

# Ficha de Trabalho 08

## Transformações Lineares. (Aulas 19 a 22).

**Produto interno em  $\mathbb{R}^n$ .** Vectors livres: Ângulo de dois vectores. Vectors ortogonais. Vectors em  $\mathbb{R}^n$ : Produto interno. Norma. Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Desigualdade triangular. Ângulo. Distância. Vectors ortogonais. Teorema de Pitágoras.

**Projectão ortogonal.** Projectão ortogonal. Base ortogonal e base ortonormada. Produto externo de vectores em  $\mathbb{R}^3$ . Produto misto de vectores em  $\mathbb{R}^3$ .

**Os 4 espaços fundamentais.** Complemento ortogonal. Espaços fundamentais de uma matriz. Espaços fundamentais de uma matriz, característica e nulidade. Ortogonalização de Gram-Schmidt.

**A saber:**

1. Verificar se uma dada aplicação é uma transformação linear.
2. Calcular a imagem de uma transformação linear.
3. Verificar se uma dada imagem pode resultar de uma transformação linear.
4. Determinar a matriz de uma transformação linear conhecidas as imagens de uma base do domínio.
5. Determine o núcleo e a imagem de uma transformação linear, uma base e a dimensão destes subespaços.
6. Reconhecer as matrizes das transformações lineares elementares em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  (reflexão, rotação, projectão ortogonal, etc.)
7. Calcular a matriz associada à composição de transformações lineares.
8. Calcular a matriz associada à inversa de uma transformação linear.
9. Reconhecer uma transformação afim e saber calcular a sua imagem.

### DEMONSTRAR QUE UMA TRANSFORMAÇÃO É LINEAR.

1. Recorrendo à definição averigue se são lineares as transformações seguintes:

a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad T(x, y) = (x - y, 2y, x)$

b)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad T(x, y) = (x, |y|)$

c)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad T(x, y) = 2x + y$

d)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad T(x, y) = (|x|, y)$

e)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad T(x, y, z) = (2y, z + 1)$

f)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad T(x, y) = (1 + y, 2x - 1)$

g)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad T(x, y, z) = (xy, 2y, x + z)$

h)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; \quad T(x, y, z) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 3 & 0 & y \\ -1 & 2 & z \end{vmatrix}$

i)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad T(x, y) = \begin{vmatrix} x & -1 \\ y & x \end{vmatrix}$

$$j) T : \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}; \quad T \left( \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \right) = x^2 + w^2$$

$$k) T : \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}; \quad T \left( \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \right) = 2x + w$$

$$l) T : \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad T \left( \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \right) = (x + w, y + z, -2w)$$

m) Considere o endomorfismo  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que projecta ortogonalmente os vectores de  $\mathbb{R}^3$  no plano  $xz$  (num referencial  $xyz$  ortonormado). Mostre que  $T$  é linear.

### DETERMINAR O NÚCLEO E A IMAGEM DE UMA TL

2. Determine o núcleo e a imagem, uma base e a dimensão destes subespaços e verifique o teorema envolvendo a nulidade e a característica para cada uma das seguintes transformações lineares

a)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$T(1, 0, 0) = (1, 0, 2)$$

$$T(0, 1, 0) = (0, -3, 0)$$

$$T(0, 0, 1) = (2, 0, 1)$$

b)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$T(x, y, z) = (x - 2y - z, -y, x - z)$$

c)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$T(x, y, z) = (x - 2z, x + y)$$

d)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que projecta ortogonalmente os vectores de  $\mathbb{R}^3$  no plano  $xz$  (num referencial  $xyz$  ortonormado).

e)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$T(x, y, z) = (x + 2y, -2y, x - y)$$

### MOSTRAR QUE UMA TL É INJECTIVA, ETC.

3. Dada a transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T(x, y, z) = (x - 2y - z, -y, x - z)$$

Verifique se  $T$  é injectiva e sobrejectiva. Justifique

4. Dada a transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T(x, y, z) = (x + 2y, -2y, x - y)$$

Verifique se  $T$  é bijectiva. Justifique

---

**COMPOSIÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES ELEMENTARES EM  $\mathbb{R}^2$  E  $\mathbb{R}^3$ .**


---

**5.** Considere a transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que consiste numa rotação de  $\theta = \pi/2$  no sentido directo, seguida de uma reflexão sobre o eixo do  $\mathbf{xx}$ , seguida de uma projecção ortogonal sobre o eixo dos  $\mathbf{yy}$ . Determine  $T(1,3)$  e  $T(x,y) \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ .

