

AULA 21

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Exercícios.

21. Exercícios.

DETERMINAR UMA BASE PARA O ESPAÇO DAS LINHAS DE UMA MATRIZ.

Como duas matrizes equivalentes por linhas têm o mesmo espaço linha, para determinar uma base do espaço linha de uma matriz basta seleccionar as linhas não nulas da matriz escalonada equivalente

21.1. Determinar uma base para o espaço linha da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Determinando a matriz escalonada reduzida equivalente



```
>> A=[2 1 3 1 3; 1 -1 0 1 -1;-1 2 1 -2 0; 3 0 3 0 -6];
```

```
>> L=rref(A)
```

```
L =
```

```
1 0 1 0 -2
0 1 1 0 3
0 0 0 1 4
0 0 0 0 0
```

, temos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{L}$$

Seleccionando as linhas não nulas da matriz \mathbf{L} , temos um conjunto de 3 vectores

$$\mathbf{u}_1 = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ -2]^T, \mathbf{u}_2 = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 3]^T \text{ e } \mathbf{u}_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 4]^T$$

que formam uma base do espaço linha de \mathbf{A} . Assim, $\dim(\text{lin}(\mathbf{A})) = 3$.

DETERMINAR UMA BASE PARA O ESPAÇO DAS COLUNAS DE UMA MATRIZ.

Dado que $\text{col}(\mathbf{A}) = \text{lin}(\mathbf{A}^T)$, para determinar uma base do espaço coluna de uma matriz \mathbf{A} basta determinar uma base do espaço linha da sua matriz transposta, seleccionando as linhas não nulas da matriz escalonada equivalente a \mathbf{A}^T .

21.2. Determinar uma base para o espaço coluna da matriz \mathbf{A} do exemplo anterior.

Sendo a matriz transposta

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

, determinando a matriz escalonada reduzida equivalente à matriz transposta



>> `C=rref(A')`

`C =`

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, temos

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{C}$$

Seleccionando as linhas não nulas da matriz \mathbf{C} , temos um conjunto de 3 vectores

$$\mathbf{u}_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \mathbf{u}_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 6]^T \text{ e } \mathbf{u}_3 = [0 \ 0 \ 1 \ 3]^T$$

que formam uma base do espaço coluna de \mathbf{A} . Logo, $\dim(\text{col}(\mathbf{A})) = 3$.

A dimensão do espaço coluna é sempre igual à dimensão do espaço linha, e igual à característica da matriz, $\dim(\text{lin}(\mathbf{A})) = \dim(\text{col}(\mathbf{A})) = \text{car}(\mathbf{A}) = 3$.

Caso tenhamos escalonado a matriz \mathbf{A} , podemos determinar uma base do espaço coluna da matriz, seleccionando as colunas de \mathbf{A} correspondentes às colunas com pivot da sua matriz escalonada.

Como vimos no exemplo anterior

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{L}$$

A matriz \mathbf{L} tem pivots na 1^a, 2^a e 3^a colunas, seleccionando as colunas respectivas da matriz \mathbf{A} temos um conjunto de 3 vectores

$$\mathbf{u}_1 = [2 \ 1 \ -1 \ 3]^T, \mathbf{u}_2 = [1 \ -1 \ 2 \ 0]^T \text{ e } \mathbf{u}_3 = [1 \ 1 \ -2 \ 0]^T$$

que formam uma base do espaço coluna de \mathbf{A} .

Podemos verificar que se trata de uma combinação linear dos vectores determinados a partir da matriz transposta



```
>> rref([2 1 -1 3;1 -1 2 0;1 1 -2 0])
```

```
ans =
```

```
1 0 0 0
0 1 0 6
0 0 1 3
```

DETERMINAR UMA BASE PARA O NÚCLEO DE UMA MATRIZ.

Para determinar uma base para o núcleo de uma matriz procuramos as soluções do sistema homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

21.3. Determinar uma base para o núcleo da matriz \mathbf{A} dos exemplos anteriores.

Dada a matriz, procuramos a matriz escalonada reduzida equivalente. Como vimos, temos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, sendo x_3 e x_5 as variáveis livres, temos

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 + 2x_5 \\ x_2 = -x_3 - 3x_5 \\ x_4 = -4x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 + 2x_5 \\ -x_3 - 3x_5 \\ x_3 \\ -4x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

, pelo que, os 2 vectores

$$\mathbf{u}_1 = [-1 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0]^T, \text{ e } \mathbf{u}_2 = [2 \ -3 \ 0 \ -4 \ 1]^T$$

formam uma base do núcleo de \mathbf{A} . Temos $\text{nul}(\mathbf{A}) = \dim(\text{Ker}(\mathbf{A})) = 2$, e $\text{car}(\mathbf{A}) + \text{nul}(\mathbf{A}) = 5 = n$.

