

# Ficha de Trabalho 09 e 10

## Diagonalização. (Aulas 23 a 26).

**Diagonalização.** Valores e vectores próprios. Equação característica. Matrizes semelhantes. Matriz diagonalizável. Factorização  $PDP^{-1}$ .

**Diagonalização de matrizes simétricas.** Diagonalização de matrizes simétricas. Decomposição espectral.

**Decomposição em valores singulares.** Valores singulares. Decomposição em valores singulares. Interpretação geométrica. SVD e os 4 espaços fundamentais de uma matriz.

**A saber:**

1. Calcular os valores próprios de uma matriz.
2. Calcular os vectores próprios de uma matriz.
3. Diagonalizar uma matriz quadrada.
4. Diagonalizar uma matriz simétrica.
5. Calcular a matriz de projecção ortogonal no subespaço de um valor próprio.
6. Calcular a decomposição espectral de uma matriz simétrica.
7. Decompor uma matriz em valores singulares e conhecer a interpretação geométrica das matrizes resultantes da decomposição.
8. Determinar as bases dos 4 espaços fundamentais de uma matriz a partir da sua decomposição em valores singulares.

1. Para cada uma das seguintes matrizes, determine os valores próprios, os subespaços próprios e as multiplicidades algébrica e geométrica de cada valor próprio:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Considere as matrizes do exercício 1. Diga se são ou não diagonalizáveis e, em caso afirmativo, determine uma sua matriz diagonalizadora e a correspondente matriz diagonal a que é semelhante.
3. Entre as matrizes reais seguintes, determine as que são diagonalizáveis. Caso o sejam, encontre uma matriz diagonalizadora  $\mathbf{P}$  e a correspondente matriz diagonal  $\mathbf{D}$  tais que  $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ :

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e) } \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ d & -4 \end{bmatrix}$$

a) Determine  $d$  tal que 2 seja um valor próprio de  $\mathbf{A}$ .

b) Determine  $d$  tal que  $[5 \ 1]^T$  seja um vector próprio de  $\mathbf{A}$ .

5. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma transformação linear representada em relação à base canónica pela matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$$

Determine  $a$  e  $b$ , sabendo que  $\mathbf{v}_1 = [1 \ 1]^T$  e  $\mathbf{v}_2 = [2 \ 1]^T$  são vectores próprios de  $T$ .

6. Determine a matriz simétrica  $\mathbf{A}$  que tem valores próprios  $\lambda_1 = 5$  e  $\lambda_2 = 1$  e tal que  $\mathbf{v}_1 = [-2 \ 2]^T$  é o vector próprio de  $\mathbf{A}$  associado a  $\lambda_1$  e  $\mathbf{v}_2 = [1 \ 1]^T$  é o vector próprio de  $\mathbf{A}$  associado a  $\lambda_2$ .

7. Determine a matriz simétrica  $\mathbf{A}$  que tem valores próprios  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 1$ , e  $\lambda_3 = 0$ , com vectores próprios associados  $\mathbf{v}_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\mathbf{v}_2 = [1 \ 1 \ 0]^T$  e  $\mathbf{v}_3 = [0 \ 1 \ 1]^T$ , respectivamente.

8. Seja  $g$  um automorfismo de  $\mathbb{R}^2$  tal  $g(1,3) = (2,6)$ . Mostre que  $(1,3)$  é vector próprio de  $g^{-1}$  associado ao valor próprio  $\lambda = 1/2$ .

9. Considere as matrizes reais

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Justifique que  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são ambas diagonalizáveis e indique matrizes diagonais  $\mathbf{D}_A$  e  $\mathbf{D}_B$  semelhantes a  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  respectivamente.

10. Seja  $\mathbf{A}$  uma matriz real quadrada de ordem 4 que possui os valores próprios 1, -3 e 2. Sabendo que os espaços nulos das matrizes  $\mathbf{A} - \mathbf{I}_4$ ,  $\mathbf{A} + 3\mathbf{I}_4$  e  $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_4$  têm respectivamente as dimensões 2, 1 e 1 poderemos garantir que existe uma matriz diagonal  $\mathbf{D}$  semelhante a  $\mathbf{A}$ ? Justifique a sua resposta.

11. Considere a matriz real

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Determine os valores próprios de  $\mathbf{A}$ .

b) Determine os subespaços próprios de  $\mathbf{A}$  e uma base para cada um deles.

c) Diga, justificando, se  $\mathbf{A}$  é ou não diagonalizável. Em caso afirmativo, determine uma matriz regular  $\mathbf{P}$  e uma matriz diagonal  $\mathbf{D}$  tal que  $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ .

12. Determine a matriz simétrica  $\mathbf{A}$  que tem valores próprios  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$ , e tal que

$$\mathbb{E}_{-1} = \{(x, y, z) : y + z = 0\}$$

$$\mathbb{E}_1 = \{(x, y, z) : x = 0 \wedge y - z = 0\}$$

13. Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um endomorfismo cujo espectro é o conjunto  $\mathcal{E}(f) = \{0, 1\}$  e cujos subespaços próprios são respectivamente:

$$\mathbb{E}_0(f) = \{(x, y, z) : x = y = 0\}$$

$$\mathbb{E}_1(f) = \{(x, y, z) : x + y - z = 0\}$$

- a) Determine o polinómio característico de  $f$ .
- b) Mostre que o endomorfismo  $f$  é diagonalizável e determine uma base de  $\mathbb{R}^3$  relativamente à qual a representação matricial de  $f$  é uma matriz  $\mathbf{D}$  diagonal e determine esta matriz.
14. Seja  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a função linear tal que

$$\begin{cases} h(1, 0, 0) = (1, 0, 2) \\ h(0, 1, 0) = (0, -3, 0) \\ h(0, 0, 1) = (2, 0, 1) \end{cases}$$

- a) Mostre que  $(0, 1, 0)$  é vector próprio de  $h$  e determine o correspondente valor próprio.
- b) Determine os restantes valores próprios e todos os subespaços próprios de  $h$ . Será  $h$  bijectiva? Justifique.
- c) Determine uma matriz diagonal  $\mathbf{D}$  e uma matriz invertível  $\mathbf{T}$  tais que  $\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{HT}$  (em que  $\mathbf{H}$  é a representação de  $h$  em relação à base canónica).
15. Considere o endomorfismo  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuja matriz em relação à base canónica é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- a) Por observação da matriz  $\mathbf{A}$  e sem efectuar cálculos, indique um valor próprio de  $T$  e um vector próprio associado a esse valor próprio.
- b) Determine os restantes valores próprios e todos os subespaços próprios de  $T$ .
- c) Atendendo ao espectro de  $T$ , mostre que  $T$  não é um automorfismo de  $\mathbb{R}^3$ .
- d) Averigue se a transformação  $T$  é diagonalizável e, em caso afirmativo, determine uma base de  $\mathbb{R}^3$  em relação à qual a representação matricial de  $T$  seja uma matriz diagonal  $\mathbf{D}$  e indique a matriz  $\mathbf{D}$  relativa à base que indicou.

16. Seja  $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$  uma base de um espaço vectorial real  $\mathbb{E}$  e  $h : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  o endomorfismo de  $\mathbb{E}$  tal que

$$\begin{cases} h(\mathbf{u}_1) = -\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3 \\ h(\mathbf{u}_2) = 3\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3 \\ h(\mathbf{u}_3) = -3\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3 \end{cases}$$

- Determine a matriz  $\mathbf{H}$  de  $h$  em relação à base  $\mathcal{U}$ .
- Mostre que  $-\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$  é um vector próprio de  $h$  e indique o valor próprio de  $h$  correspondente.
- Determine todos os valores próprios de  $h$  e as respectivas multiplicidades algébricas.
- Determine os subespaços próprios de  $h$  e as multiplicidades geométricas dos valores próprios correspondentes.
- Mostre que existe uma base  $\mathcal{U}' = (\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3)$  de  $\mathbb{E}$  na qual a representação matricial de  $h$  é uma matriz diagonal  $\mathbf{D}$ , indicando esta matriz e uma matriz regular  $\mathbf{T}$  tal que  $\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{T}$ .

17. Em cada uma das alíneas que se seguem, determine uma matriz  $\mathbf{Q}$  ortogonal que diagonaliza  $\mathbf{A}$  e calcule  $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ :

a)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

b)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}$

c)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

18. Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine:

- Uma matriz ortogonal  $\mathbf{Q}$  que diagonaliza  $\mathbf{A}$ .
- A decomposição espectral da matriz.
- A projecção do vector  $\mathbf{u} = [1 \ 2 \ 3]^T$  sobre o subespaço próprio do maior valor próprio de  $\mathbf{A}$ .

19. Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Determine uma matriz ortogonal  $\mathbf{Q}$  que diagonaliza  $\mathbf{A}$ .
- Determine a projecção do vector  $\mathbf{u} = [0 \ 0 \ 2]^T$  sobre o subespaço próprio do maior valor próprio de  $\mathbf{A}$ .

20. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine a matriz  $\mathbf{P}$  ortogonal que diagonaliza  $\mathbf{A}$  e calcule  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ .

21. Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Determine os subespaços próprios de  $\mathbf{A}$ .
- Determine uma matriz ortogonal  $\mathbf{P}$  tal que  $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}$  é uma matriz diagonal.
- Calcule  $\mathbf{A}^6$ .

22. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Calcule os valores próprios de  $\mathbf{A}$ .
- Determine os subespaços próprios de  $\mathbf{A}$ .
- Determine uma matriz diagonal  $\mathbf{D}$  e uma matriz ortogonal  $\mathbf{P}$  tal que  $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^T$ .
- Indique uma matriz  $\mathbf{B}$  tal que  $\mathbf{B}^4 = \mathbf{D}$  e, usando o resultado da alínea anterior, encontre  $\mathbf{C}$  tal que  $\mathbf{C}^4 = \mathbf{A}$ .

23. Determine a matriz de projecção ortogonal sobre o subespaço próprio do maior valor próprio da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

24. Sendo  $\mathbf{u} = [1 \ 2 \ 3]^T$  determine a sua projecção sobre o subespaço próprio do maior valor próprio da matriz.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

25. Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Decomponha  $\mathbf{A}$  em valores singulares.