

Ficha de Trabalho 11

Erro Quadrático. (Aulas 27 a 29).

Mínimo erro quadrático. Melhor aproximação. Vector de erro. Mínimo erro quadrático. Solução de mínimo erro quadrático. Equações normais.

Quadrados mínimos e projecção num subespaço. Quadrados mínimos e projecção num subespaço. Matriz pseudo-inversa.

A saber:

1. Calcular a melhor aproximação a um vector num dado subespaço, o vector de erro e o erro quadrático associado.
2. Calcular a matriz de projecção ortogonal num subespaço.
3. Calcular a solução de menor erro quadrático de um sistema de equações.
4. Calcular os parâmetros de um modelo linear que melhor se adapta a um conjunto de pontos.
5. Calcular a pseudo-inversa de uma matriz.
6. Calcular a pseudo-inversa de uma matriz com base na decomposição em valores singulares.

1. Dado o vector $\mathbf{b} = [0 \ 2 \ 2]^T$ e a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine:

- a) A solução de mínimo erro quadrático do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
- b) A matriz pseudo-inversa da matriz \mathbf{A} .
- c) A matriz de projecção ortogonal no espaço coluna de \mathbf{A} .

2. Dado o vector $\mathbf{b} = [6 \ 1 \ 1]^T$ e a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine:

- a) A solução de mínimo erro quadrático do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
- b) A matriz pseudo-inversa da matriz \mathbf{A} .
- c) A matriz de projecção ortogonal no espaço coluna de \mathbf{A} .

3. Dado o vector $\mathbf{b} = [1 \ 2 \ 1]^T$ e a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- a) Calcule a matriz pseudo-inversa da matriz \mathbf{A} .
- b) Determine a solução de mínimo erro quadrático do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

4. Dado o vector $\mathbf{v} = [2 \ 8 \ -2]^T$ e a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine

- A matriz pseudo-inversa da matriz \mathbf{A} .
- A solução de mínimo erro quadrático do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{v}$ a partir do conhecimento da pseudo-inversa.

5. Determine a matriz de projecção ortogonal no espaço coluna da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Calcule $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ e conclua que as colunas de \mathbf{A} são ortogonais.
- Determine a matriz de projecção no espaço-coluna de \mathbf{A} .
- Calcule a projecção do vector $\mathbf{b} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ no espaço-coluna de \mathbf{A} e determine a distância de \mathbf{b} a esse subespaço.

7. Sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

determine a solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ que mais se aproxima de $\mathbf{u} = [1 \ 2 \ 3 \ 4]^T$.

8. Sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & 1 \\ 2 & -4 & -10 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine a solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ que mais se aproxima de $\mathbf{u} = [5 \ 5 \ 11 \ 11]^T$.

9. Em \mathbb{R}^3 considere o subespaço $\mathbb{F} = L((1, 2, -1), (0, 1, 3))$. Determine o vector de \mathbb{F} mais próximo de $\mathbf{u} = (5, -2, 1)$

10. Determine a solução de mínimo erro quadrático de cada um dos seguintes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 2y - 2 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = -1 \\ x + 5y = -4 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

11. Encontre o ajuste linear de mínimos quadrados aos pontos $(0,1)$, $(1,3)$, $(2,4)$ e $(3,4)$.
12. Dados os pontos de \mathbb{R}^2 $(-2,-2)$, $(0,1)$ e $(2,2)$, determine os parâmetros a_0 , a_1 , a_2 e a_3 , do polinómio $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ que melhor se adapta ao conjunto dos pontos, segundo um critério de minimização do erro quadrático cometido.
13. Dados os pontos de \mathbb{R}^2 $(-1,1)$, $(0,0)$, $(2,3)$ e $(3,4)$, determine os parâmetros a_0 , a_1 , a_2 e a_3 , do polinómio $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ que melhor se adapta ao conjunto dos pontos, segundo um critério de minimização do erro quadrático cometido.
14. As leis de movimento de Newton implicam que um objecto arremessado verticalmente a uma velocidade de v metros por segundo atingirá uma altura

$$h = vt - \frac{1}{2}gt^2$$

metros após t segundos, onde g é a constante de aceleração gravitacional. Os valores da tabela

t	0.5	1.0	1.5	2.0
h	23.7	45.1	64.0	80.4

resultaram de observações. Ajuste uma equação quadrática, $h = a_0 + a_1t + a_2t^2$, a esses dados para estimar os valores de v e de g .