DETERMINAR UMA BASE PARA O NÚCLEO À ESQUERDA DE UMA MATRIZ.

Para determinar uma base para o núcleo à esquerda de uma matriz procuramos as soluções do sistema homogéneo $\mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

21.4. Determinar uma base para o núcleo à esquerda da matriz \mathbf{A} dos exemplos anteriores.

Dada a matriz, procuramos a matriz escalonada reduzida equivalente à matriz transposta. Como vimos, temos

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, sendo x_4 uma variável livre, temos

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -6x_4 \\ x_3 = -3x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6x_4 \\ -3x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pelo que o vector

$$\mathbf{u}_1 = [0 \ -6 \ -3 \ 1]^T$$

forma uma base do núcleo à esquerda de \mathbf{A} . Temos $\text{nul}(\mathbf{A}^T) = \dim(\text{Ker}(\mathbf{A}^T)) = 1$, e $\text{car}(\mathbf{A}) + \text{nul}(\mathbf{A}^T) = 4 = m$.

 RELAÇÃO ENTRE OS 4 ESPAÇOS FUNDAMENTAIS DE UMA MATRIZ.

21.5. Podemos verificar que o espaço linha da matriz \mathbf{A} dos exemplos anteriores corresponde ao complemento ortogonal, em \mathbb{R}^5 , do núcleo da matriz (e vice-versa)

$$\text{Ker}(\mathbf{A}) = (\text{lin}(\mathbf{A}))^\perp$$



```
>> u1=[1 0 1 0 -2]';
>> u2=[0 1 1 0 3]';
>> u3=[0 0 0 1 4]';
>> u4=[-1 -1 1 0 0]';
>> u5=[2 -3 0 -4 1]';
>> C=[u1 u2 u3];
>> N=[u4 u5];
>> C'*N
ans =
     0     0
     0     0
     0     0
```

Verificamos que o espaço coluna da matriz corresponde ao complemento ortogonal, em \mathbb{R}^4 , do núcleo à esquerda de \mathbf{A} , ou seja do núcleo de \mathbf{A}^T (e vice-versa)

$$\text{Ker}(\mathbf{A}^T) = (\text{col}(\mathbf{A}))^\perp$$



```
>> u1=[2 1 -1 3]';
>> u2=[1 -1 2 0]';
>> u3=[1 1 -2 0]';
>> Ne=[0 -6 -3 1]';
>> L=[u1 u2 u3];
>> L'*Ne
ans =
     0
     0
     0
```

 DETERMINAÇÃO DOS 4 ESPAÇOS FUNDAMENTAIS DE UMA MATRIZ COM O MATLAB.

21.6. O MatLab tem funções predefinidas que permitem o cálculo imediato dos espaços de uma matriz.

As funções **colspace(A)** e **null(A)** determinam uma base do espaço coluna e do núcleo de uma matriz, quando definida simbolicamente.

As funções **orth(A)** e **null(A)** determinam uma base ortonormada do espaço coluna e do núcleo de uma matriz quando definida numericamente.

Dada a matriz A dos exemplos anteriores, a determinação dos seus espaços linha e coluna é trivial.



```
>> A=[2 1 3 1 3; 1 -1 0 1 -1;-1 2 1 -2 0; 3 0 3 0 -6];
>> A=sym(A);
>> colspace(A)
ans =
[ 1, 0, 0]
[ 0, 1, 0]
[ 0, 0, 1]
[ 0, 6, 3]
>> colspace(A')
ans =
[ 1, 0, 0]
[ 0, 1, 0]
[ 1, 1, 0]
[ 0, 0, 1]
[-2, 3, 4]
>> null(A)
ans =
[-1, 2]
[-1, -3]
[ 1, 0]
[ 0, -4]
[ 0, 1]
>> null(A')
ans =
0
-6
-3
1
```

, confirmando as deduções feitas anteriormente.

Recorrendo às funções `orth(A)` e `null(A)` podemos determinar os versores dos 4 espaços fundamentais da matriz



```
>> A=[2 1 3 1 3; 1 -1 0 1 -1;-1 2 1 -2 0; 3 0 3 0 -6];
>> orth(A) % versores do espaço coluna
ans =
0.0982 -0.9910 0.0911
-0.1738 0.0225 0.4321
0.0211 -0.0801 -0.8930
-0.9796 -0.1051 -0.0867
```

```

>> orth(A') % versores do espaço linha
ans =
    0.3929    0.4500    0.3554
   -0.0420    0.2406   -0.6060
    0.3508    0.6906   -0.2507
    0.0157    0.1658    0.6580
   -0.8488    0.4849    0.1031
>> null(A) % versores do núcleo
ans =
    0.7136   -0.0873
    0.0811   -0.7526
   -0.4606    0.3534
   -0.5060   -0.5323
    0.1265    0.1331
>> null(A') % versores do núcleo à esquerda
ans =
     0
    0.8847
    0.4423
   -0.1474

```

DETERMINAR UMA BASE PARA O COMPLEMENTO ORTOGONAL DE UM SUBESPAÇO.

