

FICHA DE TRABALHO 02

1. Indique quais das seguintes matrizes são matrizes escalonadas e diga qual é a característica de cada uma delas:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

k) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

2. Considere o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_3 \\ x_2 + x_3 = 2(1 + x_1) \\ x_1 = x_2 + 3 \end{cases}$$

- Escreva-o na forma matricial.
- Classifique-o quanto à solução.
- Resolva-o, caso possível.

3. Questão análoga à anterior para o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 + 2x_2 \\ x_2 = 2 + x_3 \\ x_1 = 3 + x_2 \end{cases}$$

4. Questão análoga à anterior para o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 + 2x_2 \\ x_2 = 2 + x_3 \\ x_1 = 1 + x_2 \end{cases}$$

5. Faça a discussão de cada um dos seguintes sistemas de equações lineares nas incógnitas x , y , e z , em função dos respectivos parâmetros:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x - 2y + 3z = 1 \\ x + 2y + (a^2 - 3)z = a \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 1 + b \\ x + by + z = a \\ bx + y = b(1 + 2b) \end{cases} \\ \\ \text{c) } \begin{cases} x + y + 7z = -7 \\ 2x + 3y + 17z = -16 \\ x + 2y + (a^2 + 1)z = 3a \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = b \\ ax + y + z = 0 \end{cases} \end{array}$$

6. Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

determine:

- a) A matriz inversa, \mathbf{A}^{-1} .
 a) A solução do sistema de equações lineares $\mathbf{Ax} = [1 \ 2 \ 3]^T$.

7. Prove que se \mathbf{A} e \mathbf{B} são matrizes quadradas invertíveis e permutáveis ($\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$), então \mathbf{A}^{-1} e \mathbf{B}^{-1} são permutáveis, isto é, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

8. Mostre que se uma matriz quadrada de ordem n , \mathbf{A} , satisfaz a equação

$$\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} - \mathbf{I}_n = \mathbf{0}_n$$

, então \mathbf{A} é invertível. Qual é a inversa de \mathbf{A} ?

9. Determine a matriz \mathbf{A} tal que:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} & \text{b) } (4\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \\ \text{c) } (2\mathbf{A} + \mathbf{I}_2)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} & \text{d) } (3\mathbf{A}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

10. Suponha que \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , e \mathbf{D} são matrizes quadradas invertíveis. Simplifique o mais possível:

$$\begin{array}{l} \text{a) } (\mathbf{AB})^{-1}(\mathbf{AC}^{-1})(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{-1})^{-1}\mathbf{D}^{-1} \\ \text{b) } (\mathbf{AC}^{-1})^{-1}(\mathbf{AC}^{-1})(\mathbf{AC}^{-1})^{-1}\mathbf{AD}^{-1} \end{array}$$

11. Sejam a , b , c , e d números reais não nulos. Justifique que as matrizes seguintes são invertíveis e calcule a inversa respectiva:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \qquad \text{b) } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

12. Determine a equação da parábola ($y = ax^2 + bx + c$) que passa nos pontos (1,1), (2,2), e (3,5).

13. Determine três números reais cuja soma é 12, e tais que a soma do dobro do primeiro com o segundo e o dobro do terceiro é 5, e ainda o primeiro é inferior ao terceiro em 1 unidade.

14. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} ax + by = c_1 \\ cx + dy = c_2 \\ ex + fy = c_3 \end{cases}$$

Diga qual é a posição relativa das rectas $ax + by = c_1$, $cx + dy = c_2$, e $ex + fy = c_3$ quando:

- a) O sistema não tem solução
- b) O sistema tem uma única solução
- c) O sistema tem uma infinidade de soluções.