogonal ao subespaço** $\mathbb{W}$ se for ortogonal a todos os vectores de $\mathbb{W}$. O conjunto de todos os vectores ortogonais a $\mathbb{W}$ é designado por **complemento ortogonal do subespaço** $\mathbb{W}$, e escrevemos $\mathbb{W}^\perp$

$$\mathbb{W}^\perp = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{W} \}$$

Tem-se:

1. $\mathbb{W}^\perp$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.
2. $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}^\perp = \{\mathbf{0}\}$.
3. $\dim(\mathbb{W}) + \dim(\mathbb{W}^\perp) = n$.
4. $(\mathbb{W}^\perp)^\perp = \mathbb{W}$.

Exemplos

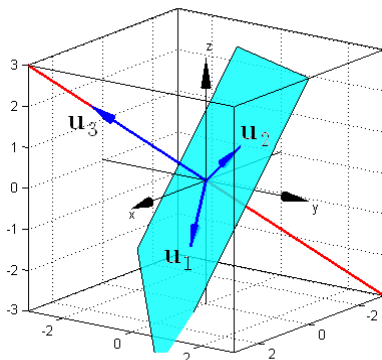


Figura 20.1

1. Os vectores $\mathbf{u}_1 = [2 \ 1 \ -1]^T$, $\mathbf{u}_2 = [0 \ 1 \ 1]^T$ do exemplo 3.1 geram um subespaço $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^3$ correspondente a um plano que passa na origem. O vector $\mathbf{u}_3 = [2 \ -2 \ 2]^T$, ortogonal a $\mathbf{u}_1$ e a $\mathbf{u}_2$ está contido no complemento ortogonal do subespaço $\mathbb{W}$, uma recta r que passa na origem e é perpendicular ao plano que contém $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, $r = \mathbb{W}^\perp$. Todos os vectores com a direcção de r (os múltiplos escalares de $\mathbf{u}_3$) são ortogonais a todos os vectores contidos no plano. Do mesmo modo, todos os vectores contidos no plano são ortogonais ao conjunto dos vectores contidos na recta, constituindo o seu complemento ortogonal $\mathbb{W} = r^\perp$.

2. Os vectores $\mathbf{u}_1 = [1 \ -3 \ 5 \ 0 \ 5]^T$, $\mathbf{u}_2 = [-1 \ 1 \ 2 \ -2 \ 3]^T$, e $\mathbf{u}_3 = [0 \ -1 \ 4 \ -1 \ 5]^T$ geram um subespaço $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^5$ e, sendo linearmente independentes, constituem uma base desse subespaço, logo, $\dim(\mathbb{U}) = 3$.

O vectores $\mathbf{w}_1 = [-3 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ e $\mathbf{w}_2 = [-4 \ -3 \ -2 \ 0 \ 1]^T$ geram um subespaço $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^5$ e, sendo linearmente independentes, constituem uma base desse subespaço, pelo que $\dim(\mathbb{W}) = 2$.

Os vectores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ (assim como qualquer vector de $\mathbb{U}$, que pode ser escrito como uma combinação linear destes 3 vectores) são ortogonais aos vectores $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$.

Podemos verificar a relação de ortogonalidade calculando o produto interno entre eles

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3] \\ \mathbf{W} &= [\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2] \\ \mathbf{U}^T \mathbf{W} &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \mathbf{u}_3^T \end{bmatrix} [\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{w}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{w}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{w}_1 & \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \mathbf{w}_1 & \mathbf{u}_1^T \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{u}_2^T \mathbf{w}_1 & \mathbf{u}_2^T \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{u}_3^T \mathbf{w}_1 & \mathbf{u}_3^T \mathbf{w}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



```
>> u1=[1 -3 5 0 5]';
>> u2=[-1 1 2 -2 3]';
>> u3=[0 -1 4 -1 5]';
>> w1=[-3 -1 0 1 0]';
>> w2=[-4 -3 -2 0 1]';
>> U=[u1 u2 u3];
>> W=[w1 w2];
>> U'*W
```

```
ans =
     0     0
     0     0
     0     0
```

Do mesmo modo, os vectores $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ (assim como qualquer vector de $\mathbb{W}$, que pode ser escrito como uma combinação linear destes 2 vectores) são ortogonais aos vectores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$.