Podemos determinar uma base para o complemento ortogonal de um subespaço recorrendo às relações entre os espaços fundamentais de uma matriz.

21.7. Sendo \mathbb{W} o subespaço de \mathbb{R}^5 gerado pelos vectores

$$\mathbf{u}_1 = [1 \ -1 \ 0 \ 2 \ 0]^T, \mathbf{u}_2 = [0 \ 2 \ -1 \ 1 \ 1]^T \text{ e } \mathbf{u}_3 = [2 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1]^T$$

determinar uma base para o complemento ortogonal de \mathbb{W} .

Colocando os vectores \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , e \mathbf{u}_3 nas linhas de uma matriz \mathbf{A} , \mathbb{W}^\perp corresponde ao núcleo da matriz, $\text{Ker}(\mathbf{A}) = (\text{lin}(\mathbf{A}))^\perp$. Assim, sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

, e determinando a matriz escalonada reduzida equivalente



```

>> u1=[1 -1 0 2 0]';
>> u2=[0 2 -1 1 1]';
>> u3=[2 0 0 -1 1]';
>> U=[u1 u2 u3];

```

```
>> rref(U')
ans =
    1.0000         0         0   -0.5000    0.5000
         0    1.0000         0   -2.5000    0.5000
         0         0    1.0000   -6.0000         0
```

temos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -5/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Sendo x_4 e x_5 as variáveis livres, temos

$$\begin{cases} x_1 = 0.5x_4 - 0.5x_5 \\ x_2 = 2.5x_4 - 0.5x_5 \\ x_3 = 6x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5x_4 - 0.5x_5 \\ 2.5x_4 - 0.5x_5 \\ 6x_4 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2.5 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

peço que os 2 vectores

$$\mathbf{w}_1 = [0.5 \ 2.5 \ 6 \ 1 \ 0]^T, \text{ e } \mathbf{w}_2 = [-0.5 \ -0.5 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

formam uma base do complemento ortogonal de \mathbb{W} , o que podemos verificar



```
>> w1=[0.5 2.5 6 1 0]';
>> w2=[-0.5 -0.5 0 0 1]';
>> W=[w1 w2];
>> U'*W
ans =
     0     0
     0     0
     0     0
```

ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT.

21.8. Dado o conjunto de vectores linearmente independentes $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, com $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 2, 0, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 2, 1)$, que constitui uma base de um subespaço \mathbb{W} de \mathbb{R}^4 , obter uma base ortonormada para esse subespaço.

Procedendo conforme o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, temos:

1. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = [1 \ 1 \ 0 \ 1]^T$

2.

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \text{proj}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \text{proj}_{\mathbf{v}_2} \mathbf{u}_3 - \text{proj}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/6 \\ -1/6 \\ 2 \\ 1/3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e, finalmente, normalizando cada um dos vetores obtidos, temos

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e } \mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{150} \\ -1/\sqrt{150} \\ 12/\sqrt{150} \\ 2/\sqrt{150} \end{bmatrix}$$



```
>> u1=[1 1 0 1]';
>> u2=[0 2 0 1]';
>> u3=[1 0 2 1]';
>> v1=u1;
>> v2=u2-(u2'*v1)/(v1'*v1)*v1;
>> v3=u3-(u3'*v2)/(v2'*v2)*v2-(u3'*v1)/(v1'*v1)*v1;
>> q1=v1/norm(v1);
>> q2=v2/norm(v2);
>> q3=v3/norm(v3);
>> [v1 v2 v3]
```

```
ans =
    1.0000   -1.0000   -0.1667
    1.0000    1.0000   -0.1667
         0         0    2.0000
    1.0000         0    0.3333
```

```
>> [q1 q2 q3]
```

```
ans =
    0.5774   -0.7071   -0.0816
    0.5774    0.7071   -0.0816
         0         0    0.9798
    0.5774         0    0.1633
```

, ou simplesmente, recorrendo à função **orth(A)**



```
>> u1=[1 1 0 1]';
>> u2=[0 2 0 1]';
>> u3=[1 0 2 1]';
>> orth([u1 u2 u3])
ans =
   -0.3854    0.2643   -0.7884
   -0.5802   -0.6578    0.2660
   -0.4138    0.7050    0.5401
   -0.5862   -0.0205   -0.1262
```

Nota: A função `orth` não utiliza o algoritmo de Gram-Schmidt para obter os versores do subespaço gerado por $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, pelo que os versores são diferentes.