

# AULA 09

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

## TÓPICOS

Vectorios livres.
Vectorios em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ .
Vectorios em $\mathbb{R}^n$ .
Vectorios iguais.
Soma de vectorios.
Produto de um escalar por um vector.
Notação matricial.
Vector nulo. Vector simétrico.
Propriedades da soma e do produto por um escalar

## 9. Vectorios em $\mathbb{R}^n$ .

### 9.1. Vectorios livres.

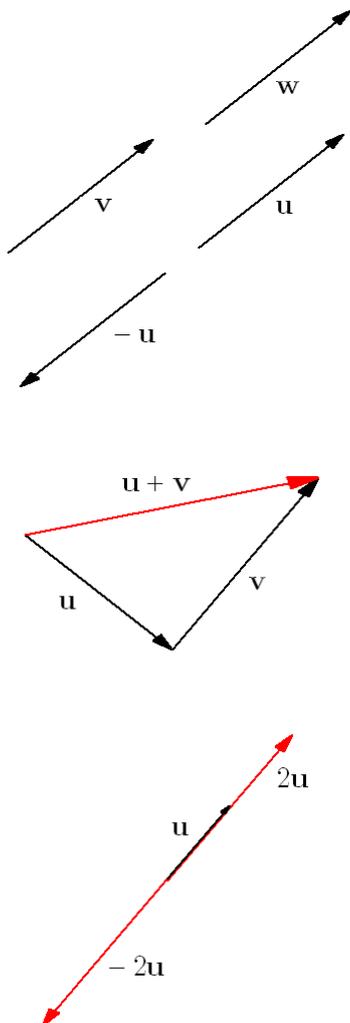


Figura 9.1

Recorde do Ensino Secundário que um **vector**  $u$  é definido por uma **direcção**, um **sentido** e um **comprimento**, e representa-se geometricamente no plano,  $\mathbb{R}^2$ , ou no espaço,  $\mathbb{R}^3$ , por um **segmento orientado**, que corresponde a um deslocamento de um ponto para outro.

A ponta da seta do vector é chamada ponto final ou **extremidade**, e o outro ponto extremo é chamado ponto inicial ou **origem** do vector.

Segmentos orientados com a mesma direcção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento representam o mesmo vector, ou seja, são considerados **vectorios iguais**.

No exemplo figurado tem-se

$$u = v = w$$

O **vector simétrico** de  $u$  é o vector que tem o mesmo comprimento, a mesma direcção e sentido oposto ao de  $u$ . Representa-se por  $-u$ .

A **soma**  $u$  e  $v$  é o vector  $u + v$  que une a origem de  $u$  à extremidade de  $v$  quando se faz coincidir a origem de  $v$  com a extremidade de  $u$ .

Um vector com comprimento zero e direcção e sentido indeterminados chama-se **vector nulo** e representa-se por  $0$ .

$$u + (-u) = 0$$

O produto de um escalar real,  $\alpha$ , por um vector  $\mathbf{u}$  é o vector  $\alpha\mathbf{u}$  tal que:

Se  $\alpha = 0$ ,  $\alpha\mathbf{u}$  é o vector nulo.

Se  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha\mathbf{u}$  tem:

- comprimento igual a  $|\alpha|$  vezes o comprimento de  $\mathbf{u}$ ;
- a direcção de  $\mathbf{u}$ ;
- o sentido de  $\mathbf{u}$  se  $\alpha > 0$  e contrário ao de  $\mathbf{u}$  se  $\alpha < 0$ .

**Propriedades da soma de vectores**

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= \mathbf{v} + \mathbf{u} && \text{(comutativa)} \\ (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) && \text{(associativa)} \\ \mathbf{u} + \mathbf{0} &= \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} && \text{(elemento neutro)} \\ \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) &= \mathbf{0} && \text{(todos os vectores têm simétrico)} \end{aligned}$$

**Propriedades do produto de um escalar real por um vector**

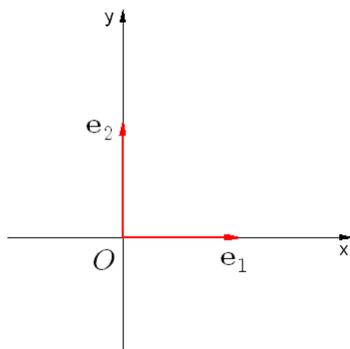
$$\begin{aligned} \alpha(\beta\mathbf{u}) &= (\alpha\beta)\mathbf{u} \\ \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} && \text{(distributiva)} \\ (\alpha + \beta)\mathbf{u} &= \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u} && \text{(distributiva)} \\ 1\mathbf{u} &= \mathbf{u} && \text{(elemento neutro)} \end{aligned}$$

O **comprimento** de um vector  $\mathbf{u}$  é o comprimento de qualquer um dos segmentos orientados que o representam e é designado por **norma** do vector, usando-se a notação  $\|\mathbf{u}\|$ .

