

Ficha de Trabalho 02

Sistemas. Matriz Inversa. (Aulas 4 a 6).

Sistemas de equações lineares. Equação linear. Sistema de equações lineares. Equação matricial. Soluções do sistema. Método de Gauss-Jordan. Classificação de sistemas quanto à solução. Sistemas homogêneos.

Matriz inversa. Matriz inversa. Método de condensação. Matriz ortogonal. Propriedades da álgebra matricial.

A saber:

1. Escrever um sistema na forma matricial.
2. Aplicar o método de Gauss-Jordan na resolução de sistemas.
3. Classificar um SEL quanto à sua natureza.
4. Determinar a solução geral de um sistema com base no conhecimento da solução do sistema homogêneo e de uma solução particular.
5. Determinar a inversa de uma matriz pelo método de condensação.
6. Calcular a solução de um SEL com base na matriz inversa.
7. Simplificar expressões matriciais por aplicação das propriedades da álgebra matricial.

1. Considere os sistemas de equações lineares:

$$1. \begin{cases} x_1 = 1 - 2x_3 \\ x_2 + x_3 = 2(1 + x_1) \\ x_1 = x_2 + 3 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 + 2x_2 \\ x_2 = 2 + x_3 \\ x_1 = 3 + x_2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 + 2x_2 \\ x_2 = 2 + x_3 \\ x_1 = 3 + x_2 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 + 2x_2 \\ x_2 = 2 + x_3 \\ x_1 = 1 + x_2 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

- a) Escreva-os na forma matricial.
- b) Classifique-os quanto à solução.
- c) Caso possível:

- c.1) Resolva-os com base na matriz completa do sistema.
- c.2) Calcule a matriz inversa do sistema.
- c.3) Resolva-os com base na matriz inversa.

2. Faça a discussão de cada um dos seguintes sistemas de equações lineares nas incógnitas x , y , e z , em função dos respectivos parâmetros reais:

$$a) \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x - 2y + 3z = 1 \\ x + 2y + (a^2 - 3)z = a \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y + z = 1 + b \\ x + by + z = a \\ bx + y = b(1 + 2b) \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y + 7z = -7 \\ 2x + 3y + 17z = -16 \\ x + 2y + (a^2 + 1)z = 3a \end{cases} \quad d) \begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = b \\ ax + y + z = 0 \end{cases}$$

3. Efectuando operações elementares sobre linhas, a matriz \mathbf{A} é transformada em \mathbf{R} , sua forma escalonada reduzida:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Resolva o sistema $\mathbf{Ax} = 0$.

b) Seja \mathbf{c}_i a coluna i de \mathbf{A} , $i = 1, 2, 3, 4$. Suponha que $\mathbf{b} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$. Determine a solução geral de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

4. Determine b_1 , b_2 e b_3 de modo que $\mathbf{x} = [2 \quad -2 \quad 1]^T$ seja uma solução do sistema.

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = b_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = b_2 \\ x_2 + 2x_3 = b_3 \end{cases}$$

5. Considere o seguinte sistema de equações lineares, nas incógnitas reais x , y e z , onde a e b são parâmetros reais:

$$\begin{cases} ax + bz = 2 \\ ax + ay + 4z = 4 \\ ay + 2z = b \end{cases}$$

a) Discuta o sistema, em função dos valores dos parâmetros reais a e b .

b) Resolva o sistema para $a = b = 1$.

c) Sendo \mathbf{A} a matriz simples do sistema dado para $a = b = 1$, mostre que \mathbf{A} é regular e determine a inversa \mathbf{A}^{-1} .

d) Utilize \mathbf{A}^{-1} para confirmar o resultado obtido em b),

e) Resolva o sistema para $a = 1$ e $b = 2$ e decomponha a respectiva solução geral na soma de uma solução particular com a solução geral do sistema homogéneo associado.

6. Considere o seguinte sistema de equações lineares, nas incógnitas reais x , y e z , onde a e b são parâmetros reais:

$$\begin{cases} x - ay + z = b^2 - b \\ ax + y - z = b^2 - 1 \\ 7x - 4y + z = 0 \end{cases}$$

a) Determine b , por forma a que o sistema seja homogéneo.

b) Para o(s) valor(es) de b obtido(s) na alínea anterior, determine a de modo a que o sistema tenha uma solução não trivial.

c) Resolva o sistema para $a = 2$ e $b = 1$.

7. Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

determine:

a) A matriz inversa, \mathbf{A}^{-1} .

b) A solução do sistema de equações lineares $\mathbf{Ax} = [1 \ 2 \ 3]^T$.