O subespaço $\mathbb{W}$ é o complemento ortogonal do subespaço $\mathbb{U}$, $\mathbb{W} = \mathbb{U}^\perp$, tal como o subespaço $\mathbb{U}$ é o complemento ortogonal do subespaço $\mathbb{W}$, $\mathbb{U} = \mathbb{W}^\perp$, sendo $\dim(\mathbb{U}) + \dim(\mathbb{W}) = 5$.

20.2. Espaços fundamentais de uma matriz.

Uma matriz $\mathbf{A}$, $m \times n$, tem 4 espaços fundamentais:

1. Designa-se por **espaço coluna** de $\mathbf{A}$, ou **imagem** de $\mathbf{A}$, $\text{col}(\mathbf{A})$ ou $\text{Im}(\mathbf{A})$, o subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado pelas colunas de $\mathbf{A}$, isto é, o conjunto de todas as combinações lineares das colunas de $\mathbf{A}$.
2. Designa-se por **espaço linha** de $\mathbf{A}$, $\text{lin}(\mathbf{A})$, o subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas linhas de $\mathbf{A}$, ou seja, o conjunto de todas as combinações lineares das linhas de $\mathbf{A}$, sendo $\text{lin}(\mathbf{A}) = \text{col}(\mathbf{A}^T)$ e $\text{col}(\mathbf{A}) = \text{lin}(\mathbf{A}^T)$.
3. Designa-se por **espaço nulo (à direita)**, ou **núcleo**, de $\mathbf{A}$, $\text{Ker}(\mathbf{A})$, o subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado por todos os vectores $\mathbf{x}$ tais que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, isto é, correspondente às soluções do sistema homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.
4. Designa-se por **espaço nulo à esquerda**, $\text{Ker}(\mathbf{A}^T)$, o subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado por todos os vectores $\mathbf{x}$ tais que $\mathbf{x}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}^T$, ou seja, correspondente às soluções do sistema homogéneo $\mathbf{x}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}^T$ ($\Leftrightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$, ou seja, o núcleo da matriz transposta).

Podemos determinar uma base do espaço linha de uma matriz $\mathbf{A}$ reduzindo a matriz à forma escalonada. As operações elementares sobre as linhas de uma matriz não alteram a dependência/independência linear das suas linhas, ou seja, **duas matrizes equivalentes por linhas têm o mesmo espaço linha**.

Exemplo

3. Seja $\mathbf{A}$ a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Escalonando a matriz



```
>> A=[2 0 2;1 1 2;-1 1 0];
```

```
>> EL=rref(A)
```

```
EL =
```

```

1      0      1
0      1      1
0      0      0
```

, temos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os vectores $\mathbf{u}_1 = [1 \ 0 \ 1]^T$ e $\mathbf{u}_2 = [0 \ 1 \ 1]^T$, correspondentes à 1ª e 2ª linha da forma escalonada, formam uma base do espaço linha de $\mathbf{A}$ que tem, por isso, dimensão 2, $\dim(\text{lin}(\mathbf{A})) = 2$.

Podemos agora caracterizar o espaço linha da matriz $\mathbf{A}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{L} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1 + x_2 \right\}$$

As operações elementares sobre as linhas de uma matriz alteram o espaço coluna, ou seja, duas matrizes equivalentes por linhas não têm o mesmo espaço coluna. No entanto, dado que $\text{col}(\mathbf{A}) = \text{lin}(\mathbf{A}^T)$, podemos determinar o espaço coluna de uma matriz determinando o espaço linha da sua matriz transposta

Exemplos

4. Seja $\mathbf{A}$ a matriz do exemplo anterior. Escalonando a sua matriz transposta



```
>> EC=rref(A')
```

```
EC =
```

```

1      0     -1
0      1      1
0      0      0
```

, temos

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os vectores $\mathbf{u}_3 = [1 \ 0 \ -1]^T$ e $\mathbf{u}_4 = [0 \ 1 \ 1]^T$, correspondentes à 1ª e 2ª linha da forma escalonada de $\mathbf{A}^T$, formam uma base do espaço coluna de $\mathbf{A}$, donde, $\dim(\text{col}(\mathbf{A})) = 2$.