Um vector de norma igual a 1 é chamado **vector unitário**. Dado um vector não nulo  $\mathbf{u}$ , o vector

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$$

é o vector unitário com a direcção e sentido de  $\mathbf{u}$  e chama-se o **versor** de  $\mathbf{u}$ . A operação de multiplicação de um vector  $\mathbf{u}$  pelo inverso da sua norma é designada por **normalização** do vector  $\mathbf{u}$ .



**9.2. Vectores em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .**

**Bases canónicas de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .**

Um conjunto de dois vectores não colineares  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  diz-se uma **base** de vectores em  $\mathbb{R}^2$ , e um conjunto de três vectores  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  não complanares diz-se uma base de vectores em  $\mathbb{R}^3$ .

Uma **base ortonormada** em  $\mathbb{R}^2$  é uma base de  $\mathbb{R}^2$  em que os vectores  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  têm comprimento 1 e são perpendiculares, e uma base ortonormada em  $\mathbb{R}^3$  é uma base de  $\mathbb{R}^3$  em que os vectores  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$  têm norma 1 e são perpendiculares dois a dois.

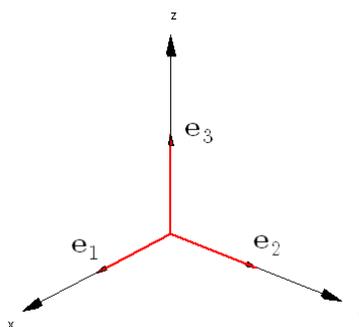


Figura 9.2

A **base canónica** de  $\mathbb{R}^2$  é a base ortonormada de vectores com as direcções e sentidos dos eixos coordenados constituída pelos vectores  $\mathbf{e}_1 = (1,0)$  e  $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ ,  $\{(1,0),(0,1)\}$ . Identicamente, a base canónica de  $\mathbb{R}^3$  é constituída pelos vectores  $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$  e  $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ ,  $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ .

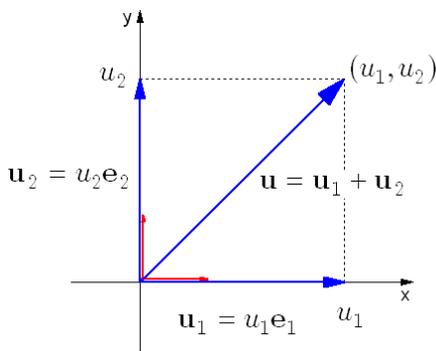
**Componentes e coordenadas de um vector em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$**

As **componentes do vector  $\mathbf{u}$** , de  $\mathbb{R}^2$ , numa base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  são os vectores  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  que têm, respectivamente, a direcção de  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ , e cuja soma é igual a  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

As componentes do vector  $\mathbf{u}$ , de  $\mathbb{R}^3$ , numa base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  são os vectores  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  e  $\mathbf{u}_3$  que têm, respectivamente, as direcções de  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$ , e cuja soma é igual a  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$



As **coordenadas do vector  $\mathbf{u}$**  de  $\mathbb{R}^2$  numa base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  são os números reais,  $u_1$  e  $u_2$ , que devemos multiplicar por  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  para obtermos as componentes de  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$$

Tendo o vector o seu ponto inicial na origem do referencial,  $O = (0,0)$ , as coordenadas do vector são coincidentes com as coordenadas do ponto onde o vector tem a sua extremidade  $(u_1, u_2)$ , ou seja, o conjunto de todos os pontos do plano corresponde ao conjunto de todos os vectores cujo ponto inicial é a origem do referencial,  $O$ , pelo que, também é usada a notação

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$$

Temos, portanto, para os versores da base canónica,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 \\ &= (1,0) \\ \mathbf{e}_2 &= 0\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 \\ &= (0,1) \end{aligned}$$

