

Ficha de Trabalho 03

Determinantes. (Aulas 7 e 8).

Determinantes. Determinantes de 1ª e 2ª ordem. Submatriz. Menor. Cofactor. Expansão em cofactores. Determinante de ordem n. Propriedades dos determinantes. Determinante de uma matriz triangular. Operações sobre linhas. Método de condensação.

A saber:

1. Calcular o determinante de uma matriz por expansão em cofactores, condensação, ou/e aplicação das propriedades dos determinantes.

1. Calcule o $\det(\mathbf{A})$, sendo

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{d) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada de ordem 3 regular. Calcule o $\det(\mathbf{A})$ sabendo que

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{A}^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Calcule $\det(\mathbf{A})$ e $\det(\mathbf{B})$, sendo $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes reais quadradas de 3ª ordem invertíveis tais que

$$\det(2\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A}^2(\mathbf{B}^T)^{-1}) = 4$$

4. Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes reais de 3ª ordem, tais que $\det(\mathbf{A}) = 2$ e $\det(\mathbf{B}) = -1/4$. Calcule

$$\det\left(\frac{1}{2}\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-2}\right)$$

5. Calcule $\det(\mathbf{B})$, sendo $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes reais de 4ª ordem, com $\mathbf{A}$ invertível, tais que

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \wedge (\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}\mathbf{A}^T)^T = 2\mathbf{A}\mathbf{B}^T$$

6. Resolva em ordem a $x \in \mathbb{R}$ a equação

$$\det \begin{bmatrix} x & 2 & 3x & 2 \\ 2x & 4 & 4 & 4 \\ 0 & x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

7. Calcule o determinante da matriz real de ordem 5

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -6 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base no valor do determinante de $\mathbf{B}$ indique o valor de verdade das proposições seguintes:

- a) A matriz $\mathbf{B}$ é invertível.
- b) O sistema homogéneo $\mathbf{B}\mathbf{x} = 0$ tem infinitas soluções.

8. Sendo $a, b \in \mathbb{R}$ e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} b & 0 & a \\ 4 & a & a \\ 2 & a & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule $\det(\mathbf{A})$ e, com base no resultado obtido, indique para que valores de a e b a matriz $\mathbf{A}$ é invertível.

9. Considere as matrizes reais $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ seguintes ($a, b, x, y \in \mathbb{R}$):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} b & -1 & 0 & a \\ -2b & 1+a & x & 1-a \\ a^2 & 0 & y & ab \\ b & -a & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ a & b & -1 \\ b & a & b \end{bmatrix}$$

- a) Sem calcular os determinantes de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, exprima $\det(\mathbf{A})$ em função de $\det(\mathbf{B})$.
- b) Calcule $\det(\mathbf{B})$ para $a = -1$ e $b = 0$.