

Resolva cada um dos 3 grupos em folhas separadas e identifique cada folha com o seu número de aluno e nome completo.

Grupo 1 (6.25 valores)

Problema 1. Considere a matriz real

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

- 1.25 valores a) Calcule o determinante de \mathbf{U} . Use o resultado obtido para determinar a característica de \mathbf{U} e conclua que \mathbf{U} é regular.
- 1.25 valores b) Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} matrizes reais de 3ª ordem, com \mathbf{B} invertível, tais que $\det(-3\mathbf{A}^T\mathbf{U}\mathbf{B}^{-2}) = 12$ e $\det(2\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}^T\mathbf{B}) = -32$. Calcule todos os possíveis valores de $\det(\mathbf{A})$ e $\det(\mathbf{B})$.
- Nota: Caso não resolva a alínea a), admita que $\det(\mathbf{U}) = 2$.
- 1.25 valores c) Sabendo que $\mathbf{U}^3 - 2\mathbf{U}^2 - 10\mathbf{U} + \mathbf{I}_3 = \mathbf{O}_3$, use esta igualdade matricial para exprimir \mathbf{U}^{-1} em função de \mathbf{U} e, em seguida, calcule essa matriz (inversa de \mathbf{U}).

Problema 2. Considere a matriz real

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

- 1.25 valores a) Determine uma base e a dimensão do espaço nulo e do espaço coluna de \mathbf{A} .
- 1.25 valores b) Sabendo que $\mathbf{x}_p = [1 \ 0 \ -2 \ -1]^T$ é uma solução do sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, determine a sua solução geral e ainda a matriz \mathbf{b} dos termos independentes.

Grupo 2 (6.25 valores)

Problema 3. Em \mathbb{R}^3 considere os vectores $\mathbf{v}_1 = [-1 \ 1 \ 0]^T$, $\mathbf{v}_2 = [1 \ 2 \ 1]^T$, $\mathbf{v}_3 = [2 \ 1 \ 1]^T$ e o conjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

- 1.25 valores a) Escreva o vector $\mathbf{v} = [0 \ 3 \ 1]^T$ de duas formas diferentes como combinação linear dos vectores de \mathcal{B} e construa uma base de \mathbb{R}^3 contendo o maior número possível de vectores de \mathcal{B} .

- 1.25 valores b) Seja \mathbb{F} o subespaço de \mathbb{R}^3 gerado por \mathcal{B} . Indique uma base e a dimensão de \mathbb{F} e caracterize os vectores $[x \ y \ z]^T \in \mathbb{F}$ por meio de uma condição em x, y, z .
- 1.25 valores c) Calcule $\|\mathbf{v}_1\|$, $\|\mathbf{v}_2\|$ e $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$.
- 1.25 valores d) Determine bases ortogonais para \mathbb{F} e para \mathbb{F}^\perp .
- 1.25 valores e) Construa uma base ortonormada de \mathbb{R}^3 só contendo vectores de \mathbb{F} ou de \mathbb{F}^\perp .

Grupo 3 (7.50 valores)

Problema 4. Considere a transformação linear T que, tomando um vector de \mathbb{R}^2 , o reflecte em relação ao eixo dos yy , seguidamente o roda de $\pi/3$ no sentido directo e, finalmente, o projecta sobre o eixo dos yy .

- 1.25 valores a) Escreva a matriz da transformação T em relação à base canónica de \mathbb{R}^2 (matriz canónica de T).
- 1.25 valores b) Diga, justificando, se T é uma isometria.

Problema 5. Considere a matriz real

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- 1.25 valores a) Determine os valores próprios de \mathbf{A} e os respectivos subespaços próprios.
- 1.25 valores b) Mostre que \mathbf{A} é diagonalizável e determine uma matriz invertível \mathbf{P} e uma matriz diagonal \mathbf{D} tais que $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

Problema 6.

- 1.25 valores a) Determine a solução de mínimo erro quadrático do sistema:

$$\begin{cases} x = 3 \\ 2x + y = 3 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

- 1.25 valores b) Em \mathbb{R}^3 considere o subespaço $\mathbb{F} = L\left([1 \ 2 \ 1]^T, [0 \ 1 \ 1]^T\right)$. Determine o vector de \mathbb{F} mais próximo de $\mathbf{u} = [3 \ 3 \ 6]^T$.