

FICHA DE TRABALHO 05

1. Para cada uma das seguintes matrizes, determine os valores próprios, os subespaços próprios e as multiplicidades algébrica e geométrica de cada valor próprio:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} & \text{b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{c) } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \text{d) } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

2. Considere as matrizes do exercício 1. Diga se são ou não diagonalizáveis e, em caso afirmativo, determine uma sua matriz diagonalizadora e a correspondente matriz diagonal a que é semelhante.

3. Entre as matrizes reais seguintes, determine as que são diagonalizáveis. Caso o sejam, encontre uma matriz diagonalizadora \mathbf{P} e a correspondente matriz diagonal \mathbf{D} tais que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} & \text{b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \text{c) } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \text{d) } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \text{e) } \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} & \end{array}$$

4. Determine a matriz simétrica \mathbf{A} que tem valores próprios $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 1$ e tal que $\mathbf{v}_1 = [-2 \ 2]^T$ é o vector próprio de \mathbf{A} associado a λ_1 e $\mathbf{v}_2 = [1 \ 1]^T$ é o vector próprio de \mathbf{A} associado a λ_2 .

5. Determine a matriz simétrica \mathbf{A} que tem valores próprios $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$, e $\lambda_3 = 0$, com vectores próprios associados $\mathbf{v}_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{v}_2 = [1 \ 1 \ 0]^T$ e $\mathbf{v}_3 = [0 \ 1 \ 1]^T$, respectivamente.

6. Determine a matriz simétrica \mathbf{A} que tem valores próprios $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, e tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{-1} &= \{(x, y, z) : y + z = 0\} \\ \mathbb{E}_1 &= \{(x, y, z) : x = 0 \wedge y - z = 0\} \end{aligned}$$

7. Seja $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a função linear tal que

$$\begin{cases} h(1, 0, 0) = (1, 0, 2) \\ h(0, 1, 0) = (0, -3, 0) \\ h(0, 0, 1) = (2, 0, 1) \end{cases}$$

- Mostre que $(0, 1, 0)$ é vector próprio de h e determine o correspondente valor próprio.
- Determine os restantes valores próprios e todos os subespaços próprios de h . Será h bijectiva? Justifique.
- Determine uma matriz diagonal \mathbf{D} e uma matriz invertível \mathbf{T} tais que $\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{HT}$ (em que \mathbf{H} é a representação de h em relação à base canónica).

8. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um endomorfismo cujo espectro é o conjunto $\mathcal{E}(f) = \{0, 1\}$ e cujos subespaços próprios são respectivamente:

$$\mathbb{E}_0(f) = \{(x, y, z) : x = y = 0\}$$

$$\mathbb{E}_1(f) = \{(x, y, z) : x + y - z = 0\}$$

- Determine o polinómio característico de f .
- Mostre que o endomorfismo f é diagonalizável e determine uma base de \mathbb{R}^3 relativamente à qual a representação matricial de f é uma matriz \mathbf{D} diagonal e determine esta matriz.

9. Seja g um automorfismo de \mathbb{R}^2 tal $g(1, 3) = (2, 6)$. Mostre que $(1, 3)$ é vector próprio de g^{-1} associado ao valor próprio $\lambda = 1/2$.

10. Seja $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ uma base de um espaço vectorial real \mathbb{E} e $h : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ o endomorfismo de \mathbb{E} tal que

$$\begin{cases} h(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \\ h(\mathbf{e}_2) = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3 \\ h(\mathbf{e}_3) = -3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

- Determine a matriz \mathbf{H} de h em relação à base \mathcal{E} .
- Mostre que $-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ é um vector próprio de h e indique o valor próprio de h correspondente.
- Determine todos os valores próprios de h e as respectivas multiplicidades algébricas.
- Determine os subespaços próprios de h e as multiplicidades geométricas dos valores próprios correspondentes.
- Mostre que existe uma base $\mathcal{E}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ de \mathbb{E} na qual a representação matricial de h é uma matriz diagonal \mathbf{D} , indicando esta matriz e uma matriz regular \mathbf{T} tal que $\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{HT}$.