Podemos agora caracterizar o espaço coluna da matriz $\mathbf{A}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ -1 & 1 & x_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 + x_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C} = L(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = -x_1 + x_2 \right\}$$

,

5. Determinamos o núcleo de uma matriz procurando as soluções do sistema homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

Seja $\mathbf{A}$ a matriz do exemplo anterior. Escalonando a matriz completa $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$



```
>> Nd=rref([A [0 0 0]'])
```

```
Nd =
```

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

resulta $x_1 + x_3 = 0$ e $x_2 + x_3 = 0$, ou seja

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

, pelo que, uma base para o núcleo da matriz é formada pelo vector $\mathbf{u}_5 = [-1 \ -1 \ 1]^T$, sendo $\dim(\text{Ker}(\mathbf{A})) = 1$

$$\mathbb{K} = L(\mathbf{u}_5) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = -x_3 \wedge x_2 = -x_3 \right\}$$

6. Determinamos o núcleo à esquerda de uma matriz procurando as soluções do sistema homogéneo $\mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Para a matriz $\mathbf{A}$ do exemplo anterior, escalonando a matriz completa correspondente à transposta $[\mathbf{A}^T|\mathbf{0}]$, temos



```
>> Ne=rref([A' [0 0 0]'])
```

```
Ne =
```

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

resulta $x_1 - x_3 = 0$ e $x_2 + x_3 = 0$, ou seja

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

, pelo que uma base para o núcleo à esquerda da matriz é constituída pelo vector $\mathbf{u}_6 = [1 \ -1 \ 1]^T$, sendo $\dim(\text{Ker}(\mathbf{A}^T)) = 1$

$$\mathbb{K}_e = L(\mathbf{u}_6) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3 \wedge x_2 = -x_3 \right\}$$

20.3. Espaços fundamentais de uma matriz, característica e nulidade.

O espaço das linhas de uma matriz $\mathbf{A}$ é o complemento ortogonal do núcleo de $\mathbf{A}$:

$$\text{Ker}(\mathbf{A}) = (\text{lin}(\mathbf{A}))^\perp = (\text{col}(\mathbf{A}^T))^\perp$$

O espaço das colunas de uma matriz $\mathbf{A}$ é o complemento ortogonal do núcleo de $\mathbf{A}^T$:

$$\text{Ker}(\mathbf{A}^T) = (\text{col}(\mathbf{A}))^\perp = (\text{lin}(\mathbf{A}^T))^\perp$$

Os espaços linha e coluna da matriz $\mathbf{A}$, $m \times n$, possuem a mesma dimensão.

A **característica** da matriz $\mathbf{A}$, $\text{car}(\mathbf{A})$, é igual à dimensão do seu espaço coluna (ou do espaço linha), ou seja, é igual ao número máximo de colunas (ou linhas) da matriz linearmente independentes.

Designa-se por **nulidade** da matriz $\mathbf{A}$, $\text{nul}(\mathbf{A})$, a dimensão do seu núcleo (igual ao números de variáveis livres do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$). Tem-se

$$\text{car}(\mathbf{A}) + \text{nul}(\mathbf{A}) = n$$

$$\text{car}(\mathbf{A}) + \text{nul}(\mathbf{A}^T) = m$$

$$\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}(\mathbf{A}^T)$$

Exemplo

7. Seja $\mathbf{A}$ a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como vimos no exemplo 5, os espaços linha e coluna da matriz $\mathbf{A}$ possuem a mesma dimensão

$$\dim(\text{lin}(\mathbf{A})) = \dim(\text{col}(\mathbf{A})) = 2$$

Vimos ainda que o núcleo da matriz tem dimensão 1 sendo, portanto,

$$\begin{aligned} \dim(\text{col}(\mathbf{A})) + \dim(\text{Ker}(\mathbf{A})) &= \text{car}(\mathbf{A}) + \text{nul}(\mathbf{A}) \\ &= 2 + 1 \\ &= 3 = n \end{aligned}$$