**6.** Considere a seguinte matriz dos vértices de um quadrado em  $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine a imagem final (os vértices) do quadrado quando é rodado de  $\theta = \pi/2$ , e depois reflectido sobre o eixo do  $\mathbf{yy}$ .

**7.** Determine a matriz da transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que consiste numa contracção de um factor  $k = 0.25$ , de uma rotação de  $\theta = \pi/2$  sobre o eixo dos  $\mathbf{xx}$ , de uma reflexão sobre o plano  $\mathbf{xy}$ , e de uma expansão de um factor  $k = 4$ , e verifique se é uma isometria.

**8.** Determine a matriz  $3 \times 3$  que corresponde à composição dum redimensionamento duma dada figura com um factor 0.4, seguida duma rotação de  $\theta = \pi/2$  sobre o eixo do  $\mathbf{xx}$ .

**9.** Considere a transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$ , onde  $T_1$  é uma rotação de  $\theta = -\pi/2$ ,  $T_2$  é uma reflexão sobre o eixo dos  $\mathbf{yy}$  e  $T_3$  é uma projecção ortogonal sobre o eixo dos  $\mathbf{xx}$ . Determine  $T\left(\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T\right)$ ,  $\forall \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$ .

**10.** Sejam  $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma reflexão relativamente ao plano  $\mathbf{xy}$ ,  $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma rotação de  $\theta = -\pi/2$  relativamente ao eixo dos  $\mathbf{zz}$ ,  $T_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma reflexão relativamente ao plano  $\mathbf{yz}$  e  $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$ . Determine  $T(x,y,z) \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$  e verifique se  $T$  é uma isometria. Calcule  $T^{-1}(x,y,z)$ .

**11.** Sejam  $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma reflexão relativamente ao plano  $\mathbf{yz}$ ,  $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma rotação no sentido directo com  $\theta = \pi/2$  relativamente ao eixo dos  $\mathbf{zz}$ , e  $T_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma reflexão relativamente ao plano  $\mathbf{xy}$ . Determine a matriz canónica de  $(T_3 \circ T_2 \circ T_1)^{-1}$  e use-a para calcular  $(T_3 \circ T_2 \circ T_1)^{-1}(x,y,z)$ .

**12.** Considere o endomorfismo  $T$  que, tomando um vector  $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ , o projecta ortogonalmente no plano  $xy$  e depois o reflecte em relação ao plano  $yz$  (num referencial  $xyz$  ortonormado). Escreva a matriz de  $T$  em relação à base canónica de  $\mathbb{R}^3$  e determine todos os vectores  $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$  tais que  $T(x,y,z) = (2,1,0)$ .

**13.** Considere o endomorfismo  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que projecta ortogonalmente os vectores de  $\mathbb{R}^3$  no plano  $xz$  (num referencial  $xyz$  ortonormado). Determine  $T(x,y,z)$ ,  $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$  e mostre que  $T$  é linear. Escreva a matriz de  $T$  em relação à base canónica de  $\mathbb{R}^3$  e determine todos os vectores  $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$  tais que  $T(x,y,z) = (2,1,0)$ .

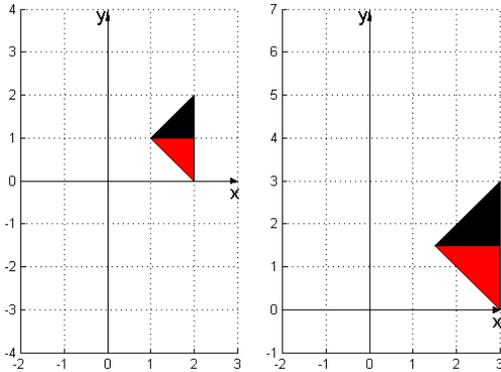
VERIFICAR SE UMA IMAGEM PODE RESULTAR DE UMA DADA TL

14. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma transformação linear tal que

$$T(1, -1) = (1, 0, -1)$$

$$T(0, 1) = (2, 1, -1)$$

O vector  $(2, -1, 1)$  pertencerá à imagem de  $T$ ? Justifique.



a)

b)