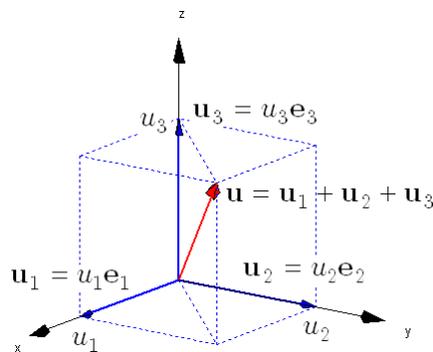


Figura 9.3

, como já tínhamos visto.

É também usual designar  $u_1$  e  $u_2$  como as componentes do vector segundo  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ , respectivamente.

As coordenadas do vector  $\mathbf{u}$  de  $\mathbb{R}^3$  numa base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  são os números reais,  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ , que devemos multiplicar por  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$  para obtermos as componentes de  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$$

À semelhança de  $\mathbb{R}^2$ , é também usual a notação  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ , e a designação de  $u_1, u_2$  e  $u_3$  como as componentes do vector segundo cada um dos respectivos versores  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ , e  $\mathbf{e}_3$ .

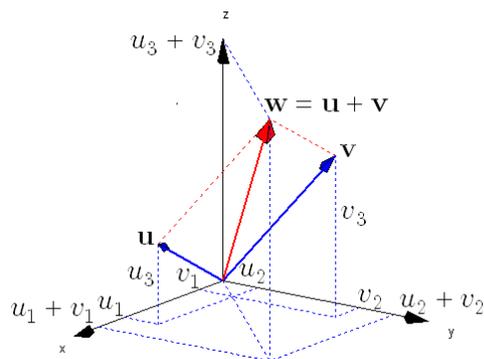
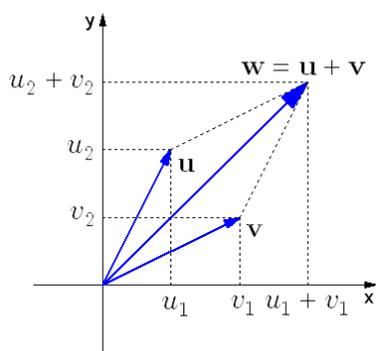


Figura 9.4

### Soma de vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

O vector soma de dois vectores de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ , é o vector  $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$  de coordenadas  $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ , ou seja, resultante da soma ordenada das componentes segundo cada um dos versores

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{u} + \mathbf{v} \\ &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2) + (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) \\ &= (u_1 + v_1)\mathbf{e}_1 + (u_2 + v_2)\mathbf{e}_2 \\ &= w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

O vector soma de dois vectores de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$  e  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ , é o vector  $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$  de coordenadas  $(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{u} + \mathbf{v} \\ &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) + (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3) \\ &= (u_1 + v_1)\mathbf{e}_1 + (u_2 + v_2)\mathbf{e}_2 + (u_3 + v_3)\mathbf{e}_3 \\ &= w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2 + w_3\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

### Produto de um escalar por um vector em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

O produto de um escalar  $\alpha$  por um vector  $\mathbf{u}$  de  $\mathbb{R}^2$  é o vector  $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$  de coordenadas  $(\alpha u_1, \alpha u_2)$ , ou seja, resultante do produto do escalar pelas componentes segundo cada um dos versores

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \alpha\mathbf{u} \\ &= \alpha(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2) = (\alpha u_1)\mathbf{e}_1 + (\alpha u_2)\mathbf{e}_2 \\ &= v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

O produto de um escalar  $\alpha$  por um vector  $\mathbf{u}$  de  $\mathbb{R}^3$  é o vector  $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$  de coordenadas  $(\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \alpha\mathbf{u} \\ &= \alpha(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) \\ &= (\alpha u_1)\mathbf{e}_1 + (\alpha u_2)\mathbf{e}_2 + (\alpha u_3)\mathbf{e}_3 \\ &= v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

