

Resolva detalhadamente e em letra bem legível os seguintes exercícios

1. Determine a matriz real $\mathbf{X}$ tal que $((\mathbf{BA})^{-1} - 2\mathbf{X}^T)^T \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{I}_2$, sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Considere o seguinte sistema de equações lineares, nas incógnitas reais x , y e z , onde a e b são parâmetros reais:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -x + 2ay + (a - 3)z = a + b \\ 2(a + 1)y - (2a + 3)z = a - 2b - 3 \end{cases}$$

- Resolva o sistema para $a = b = 0$.
- Sendo $\mathbf{A}$ a matriz simples do sistema dado para $a = b = 0$, mostre que $\mathbf{A}$ é regular e determine a inversa $\mathbf{A}^{-1}$.
- Utilize $\mathbf{A}^{-1}$ para confirmar o resultado obtido em a).
- Discuta o sistema, em função dos valores dos parâmetros reais a e b .

3. Sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

e $\mathbf{B}$ uma matriz real de 4ª ordem com $\det(\mathbf{B}) = 1/8$ calcule $\det(2\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^{-2})$.

4. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + y + z = 0\}$$

e o conjunto $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T \right\}$ de vectores de $\mathbb{R}^3$, e seja ainda $\mathbb{G} = L(\mathcal{B})$ o subespaço gerado por $\mathcal{B}$.

- Determine uma base e a dimensão de $\mathbb{W}$.
- Diga, justificando, se os vectores $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}^T$ pertencem a $\mathbb{W}$ e, em caso afirmativo, determine as suas coordenadas em relação à base de $\mathbb{W}$ que indicou na alínea anterior.
- Construa uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha a base de $\mathbb{W}$ que indicou em a).
- Indique uma base e a dimensão de $\mathbb{G}$ e caracterize os vectores de $\mathbb{G}$ por meio de uma condição nas suas coordenadas.

5. Em $\mathbb{R}^3$, com o produto interno usual, considere os vectores $\mathbf{u} = [-1 \ 1 \ 1]^T$ e $\mathbf{v} = [1 \ 1 \ -1]^T$. Determine:

- a) O ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
- b) A projecção ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$.
- c) $k \in \mathbb{R}$ tal que o vector $[0 \ k \ 1]^T$ seja ortogonal a $\mathbf{u}$.
- d) Todos os vectores perpendiculares a $\mathbf{v}$.
- e) Um vector unitário simultaneamente perpendicular aos vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
- f) Seja $\mathbb{W} = L(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Indique, justificando,
 - f.1) Uma base ortonormada de $\mathbb{W}^\perp$.
 - f.2) Uma base ortonormada de $\mathbb{W}$.
 - f.3) Uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ contendo a base indicada em f.2.

6. Considere a matriz real

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- a) Indique uma base para o espaço linha de $\mathbf{A}$, $\text{lin}(\mathbf{A})$, e uma base para o espaço nulo de $\mathbf{A}$, $\text{ker}(\mathbf{A})$.
- b) Diga, justificadamente, qual é a dimensão de cada um dos 4 espaços fundamentais da matriz $\mathbf{A}$.

7. Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que

$$T(1, 0, 0) = (1, 0, 0, 1)$$

$$T(0, 1, 0) = (-1, 0, 0, -1)$$

$$T(0, 0, 1) = (0, 1, -1, 1)$$

- a) Determine a matriz que representa T em relação às bases canónicas dos dois espaços e ainda a matriz que representa T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ e à base de $\mathbb{R}^4$ $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, -1, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.
- b) Justifique que cada uma seguintes afirmações é verdadeira:
 - b.1) $(1, 1, -1, 2) \in \text{Img}(T)$.
 - b.2) $(1, 1, 0) \in \text{ker}(T)$
 - b.3) $T(1, 1, 1) = (0, 1, -1, 1)$
 - b.4) T não é sobrejectiva nem injectiva.
 - b.5) $\dim(\text{Img}(T)) = 2$
- c) Indique bases para $\text{ker}(T)$ e $\text{Img}(T)$.
- d) Determine $T(x, y, z) \ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

8. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a função linear tal que

$$\begin{cases} T(1, 0, 0) = (3, 0, 0) \\ T(0, 1, 0) = (0, 3, -2) \\ T(0, 0, 1) = (0, -2, 0) \end{cases}$$

- Mostre que $(0, -1, -2)$ é vector próprio de T e determine o correspondente valor próprio.
- Determine os restantes valores próprios e todos os subespaços próprios de T .
- Determine uma matriz diagonal $\mathbf{D}$ e uma matriz ortogonal $\mathbf{Q}$ tais que $\mathbf{T} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$ (em que $\mathbf{T}$ é a representação de T em relação à base canónica).
- Determine a projecção do vector $\mathbf{u} = [0 \ 0 \ 2]^T$ sobre o subespaço próprio do maior valor próprio de $\mathbf{T}$.

9. Dado o vector $\mathbf{b} = [0 \ 2 \ 2]^T$ e a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine:

- A solução de mínimo erro quadrático do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
- A matriz pseudo-inversa da matriz $\mathbf{A}$.
- A matriz de projecção ortogonal no espaço coluna de $\mathbf{A}$.
- O vector do espaço coluna de $\mathbf{A}$ mais próximo de $\mathbf{b}$.

10. Determine a equação da recta que melhor se adapta ao conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ $(-2, 0)$, $(0, 2)$ e $(2, 2)$, segundo um critério de minimização do erro quadrático cometido. Represente graficamente os pontos dados e a recta obtida.

Na aula de **2ª feira 4.01.10** ser-lhe-á pedida a resolução da presente ficha, que deverá apresentar em folhas A4 devidamente identificadas com o seu número e nome e devidamente agraphadas.