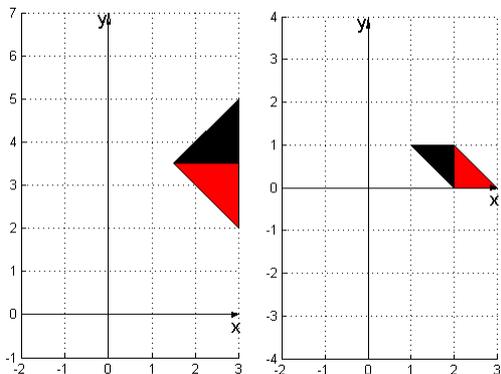
15. Dada a transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T(x, y, z) = (x + 2y, -2y, x - y)$$

Dada a matriz da transformação em relação à base de  $\mathbb{R}^3$   $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, -1, 1), (0, 0, -1)\}$  (tomando a mesma base no domínio e no contradomínio) (ver problema) verifique se o vector  $(2, -1, 1)$  pertence à imagem de  $T$ .

16. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



c)

d)

a matriz canónica da transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Verifique se os vectores  $\mathbf{w}_1 = [0 \ 0 \ -2]^T$ ,  $\mathbf{w}_2 = [-5 \ 0 \ 5]^T$ ,  $\mathbf{w}_3 = [0 \ 0 \ 0]^T$  e  $\mathbf{w}_4 = [1 \ 2 \ 3]^T$  pertencem à imagem de  $T$ .

17. Diga quais das imagens, de b) a d), são compatíveis com uma transformação linear do objecto da figura a) e determine a matriz canónica das transformações lineares correspondentes.

18. Mostre que existe uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $T(1, 0) = (1, 0, 2)$  e  $T(1, -1) = (1, -1, 2)$  e determine a imagem do vector  $(2, 2)$  por meio de  $T$ .

19. Diga, justificando, se existe alguma transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(1, 0, 2) = (1, 2)$  e  $T(-3, 0, -6) = (5, 1)$ .

20. Diga, justificando, se existe alguma transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(1, 2, 1) = (9, 1)$ ,  $T(2, 0, 2) = (4, 2)$  e  $T(3, 2, 3) = (15, 3)$ .

21. Dada a transformação linear  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T(x, y, z, w) = (x + y - z, -y + 2z - w, 2x + y - w)$$

Verifique se o vector  $\mathbf{w} = [3 \ -2 \ 4]^T$  pertence à imagem de  $T$  e, em caso afirmativo, determine todos os vectores de  $\mathbb{R}^4$  cuja imagem por  $T$  é  $\mathbf{w}$ .

---

**DETERMINAR A EXPRESSÃO GERAL E A MATRIZ DE UMA TL CONHECIDAS AS IMAGENS DE UMA BASE DO SEU DOMÍNIO**


---

**22.** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma transformação linear tal que

$$T(1, 2, 0) = (-1, 0, 1)$$

$$T(1, 0, -1) = (0, -1, 0)$$

$$T(1, 1, 1) = (1, 1, -1)$$

Determine a representação matricial de  $T$  relativamente à base canónica de  $\mathbb{R}^3$  e a expressão de  $T(x, y, z)$ ,  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . O vector  $(2, 1, -1)$  pertencerá à imagem de  $T$ ? Justifique.

**23.** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma transformação linear tal que

$$T(1, 3) = (1, -2)$$

$$T(-1, 2) = (-2, 2)$$

Determine a expressão de  $T(x, y)$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**24.** Diga, justificando, se existe alguma transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$T(1, 0, 2) = (1, 2)$$

$$T(-3, 0, -6) = (5, 1)$$

**25.** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a aplicação linear tal que  $T(1, 0, 0) = (1, 2, -1)$ ,  $T(0, 1, 0) = (2, 0, -2)$  e  $T(0, 0, 1) = (-1, 2, 1)$ . Escreva a matriz canónica de  $T$ .

---

**DETERMINAR A MATRIZ DE UMA TL DADA A SUA EXPRESSÃO GERAL**


---

**26.** Dada a transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T(x, y, z) = (x - 2y - z, -y, x - z)$$

Escreva a matriz da transformação em relação à base canónica de  $\mathbb{R}^3$ .

**27.** Dada a transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T(x, y, z) = (4x + z, -2x + y, -2x + z)$$

Escreva a matriz da transformação em relação à base canónica de  $\mathbb{R}^3$ .

