

AULA 8

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Exercícios.

8. Exercícios.

8.1. Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

, calcular o menor e o cofactor do elemento a_{12} .

Temos, por definição, que o menor do elemento a_{12} é

$$\mathbf{A}_{12} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

e o cofactor do elemento a_{12} é

$$\begin{aligned} \text{cof}(a_{12}) &= (-1)^{1+2} \mathbf{A}_{12} \\ &= (-1)^3 \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \\ &= -(2 \times 6 - 3 \times 4) = 0 \end{aligned}$$

8.2. Calcule o determinante da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

, recorrendo à expansão em cofactores da 2ª linha e da 2ª coluna.

Temos, para a expansão em cofactores da 2ª linha,

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \operatorname{cof}(a_{ij}) = \sum_{j=1}^3 a_{2j} \operatorname{cof}(a_{2j}) \\ &= a_{21} \operatorname{cof}(a_{21}) + a_{22} \operatorname{cof}(a_{22}) + a_{23} \operatorname{cof}(a_{23}) \\ &= a_{21}(-1)^{2+1} \mathbf{A}_{21} + a_{22}(-1)^{2+2} \mathbf{A}_{22} + a_{23}(-1)^{2+3} \mathbf{A}_{23}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& a_{21}(-1)^{2+1} \mathbf{A}_{21} \quad a_{22}(-1)^{2+2} \mathbf{A}_{22} \quad a_{23}(-1)^{2+3} \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \\ \det(\mathbf{A}) &= 2 \times (-1) \times \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} + 0 + 3 \times (-1) \times \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -2 \times (6 - 2) - 3 \times (1 - 4) \\ &= 1\end{aligned}$$

, e, para a expansão em cofactores da 2ª coluna,

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= \sum_{i=1}^n a_{ij} \operatorname{cof}(a_{ij}) = \sum_{i=1}^3 a_{i2} \tilde{a}_{i2} \\ &= a_{12} \operatorname{cof}(a_{12}) + a_{22} \operatorname{cof}(a_{22}) + a_{32} \operatorname{cof}(a_{32}) \\ &= a_{12}(-1)^{1+2} \mathbf{A}_{12} + a_{22}(-1)^{2+2} \mathbf{A}_{22} + a_{32}(-1)^{3+2} \mathbf{A}_{32}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& a_{12}(-1)^{1+2} \mathbf{A}_{12} \quad a_{22}(-1)^{2+2} \mathbf{A}_{22} \quad a_{32}(-1)^{3+2} \mathbf{A}_{32} \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \\ \det(\mathbf{A}) &= 1 \times (-1) \times \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} + 0 + 1 \times (-1) \times \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= -1 \times (12 - 12) - 1 \times (3 - 4) \\ &= 1\end{aligned}$$

Obtemos, obviamente, o mesmo valor.

8.3. Calcule o determinante da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

, recorrendo ao método de condensação.

Temos

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}) &= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} && \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 4L_1 \rightarrow L_3 \end{array} \\
&= (-2) \times \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} && -\frac{1}{2}L_2 \leftrightarrow L_2 \\
&= -2 \times \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} && L_3 + 3L_2 \rightarrow L_3 \\
&= -2 \times (1 \times 1 \times (-1/2)) \\
&= 1
\end{aligned}$$



```
>> A=[1 1 2;2 0 3;4 1 6];
>> det(A)
ans =
    1
```

8.4. Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada de ordem n , com n ímpar, tal que $a_{ij} + a_{ji} = 0$. Prove que $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Se $a_{ij} + a_{ji} = 0$ então a matriz é anti-simétrica, $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, pelo que, com base nas propriedades dos determinantes

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}^T) &= \det(-\mathbf{A}) \\
\det(\mathbf{A}) &= \det((-1) \times \mathbf{A}) \\
\det(\mathbf{A}) &= (-1)^n \det(\mathbf{A}) \\
\det(\mathbf{A}) &= -\det(\mathbf{A}) \\
2\det(\mathbf{A}) &= 0 \\
\det(\mathbf{A}) &= 0
\end{aligned}$$

