

AULA 2

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Álgebra matricial.
Igualdade.
Adição.
Multiplicação por um escalar.
Multiplicação matricial.
Potenciação.
Matriz transposta.
Matriz simétrica e matriz anti-simétrica.

2. Álgebra matricial.

2.1. Igualdade.

Duas matrizes, $\mathbf{A}_{m \times n}$ e $\mathbf{B}_{p \times q}$, são iguais se têm o mesmo tamanho, ou seja, $m = p$ e $n = q$, e os elementos correspondentes são iguais, ou seja,

$$a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j.$$

2.2. Adição.

A soma de duas matrizes do mesmo tamanho, $\mathbf{A}_{m \times n}$ e $\mathbf{B}_{m \times n}$, define-se como sendo a matriz $m \times n$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

resultante da soma dos elementos homólogos de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, ou seja,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i, j$$

Exemplos

1. Sejam as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

A soma de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ é a matriz

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2 & 4+(-1) & 2+1 \\ 2+2 & 3+1 & 5+(-1) \\ 4+1 & 1+4 & 6+(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$



Soma de duas matrizes, $\mathbf{A}+\mathbf{B}$,

```
>> A=[1  4 2 ; 2 3  5 ; 4 1  6];
```

```
>> B=[2 -1 1 ; 2 1 -1 ; 1 4 -1];
```

```
>> C=A+B
```

```
C =
```

```
      3      3      3
      4      4      4
      5      5      5
```

2.3. Multiplicação por um escalar.

A multiplicação de uma matriz, $\mathbf{A}_{m \times n}$, por um escalar, $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\alpha \in \mathbb{C}$), define-se como sendo a matriz $m \times n$

$$\mathbf{B} = \alpha \mathbf{A}$$

resultante da multiplicação por α de cada um dos elementos da matriz $\mathbf{A}$, ou seja,

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}, \forall i, j$$

Exemplos

2. O produto do escalar $\alpha = 5$ pela matriz $\mathbf{A}$ é a matriz

$$\mathbf{B} = 5\mathbf{A}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \times 1 & 5 \times 4 & 5 \times 2 \\ 5 \times 2 & 5 \times 3 & 5 \times 5 \\ 5 \times 4 & 5 \times 1 & 5 \times 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 10 & 15 & 25 \\ 20 & 5 & 30 \end{bmatrix}$$



Produto do escalar $a = 5$ pela matriz $\mathbf{A}$, $\mathbf{a}*\mathbf{A}$,

```
>> a=5;
```

```
>> B=a*A
```

```
B =
```

```
      5      20      10
     10      15      25
     20       5      30
```

2.4. Multiplicação matricial.

O produto de duas matrizes, tais que **o número de colunas da primeira é igual ao número de linhas da segunda**, $A_{m \times p}$ e $B_{p \times n}$, define-se como sendo a matriz $m \times n$

$$C = AB$$

cujos elementos, c_{ij} , resultam da soma dos produtos dos elementos da linha i da matriz A pelos elementos correspondentes da coluna j da matriz B

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

, ou seja

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} \quad ; 1 \leq i \leq m \wedge 1 \leq j \leq n$$

Exemplos

3. Sejam as seguintes matrizes:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Do produto da matriz D , (2×3) , pela matriz E , (3×2) , resulta uma matriz 2×2

$$\begin{aligned} DE &= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \times 1 + 4 \times 3 + 1 \times 0 & 3 \times 2 + 4 \times 1 + 1 \times 4 \\ 2 \times 1 + 1 \times 3 + 0 \times 0 & 2 \times 2 + 1 \times 1 + 0 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 14 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Note-se que o produto da matriz E , (3×2) , pela matriz D , (2×3) , também está definido,

$$(3 \times 2) (2 \times 3)$$

, resultando uma matriz 3×3

$$\begin{aligned}
 \mathbf{ED} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \times 3 + 2 \times 2 & 1 \times 4 + 2 \times 1 & 1 \times 1 + 2 \times 0 \\ 3 \times 3 + 1 \times 2 & 3 \times 4 + 1 \times 1 & 3 \times 1 + 1 \times 0 \\ 0 \times 3 + 4 \times 2 & 0 \times 4 + 4 \times 1 & 0 \times 1 + 4 \times 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 11 & 13 & 3 \\ 8 & 4 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Este exemplo evidencia claramente que o **produto de matrizes não é comutativo**, uma vez que

$$\mathbf{DE} \neq \mathbf{ED}$$

Quando se verifica $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ dizem-se **matrizes permutáveis** (ou **comutáveis**).



Produto de matrizes, **A*B**,

```
>> D=[3 4 1; 2 1 0]
```

```
D =
```

```
      3      4      1
      2      1      0
```

```
>> E=[1 2; 3 1; 0 4]
```

```
E =
```

```
      1      2
      3      1
      0      4
```

```
>> D*E
```

```
ans =
```

```
     15     14
      5      5
```

```
>> E*D
```

```
ans =
```

```
      7      6      1
     11     13      3
      8      4      0
```

2.5. Potenciação.

Dada uma matriz quadrada de ordem n , $\mathbf{A}$, e um inteiro não negativo k , definimos a **potência** k de $\mathbf{A}$ como

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n$$

$$\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k \mathbf{A}, \forall k \geq 0$$

, ou seja, $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n$ e $\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A} \times \mathbf{A} \times \cdots \times \mathbf{A}}_{k \text{ termos}}, k > 0$.