**28.** Dada a transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$T(x, y, z) = (x - 2z, x + y)$$

Escreva a matriz da transformação,  $\mathbf{T}$ , em relação às bases canónicas de  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^2$ . Escreva a matriz da transformação,  $\mathbf{T}_{\mathcal{B}}$ , em relação à base  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$  de  $\mathbb{R}^3$  e à base canónica de  $\mathbb{R}^2$ . Usando a matriz  $\mathbf{T}_{\mathcal{B}}$ , obtenha  $T(1, 1, -1)$ . Confirme o resultado obtido usando a matriz  $\mathbf{T}$ .

**29.** Considere o endomorfismo  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que projecta ortogonalmente os vectores de  $\mathbb{R}^3$  no plano  $xz$  (num referencial  $xyz$  ortonormado). Determine  $T(x, y, z)$ ,  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Tomando a mesma base no domínio e no contradomínio, escreva a matriz da transformação em relação à base  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ .

30. Dada a transformação linear  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$T(x, y, z, w) = (x + y - z, 2x - z + w)$$

a) Escreva a matriz da transformação em relação à base canónica de  $\mathbb{R}^2$  e à base de  $\mathbb{R}^4$   $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ .

b) Use a matriz obtida na alínea anterior para determinar o conjunto  $\mathbb{W} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : T(x, y, z, w) = (1, 0)\}$

31. Determine a matriz canónica de cada uma das seguintes funções lineares:

a)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $f(x, y, z) = (x - y + z, 0, y - z, x + y)$

b)  $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_4, 2x_2 - 2x_3, x_1 - x_2 - 2x_4)$$

c)  $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $h(x, y, z, w) = (x + y, z + w)$

### MISCELÂNEAS.

32. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

a matriz canónica da transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

a) Determine  $T(1, 1, 1)$  e  $T(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

b) Verifique se  $T$  é invertível.

33. Sejam  $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma reflexão relativamente ao plano  $xy$ ,  $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma rotação de  $\theta = \pi$  em torno do eixo dos  $zz$ ,  $T_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma reflexão relativamente ao plano  $yz$  e  $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$ .

a) Determine a matriz canónica de  $T$ ,  $\mathbf{A}_T$ .

b) Verifique se  $T$  é uma isometria.

c) Determine  $T^{-1}(x, y, z)$ ,  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

34. Dada a transformação linear  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$T(x, y, z, w) = x + w$$

a) Determine o núcleo e a imagem de  $T$ , bem como uma base e a dimensão destes subespaços. Verifique o teorema envolvendo a nulidade e a característica.

b) Escreva a matriz da transformação em relação à base  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, -1, 0, 1), (0, 0, 0, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^4$  e à base canónica de  $\mathbb{R}$ .

c) Usando a matriz calculada na alínea anterior, determine a imagem por  $T$  de  $(1, -1, 0, 2)$ .

35. Dada a transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que

$$T(1, 0, 0) = (1, 0, 0, 1)$$

$$T(0, 1, 0) = (1, -1, 1, 0)$$

$$T(0, 0, 1) = (-1, 0, 0, -1)$$

a) Justifique devidamente as seguintes afirmações:

a.1)  $(1, 0, 1) \in \ker(T)$

a.2)  $T$  não é sobrejectiva nem injectiva.

a.3)  $T(1, -1, 0) = (0, 1, -1, 1)$

a.4)  $\dim(\text{Img}(T)) = 2$

b) Determine a matriz que representa  $T$  em relação às bases canónicas dos dois espaços e ainda a matriz que representa  $T$  em relação à base canónica de  $\mathbb{R}^3$  e à base de  $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 1), (1, -1, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$$

c) Determine  $T(x, y, z) \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

d) Indique bases para  $\ker(T)$  e  $\text{Img}(T)$ .

e) Averigue se  $(1, 1, 1, 1) \in \text{Img}(T)$ .

36. Seja  $\mathbb{E}$  um espaço vectorial real  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  uma base de  $\mathbb{E}$ . Considere ainda o endomorfismo  $T$  de  $\mathbb{E}$  ta que

$$T(\mathbf{u}_1) = 4\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + 6\mathbf{u}_3$$

$$T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2$$

$$T(\mathbf{u}_3) = -3\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 - 5\mathbf{u}_3$$

Determine a matriz da transformação  $T$  em relação à base  $\mathcal{B}$ .