

FICHA DE TRABALHO 04

DEMONSTRAR QUE UMA TRANSFORMAÇÃO É LINEAR.

1. Recorrendo à definição averigue se são lineares as transformações seguintes:

a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $T(x, y) = (x - y, 2y, x)$

b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = (x, |y|)$

c) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; $T(x, y) = 2x + y$

d) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = (|x|, y)$

e) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$; $T(x, y, z) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 3 & 0 & y \\ -1 & 2 & z \end{vmatrix}$

f) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; $T(x, y) = \begin{vmatrix} x & -1 \\ y & x \end{vmatrix}$

g) $T : \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}$; $T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = x^2 + w^2$

h) $T : \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}$; $T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = 2x + w$

i) $T : \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}^3$; $T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = (x + w, y + z, -2w)$

j) Considere o endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que projecta ortogonalmente os vectores de \mathbb{R}^3 no plano xz (num referencial xyz ortonormado). Mostre que T é linear.

DETERMINAR O NÚCLEO E A IMAGEM DE UMA TL

2. Determine o núcleo e a imagem de , determine uma base e a dimensão destes subespaços e verifique o teorema envolvendo a nulidade e a característica de T para cada uma das seguintes transformações lineares

a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1, 0, 0) = (1, 0, 2)$$

$$T(0, 1, 0) = (0, -3, 0)$$

$$T(0, 0, 1) = (2, 0, 1)$$

b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x, y, z) = (x - 2y - z, -y, x - z)$$

c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(x, y, z) = (x - 2z, x + y)$$

d) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que projecta ortogonalmente os vectores de \mathbb{R}^3 no plano xz (num referencial xyz ortonormado).

e) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x, y, z) = (x + 2y, -2y, x - y)$$

MOSTRAR QUE UMA TL É INJECTIVA, ETC.

3. Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x - 2y - z, -y, x - z)$$

Verifique se T é injectiva e sobrejectiva. Justifique

4. Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + 2y, -2y, x - y)$$

Verifique se T é bijectiva. Justifique

CALCULAR A IMAGEM DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR ELEMENTAR.

5. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que consiste numa rotação de $\theta = \pi/2$ no sentido directo, seguida de uma reflexão sobre o eixo do \mathbf{xx} , seguida de uma projecção ortogonal sobre o eixo dos \mathbf{yy} . Determine $T(1, 3)$ e $T(x, y) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

6. Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que consiste numa rotação de $\theta = 3\pi/2$ no sentido directo, seguida de uma reflexão sobre o eixo do \mathbf{xx} , seguida de uma projecção ortogonal sobre o eixo dos \mathbf{yy} , determine $T\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T\right)$.

7. Considere a seguinte matriz dos vértices de um quadrado em \mathbb{R}^2

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine a imagem final (os vértices) do quadrado quando é rodado de $\theta = \pi/2$, e depois reflectido sobre o eixo do \mathbf{yy} .

8. Determine a matriz da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que consiste numa contracção de um factor $k = 0.25$, de uma rotação de $\theta = \pi/2$ sobre o eixo dos \mathbf{xx} , de uma reflexão sobre o plano \mathbf{xy} , e de uma expansão de um factor $k = 4$, e verifique se é uma isometria.

9. Determine a matriz 3×3 que corresponde à composição dum redimensionamento duma dada figura com um factor 0.4 , seguida duma rotação de $\theta = \pi/2$ sobre o eixo do \mathbf{xx} .

VERIFICAR SE UMA IMAGEM PODE RESULTAR DE UMA DADA TL

10. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$T(1, -1) = (1, 0, -1)$$

$$T(0, 1) = (2, 1, -1)$$

O vector $(2, -1, 1)$ pertencerá à imagem de T ? Justifique.

11. Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + 2y, -2y, x - y)$$

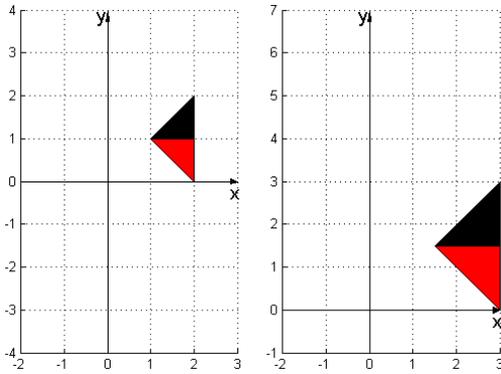
Dada a matriz da transformação em relação à base de \mathbb{R}^3 $B = \{(1, 0, 0), (0, -1, 1), (0, 0, -1)\}$ (tomando a mesma base no domínio e no contradomínio) (ver problema) verifique se o vector $(2, -1, 1)$ pertence à imagem de T .

12. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

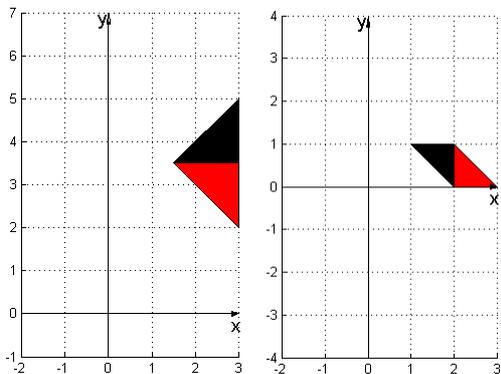
a matriz canónica da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Verifique se os vectores $w_1 = [0 \ 0 \ -2]^T$, $w_2 = [-5 \ 0 \ 5]^T$, $w_3 = [0 \ 0 \ 0]^T$ e $w_4 = [1 \ 2 \ 3]^T$ pertencem à imagem de T .