Exemplos

4. O cubo da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

é

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^3 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 3 & 1 \times 2 + 2 \times (-1) \\ 3 \times 1 - 1 \times 3 & 3 \times 2 - 1 \times (-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \times 1 + 0 \times 3 & 7 \times 2 + 0 \times (-1) \\ 0 \times 1 + 7 \times 3 & 0 \times 2 + 7 \times (-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 21 & -7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Potência de uma matriz, $\mathbf{A}^n$,

```
>> A=[1 2;3 -1]
```

```
A =
```

```
     1     2
     3    -1
```

```
>> A^3
```

```
ans =
```

```
     7    14
    21    -7
```

```
>> A*A*A
```

```
ans =
```

```
     7    14
    21    -7
```

2.6. Matriz transposta.

A matriz transposta de uma matriz $\mathbf{A}_{m \times n}$ é definida pela matriz $n \times m$

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$$

, obtida passando as linhas de $\mathbf{A}$ a colunas (ou as colunas a linhas), ou seja,

$$b_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$$

Exemplos

A transposta da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

é a matriz

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 8 & 7 \\ 4 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$



Transposta de uma matriz, **A.'**,

```
>> A=[1 3 4; 2 8 9; 5 7 6];
```

```
>> A.'
```

```
ans =
```

```
1      2      5
3      8      7
4      9      6
```

2.7. Matriz simétrica e anti-simétrica.

Uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ diz-se simétrica se $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ ($a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$), e diz-se anti-simétrica se $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ ($a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j$).

Exemplos

Sejam as seguintes matrizes:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz $\mathbf{B}$ é simétrica, e a matriz $\mathbf{C}$ é anti-simétrica

$$\mathbf{B}^T = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^T = -\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Os elementos da diagonal principal de uma matriz anti-simétrica são obrigatoriamente nulos, dado que

$$a_{ii} = -a_{ii} \Leftrightarrow 2a_{ii} = 0 \Leftrightarrow a_{ii} = 0.$$

Exercícios.

2.1. Sendo

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 6 \\ 4 & 0 & 8 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 9 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 9 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ 8 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcule c_{23} .

Atendendo à definição de produto matricial, c_{23} é igual ao produto da 2ª linha da matriz $\mathbf{A}$ pela 3ª coluna da matriz $\mathbf{B}$

$$c_{23} = a_{2j}b_{i3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = 4 \times 3 + 0 \times 5 + 8 \times 6 + 2 \times 0 = 60$$



```
>> c23=[4 0 8 2]*[3 5 6 0].'  
c23 =  
60
```

2.2. Dadas as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Calcule $\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - 2\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -4 & 4 \\ -10 & 4 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 3 \\ 19 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



```
>> A=[1 8 6;5 3 7;9 4 2];  
>> B=[0 1 3;1 -2 2;-5 2 -1];  
>> A-2*B
```

ans =

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 3 \\ 19 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Calcule $\mathbf{AB}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \times 0 + 8 \times 1 + 6 \times (-5) & 1 \times 1 + 8 \times (-2) + 6 \times 2 & 1 \times 3 + 8 \times 2 + 6 \times (-1) \\ 5 \times 0 + 3 \times 1 + 7 \times (-5) & 5 \times 1 + 3 \times (-2) + 7 \times 2 & 5 \times 3 + 3 \times 2 + 7 \times (-1) \\ 9 \times 0 + 4 \times 1 + 2 \times (-5) & 9 \times 1 + 4 \times (-2) + 2 \times 2 & 9 \times 3 + 4 \times 2 + 2 \times (-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -22 & -3 & 13 \\ 32 & 13 & 14 \\ -6 & 5 & 33 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



```
>> A=[1 8 6;5 3 7;9 4 2];
>> B=[0 1 3;1 -2 2;-5 2 -1];
>> A*B
```

ans =

$$\begin{bmatrix} -22 & -3 & 13 \\ 32 & 13 & 14 \\ -6 & 5 & 33 \end{bmatrix}$$

3. Calcule A^2 .

$$\begin{aligned}
 A^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 8 \times 5 + 6 \times 9 & 1 \times 8 + 8 \times 3 + 6 \times 4 & 1 \times 6 + 8 \times 7 + 6 \times 2 \\ 5 \times 1 + 3 \times 5 + 7 \times 9 & 5 \times 8 + 3 \times 3 + 7 \times 4 & 5 \times 6 + 3 \times 7 + 7 \times 2 \\ 9 \times 1 + 4 \times 5 + 2 \times 9 & 9 \times 8 + 4 \times 3 + 2 \times 4 & 9 \times 6 + 4 \times 7 + 2 \times 2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 95 & 56 & 74 \\ 83 & 77 & 65 \\ 47 & 92 & 86 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



```
>> A=[1 8 6;5 3 7;9 4 2];
```

```
>> A^2
```

```
ans =
```

```

95    56    74
83    77    65
47    92    86
```