

AULA 7

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Determinantes de 1ª e 2ª ordem.
Submatriz. Menor.
Cofactor.
Expansão em cofactores.
Determinante de ordem n.
Propriedades dos determinantes.
Determinante de uma matriz triangular.
Operações sobre linhas.
Método de condensação.

7. Determinantes.

7.1. Determinantes de 1ª e 2ª ordem.

Dada uma matriz com um único elemento, $\mathbf{A} = [a]$, definimos o **determinante** de \mathbf{A} como

$$\det(\mathbf{A}) = a$$

Dada uma matriz quadrada 2×2 , $\mathbf{A}_{2 \times 2}$, definimos o determinante de \mathbf{A} como

$$\det(\mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Exemplo

1. Seja a matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

O determinante de \mathbf{B} é

$$\det(\mathbf{B}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = (1 \times 3) - (4 \times 2) = -5$$

7.2. Submatriz. Menor.

Uma **submatriz** $p \times q$ de uma matriz $\mathbf{A}_{m \times n}$ (com $p \leq m$ e $q \leq n$), é a matriz formada pelos elementos comuns a p linhas e q colunas, não necessariamente consecutivas, da matriz \mathbf{A} .

Dada uma matriz quadrada $\mathbf{A}_{n \times n}$ define-se o **menor** do elemento a_{ij} , e escrevemos \mathbf{A}_{ij} , como o determinante da submatriz $(n-1) \times (n-1)$ de \mathbf{A} obtida por eliminação da i -ésima linha e da j -ésima coluna de \mathbf{A} .

$$\mathbf{A}_{ij} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

2. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

o menor do elemento a_{33} é

$$\mathbf{A}_{33} = \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

, e o menor do elemento a_{22} é

$$\mathbf{A}_{22} = \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

7.3. Cofactor.

Dada uma matriz quadrada $\mathbf{A}_{n \times n}$ define-se o **cofactor** (ou complemento algébrico) do elemento a_{ij} , e escrevemos $\text{cof}(a_{ij})$, como

$$\text{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \mathbf{A}_{ij}$$

, ou seja, + ou - (conforme $i + j$ seja par ou ímpar) o menor do elemento a_{ij}

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Exemplo

3. Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

O cofactor do elemento a_{32} é

$$\begin{aligned} \text{cof}(a_{32}) &= (-1)^{3+2} \mathbf{A}_{32} \\ &= (-1)^5 \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \\ &= -(1 \times 5 - 2 \times 2) = -1 \end{aligned}$$

7.4. Determinante de ordem n. Expansão em cofactores.

Uma matriz quadrada $\mathbf{A}_{n \times n}$ tem um **determinante** igual à soma dos produtos dos elementos de uma qualquer linha ou coluna, pelos seus cofactores. Ou seja, o determinante de \mathbf{A} pode ser calculado em termos da **expansão em cofactores** da i -ésima linha

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{cof}(a_{ij})$$

, ou da j -ésima coluna

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \text{cof}(a_{ij})$$

Exemplo

4. O determinante da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

, recorrendo, por exemplo, à expansão em cofactores da 1ª linha, é

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \sum_{j=1}^n a_{1j} \text{cof}(a_{1j}) = \sum_{j=1}^3 a_{1j} \text{cof}(a_{1j}) \\ &= a_{11} \text{cof}(a_{11}) + a_{12} \text{cof}(a_{12}) + a_{13} \text{cof}(a_{13}) \\ &= a_{11}(-1)^{1+1} \mathbf{A}_{11} + a_{12}(-1)^{1+2} \mathbf{A}_{12} + a_{13}(-1)^{1+3} \mathbf{A}_{13} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} a_{11} (-1)^{1+1} \mathbf{A}_{11} & a_{12} (-1)^{1+2} \mathbf{A}_{12} & a_{13} (-1)^{1+3} \mathbf{A}_{13} \\ + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix} & + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= 1 \times (1) \times \det \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + 4 \times (-1) \times \det \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} + 2 \times (1) \times \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -4 \times (2 \times 6 - 5 \times 7) \\ &= 92\end{aligned}$$



Podemos calcular o determinante de uma matriz utilizando a função $\det(\mathbf{A})$.

```
>> A=[1 4 2;2 0 5;7 0 6];
>> det(A)
ans =
    92
```

5. Tendo o cuidado de, na expansão em cofactores, escolher em cada passo a linha ou coluna com maior número de zeros, de modo a reduzir o esforço de cálculo, temos que o determinante da matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

é

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{B}) &= \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} && \text{(Expansão em} \\ && \text{cofactores da 3ª} \\ && \text{coluna.)} \\ &= 2 \times \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} && \text{(Expansão em} \\ && \text{cofactores da 2ª} \\ && \text{linha.)} \\ &= 2 \times 1 \times \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} && \text{(Expansão em} \\ && \text{cofactores da 2ª} \\ && \text{linha.)} \\ &= 2 \times 1 \times 1 \times \det \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \\ &= 2 \times 1 \times 1 \times 3 \times 4 \\ &= 24\end{aligned}$$



```
>> A=[1 2 0 3 0;3 4 2 1 3;0 1 0 0 0;1 2 0 0 0;0 2 0 1 4];
>> det(A)
ans =
    24
```

7.5. Propriedades dos Determinantes.

Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} matrizes quadradas de ordem n , demonstra-se que:

1. $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$

2. $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$

(Note bem: em geral, $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$)