13. Diga quais das imagens, de b) a d), são compatíveis com uma transformação linear do objecto da figura a) e determine a matriz canónica das transformações lineares correspondentes.



a)

b)



c)

d)

DETERMINAR A EXPRESSÃO GERAL E A MATRIZ DE UMA TL CONHECIDAS AS IMAGENS DE UMA BASE DO SEU DOMÍNIO

14. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$T(1, 2, 0) = (-1, 0, 1)$$

$$T(1, 0, -1) = (0, -1, 0)$$

$$T(1, 1, 1) = (1, 1, -1)$$

Justifique a existência e unicidade da transformação. Determine a representação matricial de T e a expressão de $T(x, y, z)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

15. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$T(1, 3) = (1, -2)$$

$$T(-1, 2) = (-2, 2)$$

Determine a expressão de $T(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

16. Diga, justificando, se existe alguma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(1, 0, 2) = (1, 2)$$

$$T(-3, 0, -6) = (5, 1)$$

17. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que $f(1, 0, 0) = (1, 2, -1)$, $f(0, 1, 0) = (2, 0, -2)$ e $f(0, 0, 1) = (-1, 2, 1)$. Escreva a matriz canónica de f .

DETERMINAR A MATRIZ DE UMA TL DADA A SUA EXPRESSÃO GERAL

18. Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x - 2y - z, -y, x - z)$$

Escreva a matriz da transformação em relação à base canónica de \mathbb{R}^3 .

19. Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (4x + z, -2x + y, -2x + z)$$

Escreva a matriz da transformação em relação à base canónica de \mathbb{R}^3 .

20. Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y, z) = (x - 2z, x + y)$$

Escreva a matriz da transformação, \mathbf{T} , em relação às bases canónicas de \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 . Escreva a matriz da transformação, $\mathbf{T}_{\mathcal{B}}$, em relação à base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ de \mathbb{R}^3 e à base canónica de \mathbb{R}^2 . Usando a matriz $\mathbf{T}_{\mathcal{B}}$, obtenha $T(1, 1, -1)$. Confirme o resultado obtido usando a matriz \mathbf{T} .

21. Considere o endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que projecta ortogonalmente os vectores de \mathbb{R}^3 no plano xz (num referencial xyz ortonormado). Determine $T(x, y, z)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Tomando a mesma base no domínio e no contradomínio, escreva a matriz da transformação em relação à base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

22. Determine a matriz canónica de cada uma das seguintes funções lineares:

a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x, y, z) = (x - y + z, 0, y - z, x + y)$

b) $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_4, 2x_2 - 2x_3, x_1 - x_2 - 2x_4)$$

c) $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $h(x, y, z, w) = (x + y, z + w)$

CALCULAR A TL RESULTANTE DA COMPOSIÇÃO DE TL

23. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$, onde T_1 é uma rotação de $\theta = -\pi/2$, T_2 é uma reflexão sobre o eixo dos \mathbf{yy} e T_3 é uma projecção ortogonal sobre o eixo dos \mathbf{xx} . Determine $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T\right)$, $\forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$.

24. Sejam $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reflexão relativamente ao plano \mathbf{xy} , $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma rotação de $\theta = -\pi/2$ relativamente ao eixo dos \mathbf{zz} , $T_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reflexão

relativamente ao plano \mathbf{yz} e $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$. Determine $T(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e verifique se T é uma isometria. Calcule $T^{-1}(x, y, z)$.

25. Sejam $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reflexão relativamente ao plano \mathbf{yz} , $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma rotação no sentido directo com $\theta = \pi/2$ relativamente ao eixo dos \mathbf{zz} , e $T_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reflexão relativamente ao plano \mathbf{xy} . Determine a matriz canónica de $(T_3 \circ T_2 \circ T_1)^{-1}$ e use-a para calcular $(T_3 \circ T_2 \circ T_1)^{-1}(x, y, z)$.

CALCULAR A INVERSA DE UMA TL

26. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

a matriz canónica da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

- Determine $T(1,1,1)$ e $T(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- Verifique se T é invertível.

MISCELÂNEAS.

27. Considere o endomorfismo T que, tomando um vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, o projecta ortogonalmente no plano xy e depois o reflecte em relação ao plano yz (num referencial xyz ortonormado). Escreva a matriz de T em relação à base canónica de \mathbb{R}^3 e determine todos os vectores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $T(x, y, z) = (2, 1, 0)$.

28. Considere o endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que projecta ortogonalmente os vectores de \mathbb{R}^3 no plano xz (num referencial xyz ortonormado). Determine $T(x, y, z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e mostre que T é linear. Escreva a matriz de T em relação à base canónica de \mathbb{R}^3 e determine todos os vectores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $T(x, y, z) = (2, 1, 0)$.