

# FICHA DE TRABALHO 01

1. Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = [1 \ 1 \ 1], \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcule, se possível, as seguintes matrizes (Quando não o for, justifique porquê):

- |                                    |                                |                                  |
|------------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| a) $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$     | b) $\mathbf{A} + \mathbf{B}^T$ | c) $3\mathbf{C}^T + 2\mathbf{D}$ |
| d) $(\mathbf{A}^T + \mathbf{B})^T$ | e) $\mathbf{AB}$               | f) $\mathbf{AB}^T$               |
| g) $(\mathbf{BA}^T)^T$             | h) $\mathbf{C}^2\mathbf{D}$    | i) $\mathbf{FE}$                 |
| j) $\mathbf{EF}$                   | k) $\mathbf{E}^T\mathbf{F}^T$  | l) $\mathbf{F}^T\mathbf{E}^T$    |
| m) $\mathbf{EF} + 2\mathbf{G}$     | n) $\mathbf{AD}$               | o) $\mathbf{DA}$                 |
| p) $\mathbf{CAG}$                  | p) $\text{tr}(\mathbf{FE})$    | r) $\text{tr}(\mathbf{EF})$      |

2. Em cada alínea, determine a matriz  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  de ordem 4 que satisfaz a condição indicada:

- |                          |                         |   |
|--------------------------|-------------------------|---|
| a) $a_{ij} = i + j$      | b) $a_{ij} = i - j$     | c) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se }  i - j  > 1 \\ 0 & \text{se }  i - j  \leq 1 \end{cases}$ |
| d) $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ | e) $a_{ij} = i^2 + j^2$ | f) $a_{ij} = 1 / (i + j - 1)$   |

3. Sejam  $\mathbf{A}$  uma matriz  $4 \times 3$ ,  $\mathbf{B}$  uma matriz  $4 \times 3$ ,  $\mathbf{C}$  uma matriz  $3 \times 2$ ,  $\mathbf{D}$  uma matriz  $4 \times 2$ , e  $\mathbf{E}$  uma matriz  $3 \times 4$ . Diga quais das seguintes expressões matriciais estão bem definidas e, nesses casos, indique o tipo da matriz resultante:

- |                                  |  |   |
|----------------------------------|--|---|
| a) $\mathbf{AB}$                 | b) $\mathbf{A}^T\mathbf{B}$                | c) $\mathbf{AB}^T$  |
| d) $\mathbf{AC} + \mathbf{D}$    | e) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T\mathbf{E}$ | f) $\mathbf{E}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$                    |
| g) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2$ | h) $\mathbf{AE}$                           | i) $\mathbf{E}(\mathbf{AC})$                                |
| j) $\mathbf{E}(\mathbf{AE})^3$   | k) $\mathbf{C}^T\mathbf{A}^T\mathbf{E}^T$  | l) $(\mathbf{E}^T + \mathbf{B})(\mathbf{E} + \mathbf{B}^T)$ |

4. Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são matrizes reais tais que  $\mathbf{AB}$  é do tipo  $7 \times 10$ , quais são os tipos possíveis de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ ?

5. Se  $\mathbf{A}$  é uma matriz qualquer, justifique que  $\mathbf{AA}^T$  e  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$

- Estão sempre definidas.
- São matrizes simétricas.

6. Obtenha uma expressão para  $\mathbf{A}^n$ , onde  $\mathbf{A}$  é:

a)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$

7. Uma loja de informática vende discos externos, computadores portáteis e computadores fixos de 120 Gb, 160 Gb e 250 Gb. Seja  $\mathbf{B}$  a matriz de vendas de Março e  $\mathbf{A}$  a matriz de vendas de Abril, construídas a partir das tabelas seguintes:

Vendas Março	120 Gb	160 Gb	250 Gb
Discos Externos	15	50	70
Portáteis	20	30	45
Fixos	10	15	90

Vendas Abril	120 Gb	160 Gb	250 Gb
Discos Externos	25	42	91
Portáteis	12	33	50
Fixos	9	25	95

- O que representa a matriz  $\mathbf{B} + \mathbf{A}$ ?
- O que representa a matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ?
- determine o vector coluna  $\mathbf{x}$  tal que  $\mathbf{Bx}$  indica o número total de discos externos, de computadores portáteis, e de computadores fixos vendidos em Março.
- determine o vector linha  $\mathbf{y}$  para o qual  $\mathbf{yB}$  indica o n.º total de equipamentos de 120 Gb, 160 Gb, e 250 Gb vendidos em Março.
- Usando os vectores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  das alíneas c) e d) diga o que representa o produto  $\mathbf{yBx}$ .

8. Um indivíduo compra DVD's das marcas  $A$ ,  $B$ , e  $C$  aos preços de 1€, 1,5€, e 2€, respectivamente. A tabela seguinte descreve o número de DVD's de cada marca que adquiriu nos quatro primeiros meses do ano:

	A	B	C
Jan.	5	2	1
Fev.	6	8	2
Mar.	4	2	3
Abr.	2	4	4

Calcule o seguinte produto matricial e diga o que ele representa.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

9. Em cada uma das alíneas seguintes dê um exemplo de duas matrizes quadradas de ordem 2 tais que:

a)  $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}_2 \wedge \mathbf{B} \neq \mathbf{O}_2 \wedge \mathbf{AB} = \mathbf{O}_2$

b)  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \neq \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$

c)  $(\mathbf{A} - \mathbf{B})^2 \neq \mathbf{A}^2 - 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$

10. Sejam  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  matrizes reais quadradas de ordem  $n$ . Diga se cada uma das proposições que se seguem é verdadeira ou falsa, justificando:

a) Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são permutáveis, então  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$

b)  $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}$

c)  $\mathbf{AB} + \mathbf{B} = (\mathbf{A} + \mathbf{1})\mathbf{B}$

d)  $\mathbf{AB} + \mathbf{B} = (\mathbf{A} + \mathbf{I}_n)\mathbf{B}$

e)  $(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$

f)  $(\mathbf{A} - \mathbf{B})^2 = (\mathbf{B} - \mathbf{A})^2$

g)  $\mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{A}$

h)  $\mathbf{AB} = \mathbf{AC} \wedge \mathbf{A} \neq \mathbf{0}_n \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C}$