

Resolva cada um dos 3 grupos em folhas separadas e identifique cada folha com o seu número de aluno e nome completo.

Grupo 1 (7.60 valores)

Problema 1. Considere a matriz real

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

1.10 valores a) Calcule os reais α e β de modo que $\mathbf{A}$ verifique a equação

$$\mathbf{A}^2 + \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{I}_2 = \mathbf{O}_2$$

1.00 valores b) Use a igualdade anterior para determinar $\mathbf{A}^{-1}$ em função de $\mathbf{A}$.

1.00 valores c) Aproveite o resultado da alínea anterior para calcular $\mathbf{A}^{-1}$.

1.20 valores **Problema 2.** Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas reais (x, y, z) , onde a e b são parâmetros reais, e cuja matriz completa é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & a & -2 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Das seguintes proposições sobre a natureza do sistema anterior, a única verdadeira é (assinale com uma, e só uma, $\times$ a resposta correcta):

- ☐ O sistema é determinado sse $a \neq 0$, é indeterminado sse $a = 0 \wedge b \neq -2$ e é impossível sse $a = 0 \wedge b = -2$.
- ☐ O sistema é possível sse $a \neq 0$ e é impossível sse $a = 0$.
- ☐ O sistema é determinado sse $a \neq 0$, é indeterminado sse $a = 0 \wedge b = -2$ e é impossível sse $a = 0 \wedge b \neq -2$.
- ☐ O sistema é determinado sse $a \neq 0$ e é indeterminado sse $a = 0$.

Problema 3. Determine uma base e a dimensão dos seguintes subespaços dos espaços vectoriais reais indicados e, se $\mathbf{u}$ pertencer a esses subespaços, calcule as coordenadas de $\mathbf{u}$ em relação à base que indicou.

1.10 valores a) $\mathbb{A} = \{(x, y, z) : 2x - y + 3z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{u} = [2 \ 1 \ -1]^T$.

1.10 valores b) $\mathbb{C} = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \subset \mathbb{R}^3$ com, $\mathbf{v}_1 = [1 \ 1 \ -1]^T$, $\mathbf{v}_2 = [2 \ 1 \ 1]^T$, $\mathbf{v}_3 = [1 \ 0 \ 2]^T$ e $\mathbf{u} = [3 \ 1 \ 3]^T$.

1.10 valores c) Determine uma base para $\mathbb{A}^\perp$.

Grupo 2 (5.80 valores)

Problema 4. Considere o endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$T(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$$

- 1.00 valores a) Determine a matriz $\mathbf{A}$ de T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$.
- (Se não resolveu esta alínea, considere $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$)
- 1.20 valores b) Determine o núcleo e a imagem de T e indique uma base e a dimensão de cada um destes subespaços.
- 1.30 valores c) Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de $\mathbf{A}$. Indique, para cada valor próprio, as respectivas multiplicidades algébrica e geométrica.
- 1.10 valores d) Justifique que $\mathbf{A}$ é diagonalizável e determine uma matriz diagonal $\mathbf{D}$ e uma matriz invertível $\mathbf{P}$ tais que $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$. Prove ainda que $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{D})$ e conclua que $\mathbf{A}$ é invertível.
- 1.20 valores e) Sendo $\mathbf{D}$ e $\mathbf{P}$ as matrizes referidas na alínea anterior, mostre que $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{P}^{-1}$. Calcule $\mathbf{A}^{-1}$.

Grupo 3 (6.60 valores)

Problema 5. Seja $\mathbf{A}$ uma matriz real simétrica com valores próprios $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -1$. Sejam $\mathbf{v}_1 = [1 \ 0 \ -1]^T$, $\mathbf{v}_2 = [0 \ -1 \ 1]^T$, $\mathbf{v}_3 = [1 \ 1 \ 1]^T$ valores próprios de $\mathbf{A}$ associados a λ_1 , λ_2 e λ_3 , respectivamente.

- 1.10 valores a) Justifique que $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.
- 1.10 valores b) Construa, a partir de $\mathcal{B}$, uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.
- 1.10 valores c) Calcule $\|\mathbf{v}_1\|$, $\|\mathbf{v}_2\|$ e $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$.
- 1.10 valores d) Determine as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^7$.

Problema 6.

- 1.10 valores a) Dado o vector $\mathbf{b} = [3 \ 4 \ -2]^T$ e a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule a projecção do vector $\mathbf{b}$ no espaço-coluna de $\mathbf{A}$.

- 1.10 valores b) Determine a equação da recta que melhor se adapta ao conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ $(0, 3)$, $(1, 4)$ e $(-1, -2)$, segundo um critério de minimização do erro quadrático cometido.