8. Determine a matriz \mathbf{A} tal que:

a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

b) $(4\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

c) $(2\mathbf{A} + \mathbf{I}_2)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

d) $(3\mathbf{A}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

e) $(1/4\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

9. Determine $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, sendo

$$\mathbf{B} = [1 \ 3 \ 0]^T \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

10. Calcule $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - 2\mathbf{B}^T$, sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

11. Calcule, se possível, a matriz $(\mathbf{A}^T\mathbf{B})^{-1}$, sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

12. Calcule a matriz \mathbf{C} , sabendo que

$$(\mathbf{I} + 3\mathbf{C})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

13. Sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$$

a) Determine a matriz \mathbf{X} tal que $(2\mathbf{I}_2 + 2\mathbf{X})^{-1} = \mathbf{A}$

b) Determine a matriz \mathbf{X} tal que $(3\mathbf{B}^{-1}\mathbf{X})^{-1} = \mathbf{A}$

14. Determine \mathbf{A}^{-1} , sabendo que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

15. Determine os valores de $k \in \mathbb{R}$ de modo a que \mathbf{A} seja invertível, sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ k & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2k^2 \end{bmatrix}$$

16. Supondo que as operações matriciais envolvidas nas seguintes equações na incógnita \mathbf{X} estão bem definidas, resolva-as em ordem a \mathbf{X} . Indique a condição que teve que supor satisfeita na resolução de cada alínea

a) $(\mathbf{A}^T \mathbf{X})^T = \mathbf{B}((\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} - \mathbf{A})$

b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}^T \mathbf{X})^T = \mathbf{X}^T \mathbf{A}^T - \mathbf{B}$

17. Suponha que \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , e \mathbf{D} são matrizes quadradas invertíveis. Simplifique o mais possível:

a) $(\mathbf{AB})^{-1}(\mathbf{AC}^{-1})(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{-1})^{-1}\mathbf{D}^{-1}$

b) $(\mathbf{AC}^{-1})^{-1}(\mathbf{AC}^{-1})(\mathbf{AC}^{-1})^{-1}\mathbf{AD}^{-1}$

18. Sendo \mathbf{A} , \mathbf{B} e $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ matrizes regulares, mostre que

$$\mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B} = (\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1}$$

19. Sejam \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} matrizes quadradas de ordem n invertíveis. Mostre que

$$(\mathbf{AB})^{-1}(\mathbf{AC}^{-1})(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{-1})^{-1}\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}$$

20. Sejam \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} matrizes reais quadradas de ordem $n > 1$. Diga se cada uma das proposições que se seguem é verdadeira ou falsa, justificando:

a) Se \mathbf{A} e \mathbf{B} são permutáveis, então $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$

b) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}$

c) $\mathbf{AB} + \mathbf{B} = (\mathbf{A} + 1)\mathbf{B}$

d) $\mathbf{AB} + \mathbf{B} = (\mathbf{A} + \mathbf{I}_n)\mathbf{B}$

e) $(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$

f) $(\mathbf{A} - \mathbf{B})^2 = (\mathbf{B} - \mathbf{A})^2$

g) $\mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{A}$

h) $\mathbf{AB} = \mathbf{AC} \wedge \mathbf{A} \neq \mathbf{0}_n \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C}$

i) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$

j) $\mathbf{AB} + \mathbf{B} = (\mathbf{A} + 1)\mathbf{B}$

k) $\mathbf{AB} = \mathbf{AC} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C}$

l) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T$

m) $\mathbf{AB} = \mathbf{0}_n \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}_n \vee \mathbf{B} = \mathbf{0}_n$

n) $(2\mathbf{AC} + \mathbf{BC}) = \mathbf{C}(2\mathbf{A} + \mathbf{B})$

21. Em cada uma das alíneas seguintes dê um exemplo de duas matrizes quadradas de ordem 2 tais que:

a) $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}_2 \wedge \mathbf{B} \neq \mathbf{O}_2 \wedge \mathbf{AB} = \mathbf{O}_2$

b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \neq \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$

22. Prove que se \mathbf{A} e \mathbf{B} são matrizes quadradas invertíveis e permutáveis ($\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$), então \mathbf{A}^{-1} e \mathbf{B}^{-1} são permutáveis, isto é, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

23. Considere a matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, quadrada de ordem 4, tal que $a_{ij} = i - j$. Prove que $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T = \mathbf{0}$.

24. Mostre que se uma matriz quadrada de ordem n , \mathbf{A} , satisfaz a equação

$$\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} - \mathbf{I}_n = \mathbf{0}_n$$

, então \mathbf{A} é invertível. Qual é a inversa de \mathbf{A} ?