8.5. Sendo $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes quadradas de ordem $n = 3$, tais que $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B}) = 4$, calcule $\det(2(\mathbf{A}^T \mathbf{B}^{-1})^T)$

Com base nas propriedades dos determinantes

$$\begin{aligned}
\det(2(\mathbf{A}^T \mathbf{B}^{-1})^T) &= 2^3 \det(\mathbf{A}^T \mathbf{B}^{-1})^T \\
&= 2^3 \det(\mathbf{A}^T \mathbf{B}^{-1}) \\
&= 2^3 \det(\mathbf{A}^T) \det(\mathbf{B}^{-1}) \\
&= 2^3 \det(\mathbf{A}) (\det(\mathbf{B}))^{-1} \\
&= 2^3 \frac{\det(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{B})} \\
&= 2^3
\end{aligned}$$

8.6. Mostre que

$$\det \begin{bmatrix} d & g & a+2d \\ e & h & b+2e \\ f & i & c+2f \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Temos

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} d & a & g \\ e & b & h \\ f & c & i \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} d & g & a \\ e & h & b \\ f & i & c \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} d & g & a+2d \\ e & h & b+2e \\ f & i & c+2f \end{bmatrix} \end{aligned}$$

8.7. Calcule os valores de a para os quais se anula o determinante da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1-a & 0 & 1 \\ 3 & -a & -3 \\ 1 & 0 & -1-a \end{bmatrix}$$

Temos, por desenvolvimento em cofactores pela 2ª coluna da matriz

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \det \begin{bmatrix} -1-a & 0 & 1 \\ 3 & -a & -3 \\ 1 & 0 & -1-a \end{bmatrix} \\ &= -a \det \begin{bmatrix} -1-a & 1 \\ 1 & -1-a \end{bmatrix} \\ &= -a((-1-a)^2 - 1) \\ &= -a(1 + a^2 + 2a - 1) \\ &= -a(a^2 + 2a) \\ &= -a^2(a + 2) \end{aligned}$$

, pelo que

$$\det(\mathbf{A}) = 0 \Rightarrow -a^2(a + 2) \Rightarrow a = 0 \vee a = -2$$

8.8. Sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

e $\mathbf{B}$ uma matriz real de 4ª ordem com $\det(\mathbf{B}) = 1/8$:

a) Calcule $\det(\mathbf{A})$

b) Calcule $\det(2\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^{-2})$.

a) Recorrendo ao método de condensação temos:

$$\begin{aligned}
 \det(\mathbf{A}) &= \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \\
 &= \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} && L_2 - 1L_1 \rightarrow L_2 \\
 &= \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \end{bmatrix} && L_4 + 1L_3 \rightarrow L_4 \\
 &= \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} && L_4 + \frac{1}{2}L_3 \rightarrow L_4 \\
 &= (1) \times (1) \times (-8) \times (-4) \\
 &= 32
 \end{aligned}$$

b) Com base nas propriedades dos determinantes e atendendo a que $\det(\mathbf{A}) = 32$, $\det(\mathbf{B}) = 1/8$ e $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matriz reais de 4ª ordem, temos:

$$\begin{aligned}
 \det(2\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^{-2}) &= 2^4 \det(\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^{-2}) \\
 &= 16 \det(\mathbf{B}^T) \det(\mathbf{A}^{-1}) \det(\mathbf{B}^{-2}) \\
 &= \frac{16 \det(\mathbf{B}) \det(\mathbf{B})^{-2}}{\det(\mathbf{A})} \\
 &= \frac{16 \det(\mathbf{B})^{-1}}{32} \\
 &= \frac{(1/8)^{-1}}{2} \\
 &= \frac{8}{2} \\
 &= 4
 \end{aligned}$$