

AULA 3

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Matriz escalonada.

Pivot

Operações elementares sobre linhas.

Matriz equivalente por linhas.

Característica.

3. Matrizes equivalentes por linhas.

3.1. Matriz escalonada. Pivot. Matriz escalonada reduzida

Diz-se que uma matriz está na **forma escalonada** se

1. Todas as linha nulas estão abaixo das linhas não nulas.
2. Por baixo do 1.º elemento não nulo de uma linha, chamado *pivot*, todos os elementos são nulos.
3. O pivot da linha $i + 1$ está à direita do pivot da linha i .

Uma matriz escada está na **forma escalonada reduzida** se os seus pivots são 1 e cada pivot é o único elemento não nulo na sua coluna.

Exemplos

1. A matriz **A** está na forma escalonada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz **B** está na forma escalonada reduzida

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2. Operações elementares sobre linhas.

Designamos por **operação elementar sobre as linhas** de uma matriz cada uma das seguintes 3 operações:

1. Troca entre si de duas linhas da matriz

$$L_i \leftrightarrow L_k$$

2. Multiplicação de uma linha da matriz por um escalar não nulo

$$\alpha L_i \rightarrow L_i$$

3. Substituição de uma linha pela sua soma com um múltiplo escalar de outra linha

$$L_i + \alpha L_k \rightarrow L_i$$

Exemplos

2. Troca entre si de duas linhas de uma matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

3. Multiplicação de uma linha de uma matriz por um escalar não nulo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}L_3 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

4. Substituição de uma linha pela sua soma com um múltiplo escalar de outra linha

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 - 3L_3 \rightarrow L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$



Troca entre si de duas linhas da matriz, $\mathbf{A}([\mathbf{Li} \ \mathbf{Lk}], :) = \mathbf{A}([\mathbf{Lk} \ \mathbf{Li}], :)$,

```
>> C=[1 2 3 1; 2 1 3 -1; 1 1 3 -2]
```

```
C =
```

```
1     2     3     1
2     1     3    -1
1     1     3    -2
```

```
>> C([1 3], :) = C([3 1], :)    L1 ↔ L3
```

```
C =
```

```
1     1     3    -2
2     1     3    -1
1     2     3     1
```

Multiplicação de uma linha da matriz por um escalar não nulo, $\mathbf{C}(\mathbf{Li}, :) = \mathbf{a} * \mathbf{C}(\mathbf{Li}, :)$,

```
>> C(3, :) = 5*C(3, :)    5L3 → L3
```

```
C =
```

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 5 & 10 & 15 & 5 \end{array}$$

Substituição de uma linha pela sua soma com um múltiplo escalar de outra linha,
 $\mathbf{C}(\mathbf{Li}, :) = \mathbf{C}(\mathbf{Li}, :) + \mathbf{a} * \mathbf{C}(\mathbf{Lk}, :)$,

$$>> \mathbf{C}(3, :) = \mathbf{C}(3, :) - 5 * \mathbf{C}(1, :) \quad L_3 - 5L_1 \rightarrow L_3$$

$\mathbf{C} =$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 15 \end{array}$$

3.3. Matriz equivalente por Linhas.

Uma matriz $\mathbf{B}$ diz-se **equivalente por linhas** a uma matriz $\mathbf{A}$, e escrevemos $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, se $\mathbf{B}$ pode ser obtida de $\mathbf{A}$ por aplicação de uma sequência de operações elementares sobre linhas.

Exemplos

5. Através da execução de uma sequência de operações elementares sobre linhas, vamos transformar a matriz $\mathbf{C}$ numa matriz escalonada

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - L_1 \rightarrow L_3 \end{array} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftrightarrow L_2 \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \quad -1L_2 \rightarrow L_2 \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 - 2L_2 \rightarrow L_1 \\ L_3 + 3L_2 \rightarrow L_3 \end{array} \end{aligned}$$

A matriz já está na forma escalonada. Podemos prosseguir no sentido de a transformar na forma escalonada reduzida

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad -\frac{1}{3}L_3 \rightarrow L_3 \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad L_1 - 3L_3 \rightarrow L_1 \end{aligned}$$

A matriz $\mathbf{C}$ está agora na forma escalonada reduzida (todos os seus pivots são 1 e cada pivot é o único elemento não nulo na sua coluna)

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$



Redução de uma matriz à forma escalonada reduzida, **rref(A)**,

```
>> rref(C)
```

```
ans =
```

```

1      0      0      1
0      1      0      3
0      0      1     -2
```

3.4. Característica.

Designamos por **característica** de uma matriz $\mathbf{A}$, e escrevemos $\text{car}(\mathbf{A})$, o número de linhas não nulas da matriz escalonada que dela resulta pela execução de operações elementares sobre linhas.

Exemplos

6. Sejam as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz $\mathbf{A}$ está na forma escalonada, tendo característica $\text{car}(\mathbf{A}) = 3$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz $\mathbf{B}$ está na forma escalonada reduzida, tendo característica $\text{car}(\mathbf{B}) = 3$.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Característica de uma matriz, **rank(A)**,

```
>> rank(A)
```

```
ans =
```

```
3
```

```
>> rank(B)
```

```
ans =
```

```
3
```

Exercícios.

3.1. Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

1. Determine a matriz escalonada equivalente.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 3 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 6 & -5 & -3 \end{bmatrix} & -3L_1 + L_3 \rightarrow L_3 \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -17 & -51 \end{bmatrix} & -6L_2 + L_3 \rightarrow L_3 \end{aligned}$$

2. Determine a matriz escalonada reduzida equivalente.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -17 & -51 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} & -\frac{1}{17}L_3 \leftrightarrow L_3 \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{aligned} -2L_3 + L_2 &\rightarrow L_2 \\ -L_3 + L_1 &\rightarrow L_1 \end{aligned} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} & 2L_2 + L_1 \rightarrow L_1 \end{aligned}$$



```
>> A=[0 1 2 8;1 -2 1 0;3 0 -2 -3];  
>> rref(A)  
ans =  
     1     0     0     1  
     0     1     0     2  
     0     0     1     3
```

3. Determine a característica da matriz.

Dado que a matriz escalonada não tem linhas nulas, a característica da matriz é igual ao número de linhas

$$\text{car}(\mathbf{A}) = n = 3$$



```
>> rank(A)  
ans =  
     3
```