Os vectores $\mathbf{u}_1 = [1 \ 0 \ 1]^T$ e $\mathbf{u}_2 = [0 \ 1 \ 1]^T$ formam uma base do espaço linha, e o vector $\mathbf{u}_3 = [-1 \ -1 \ 1]^T$ é uma base do núcleo de $\mathbf{A}$. Podemos verificar que o espaço linha da matriz corresponde ao complemento ortogonal, em $\mathbb{R}^3$, do núcleo da matriz (e vice-versa)

$$\text{Ker}(\mathbf{A}) = (\text{lin}(\mathbf{A}))^\perp$$

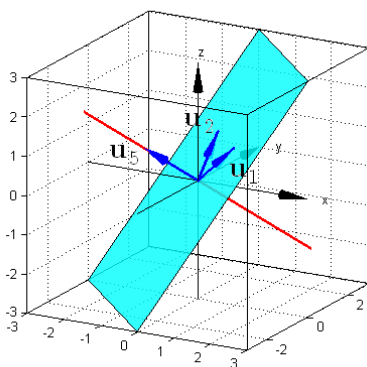


Figura 20.2



```
>> u1=[1 0 1]';
>> u2=[0 1 1]';
```

```
>> u5=[-1 -1 1]';
>> [u1 u2]'*u5
ans =
    0
    0
```

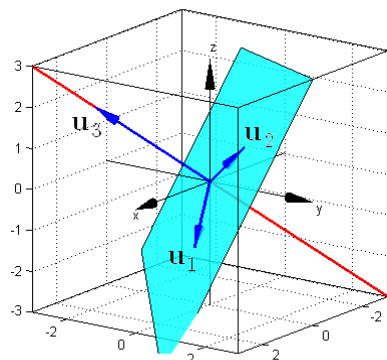


Figura 20.3

Os vectores $\mathbf{u}_3 = [1 \ 0 \ -1]^T$ e $\mathbf{u}_4 = [0 \ 1 \ 1]^T$ formam uma base do espaço coluna, e o vector $\mathbf{u}_6 = [1 \ -1 \ 1]^T$ é uma base do núcleo à esquerda de $\mathbf{A}$. Podemos verificar que o espaço coluna da matriz corresponde ao complemento ortogonal, em $\mathbb{R}^3$, do núcleo à esquerda de $\mathbf{A}$, ou seja do núcleo de $\mathbf{A}^T$ (e vice-versa)

$$\text{Ker}(\mathbf{A}^T) = (\text{col}(\mathbf{A}))^\perp$$



```
>> u3=[1 0 -1]';
>> u4=[0 1 1]';
>> u6=[1 -1 1]';
>> [u3 u4]'*u6
ans =
    0
    0
```

20.4. Ortogonalização de Gram-Schmidt.

A **ortogonalização de Gram-Schmidt** é um método que, a partir de uma qualquer base de um subespaço $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^n$, permite obter uma base ortonormada para esse subespaço.

Seja $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ uma base de um subespaço $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^n$ e façamos:

$$\begin{aligned} 1. \quad \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 & \mathbb{W}_1 &= L(\mathbf{u}_1) \\ 2. \quad \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 & \mathbb{W}_2 &= L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ 3. \quad \mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 & \mathbb{W}_3 &= L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \end{aligned}$$

$\vdots$

$$k. \quad \mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i} \mathbf{v}_i \quad \mathbb{W} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$$

Em cada iteração i , $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{W}_i$, sendo $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ uma base ortogonal de $\mathbb{W}$. Finalmente, normalizando cada um dos vectores, $\mathbf{q}_i = \mathbf{v}_i / \|\mathbf{v}_i\|$, obtemos uma base ortonormada, $\mathcal{Q} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k\}$, do subespaço $\mathbb{W}$.

Exemplo

8. Consideremos os vectores linearmente independentes $\mathbf{u}_1 = [1 \ 1 \ 0]^T$ e $\mathbf{u}_2 = [-2 \ 0 \ 1]^T$ que formam uma base de um subespaço $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^3$. Determinemos uma base ortonormada para $\mathbb{W}$ seguindo o método de Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned} 1. \quad \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 = [1 \ 1 \ 0]^T \\ \mathbf{v}_2 &= \text{perp}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \text{proj}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{u}_2 \\ 2. \quad &= \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 3. \quad \mathbf{q}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

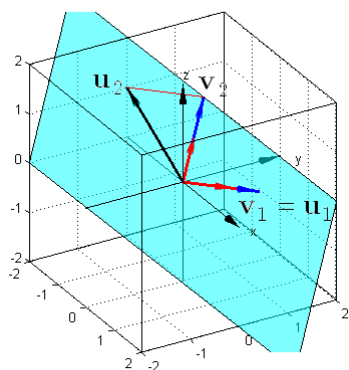


Figura 20.4