

Ficha de Trabalho 01

Matrizes. (Aulas 1 a 3).

Matrizes. Conceitos fundamentais. Matriz. Elemento, linha e coluna de uma matriz. Matriz linha e matriz coluna. Matriz nula. Matriz rectangular e matriz quadrada. Diagonal principal. Traço. Matriz triangular superior e inferior. Matriz diagonal. Matriz escalar. Matriz identidade.

Álgebra matricial. Igualdade. Adição. Multiplicação por um escalar. Multiplicação matricial. Potenciação. Matriz transposta. Matriz simétrica e matriz anti-simétrica.

Matrizes equivalentes por linhas. Matriz escalonada. Pivot. Operações elementares sobre linhas. Matriz equivalente por linhas. Característica.

1. Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = [1 \ 1 \ 1], \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcule, se possível, as seguintes matrizes. Quando não o for, justifique porquê.

- | | | |
|---|--------------------------------|---|
| a) $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$ | b) $\mathbf{A} + \mathbf{B}^T$ | c) $3\mathbf{C}^T + 2\mathbf{D}$ |
| d) $(\mathbf{A}^T + \mathbf{B})^T$ | e) \mathbf{AB} | f) \mathbf{AB}^T |
| g) $(\mathbf{BA}^T)^T$ | h) $\mathbf{C}^2\mathbf{D}$ | i) \mathbf{FE} |
| j) \mathbf{EF} | k) $\mathbf{E}^T\mathbf{F}^T$ | l) $\mathbf{F}^T\mathbf{E}^T$ |
| m) $\mathbf{EF} + 2\mathbf{G}$ | n) \mathbf{AD} | o) \mathbf{DA} |
| p) \mathbf{CAG} | q) \mathbf{AH} | r) \mathbf{HA} |
| s) $(\mathbf{AH})^2$ | t) $\mathbf{A}^2\mathbf{H}^2$ | u) $(\mathbf{H}^T\mathbf{H})\mathbf{B}$ |
| v) $(\mathbf{B}^T(\mathbf{H}^T\mathbf{H}))^T$ | | |

2. Sejam \mathbf{A} uma matriz 4×3 , \mathbf{B} uma matriz 4×3 , \mathbf{C} uma matriz 3×2 , \mathbf{D} uma matriz 4×2 , e \mathbf{E} uma matriz 3×4 . Diga quais das seguintes expressões matriciais estão bem definidas e, nesses casos, indique o tipo da matriz resultante:

- | | | |
|----------------------------------|--|---|
| a) \mathbf{AB} | b) $\mathbf{A}^T\mathbf{B}$ | c) \mathbf{AB}^T |
| d) $\mathbf{AC} + \mathbf{D}$ | e) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T\mathbf{E}$ | f) $\mathbf{E}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ |
| g) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2$ | h) \mathbf{AE} | i) $\mathbf{E}(\mathbf{AC})$ |
| j) $\mathbf{E}(\mathbf{AE})^3$ | k) $\mathbf{C}^T\mathbf{A}^T\mathbf{E}^T$ | l) $(\mathbf{E}^T + \mathbf{B})(\mathbf{E} + \mathbf{B}^T)$ |

3. Se \mathbf{A} e \mathbf{B} são matrizes reais tais que \mathbf{AB} é do tipo 7×10 , quais são os tipos possíveis de \mathbf{A} e \mathbf{B} ?

4. Determine a matriz real \mathbf{X} tal que $(\mathbf{BA} - \mathbf{X}^T)^T = \mathbf{C}$, sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Determine a matriz real \mathbf{X} tal que $(\mathbf{X} - \mathbf{A}^T \mathbf{B})^T = \mathbf{B}$, sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

6. Indique quais das seguintes matrizes são matrizes escalonadas e diga qual é a característica de cada uma delas:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{f) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{g) } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{h) } \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{j) } \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{k) } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

7. Determine a característica da seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

8. Discuta, em função dos parâmetros reais a e b , a característica da seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2a+b & a+b \\ 1 & a+b & b \\ -1 & a & a \end{bmatrix}$$

9. Complete a matriz \mathbf{A} de modo a que ela seja anti-simétrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & * \\ * & * & -3 \\ 1 & * & * \end{bmatrix}$$

10. Determine os reais a e b de modo a que a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ verifique a equação

$$\mathbf{A}^2 + a\mathbf{A} + b\mathbf{I}_2 = \mathbf{0}_2$$

11. Em cada alínea, determine a matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ de ordem 4 que satisfaz a condição indicada:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } a_{ij} = i + j & \text{b) } a_{ij} = i - j & \text{c) } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } |i - j| > 1 \\ 0 & \text{se } |i - j| \leq 1 \end{cases} \\ \text{d) } a_{ij} = (-1)^{i+j} & \text{e) } a_{ij} = i^2 + j^2 & \text{f) } a_{ij} = 1 / (i + j - 1) \end{array}$$

12. Obtenha uma expressão para \mathbf{A}^n , onde \mathbf{A} é:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{b) } \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

13. Se \mathbf{A} é uma matriz qualquer, justifique que $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ e $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$

- a) Estão sempre definidas.
- b) São matrizes simétricas.