3. $\det(\mathbf{A}^k) = (\det(\mathbf{A}))^k, \forall k \in \mathbb{N}$

4. Se \mathbf{A} tem duas linhas ou duas colunas proporcionais, então $\det(\mathbf{A}) = 0$.

5. Se \mathbf{A} tem uma linha ou uma coluna de zeros, então $\det(\mathbf{A}) = 0$.

6. Uma matriz quadrada é regular sse $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Se \mathbf{A} é invertível

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det(\mathbf{A}))^{-1}$$

, e (de 3.)

$$\det(\mathbf{A}^k) = (\det(\mathbf{A}))^k, \forall k \in \mathbb{Z}$$

7. Se numa linha ou coluna da matriz \mathbf{A} cada elemento é a soma de m parcelas, então $\det(\mathbf{A})$ é a soma dos m determinantes que se obtêm substituindo os elementos dessa linha ou coluna, sucessivamente, pelas diversas parcelas e mantendo as outras linhas ou colunas inalteradas.

Exemplos

6. Atendendo às propriedades dos determinantes, a expressão

$$\frac{\det(\mathbf{ABA}^T)}{\det(\mathbf{A}^2\mathbf{B}^{-1})}$$

pode ser simplificada, resultando

$$\begin{aligned} \frac{\det(\mathbf{ABA}^T)}{\det(\mathbf{A}^2\mathbf{B}^{-1})} &= \frac{\det(\mathbf{AB}) \det(\mathbf{A}^T)}{\det(\mathbf{A}^2) \det(\mathbf{B}^{-1})} \\ &= \frac{\det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) \det(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})^2 \det(\mathbf{B})^{-1}} \\ &= \det(\mathbf{B}) \det(\mathbf{B}) \\ &= \det(\mathbf{B})^2 \end{aligned}$$

7. Atendendo às propriedades dos determinantes, sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ 2 \cos(t) - 3 \sin(t) & 2 \sin(t) + 3 \cos(t) \end{bmatrix}$$

temos

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \det \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ 2 \cos(t) - 3 \sin(t) & 2 \sin(t) + 3 \cos(t) \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ 2 \cos(t) & 2 \sin(t) \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -3 \sin(t) & 3 \cos(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dado que a primeira matriz tem duas linhas proporcionais, o seu determinante é nulo. Temos então

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= \det \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -3\sin(t) & 3\cos(t) \end{bmatrix} \\ &= 3\cos^2(t) + 3\sin^2(t) \\ &= 3\end{aligned}$$



```
>> syms t
>> A=[cos(t) sin(t); 2*cos(t)-3*sin(t) 2*sin(t)+3*cos(t)];
>> d=det(A)
d =
3*cos(t)^2+3*sin(t)^2
>> d=simplify(d)
d =
3
```

7.6. Determinante de uma Matriz Triangular. Operações sobre Linhas. Método de Condensação.

1. O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.
2. Se a matriz \mathbf{B} se obtém da matriz \mathbf{A} trocando entre si duas linhas ou duas colunas de \mathbf{A} , então

$$\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{B})$$

3. Se a matriz \mathbf{B} se obtém da matriz \mathbf{A} multiplicando uma linha ou uma coluna de \mathbf{A} por um escalar $\alpha \neq 0$, então

$$\det(\mathbf{A}) = \frac{1}{\alpha} \det(\mathbf{B})$$

Em particular, sendo \mathbf{A} de ordem n ,

$$\det(\alpha\mathbf{A}) = \alpha^n \det(\mathbf{A})$$

4. Se a matriz \mathbf{B} se obtém da matriz \mathbf{A} somando a uma linha ou uma coluna de \mathbf{A} um múltiplo escalar de uma outra linha ou coluna, então

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$$

Com base nas operações elementares sobre linhas, é possível transformar uma matriz, \mathbf{A} , numa matriz triangular, \mathbf{B} , cujo determinante é fácil de calcular e relacionar com o determinante de \mathbf{A} . Este método de cálculo do determinante de uma matriz é designado por método de condensação.

Exemplos

8. O determinante de matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

, recorrendo, por exemplo, à expansão em cofactores da 3ª linha, é

$$\det(\mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \times \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 2 \times (1 \times 3 - 4 \times 0) = 6$$

Mais facilmente, reconhecendo que \mathbf{A} é uma matriz triangular, o cálculo do determinante é imediato a partir do produto dos elementos da diagonal principal

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 1 \times 3 \times 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$



```
>> A=[1 4 2;0 3 5;0 0 2];
>> det(A)
ans =
    6
```

9. O determinante da matriz:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

, recorrendo ao método de condensação, é

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}) &= \det \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= (-1) \times \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} && L_4 \leftrightarrow L_1 \\ &= (-1) \times \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} && \begin{array}{l} L_2 - 3L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 2L_1 \rightarrow L_3 \\ L_4 - 2L_1 \rightarrow L_4 \end{array} \\ &= (-1) \times (-1) \times \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} && L_3 \leftrightarrow L_2 \\ \det(\mathbf{B}) &= (-1) \times (-1) \times \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} && L_4 + 2L_3 \rightarrow L_4 \\ &= (-1) \times (-1) \times (1 \times (-3) \times (-1) \times 10) \\ &= 30 \end{aligned}$$



```
>> B=[2 4 6 8;3 6 5 9;2 1 4 7;1 2 2 2];
>> det(B)
ans =
    30
```