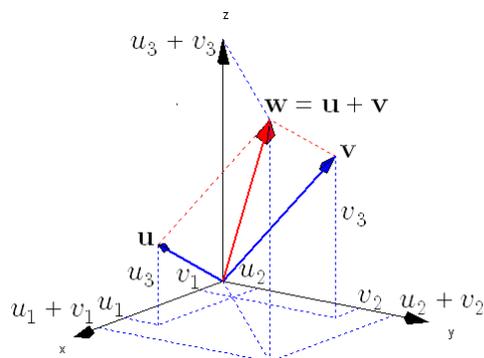
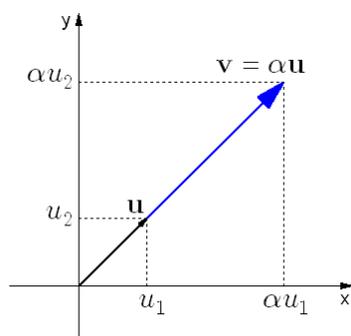
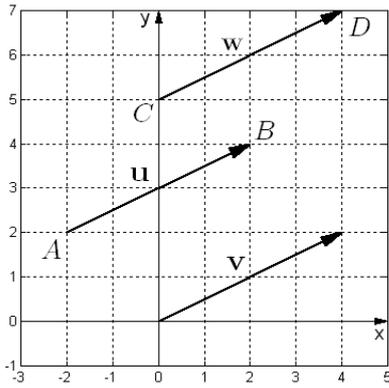


Figura 9.5

### Exemplos

- O vector que tem origem no ponto  $A = (-2, 2)$  e extremidade no ponto  $B = (2, 4)$ ,  $\mathbf{u} = \overline{AB}$ , é igual ao vector na posição canónica (com ponto inicial na origem do referencial)



$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{B} - \mathbf{A} \\ &= (2, 4) - (-2, 2) \\ &= (2 + 2, 4 - 2) \\ &= (4, 2) \end{aligned}$$

, ou ainda, igual ao vector  $\mathbf{w} = \overline{CD}$  com origem no ponto  $C = (0, 5)$  e extremidade no ponto  $D$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{C} + \mathbf{v} \\ &= (0, 5) + (4, 2) \\ &= (0 + 4, 5 + 2) \\ &= (4, 7) \end{aligned}$$

, ou seja,  $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{w} = (4, 2) = 4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ .

2. Dados os vectores  $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ , o vector  $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}$  é

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= 2\mathbf{u} - \mathbf{v} \\ &= 2(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - (2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) \\ &= 4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \\ &= 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

, ou,  $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v} = 2(2, 1) - (2, -2) = (4, 2) - (2, -2) = (2, 4)$ .

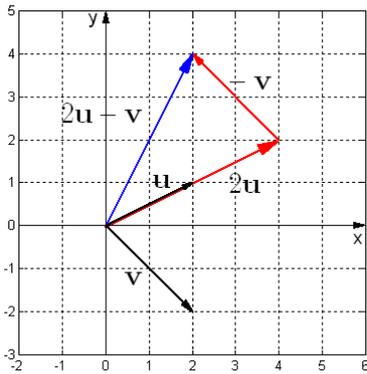


Figura 9.6

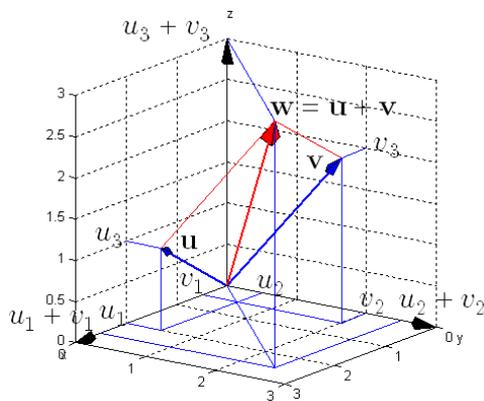


Figura 9.7

```
>> u=[2 1];
>> v=[2 -2];
>> w=2*u-v
w =
    2    4
```

3. Dados os vectores  $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + 0.5\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3$  e  $\mathbf{v} = 0.5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ , o vector  $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$  é

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{u} + \mathbf{v} \\ &= (2\mathbf{e}_1 + 0.5\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3) + (0.5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) \\ &= 2.5\mathbf{e}_1 + 2.5\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

```
>> u=[2 0.5 1];
>> v=[0.5 2 2];
>> w=u+v
w =
    2.5000    2.5000    3.0000
```

### 9.3. Vectores em $\mathbb{R}^n$ .

Sendo  $n$  um inteiro positivo, define-se o **espaço**  $\mathbb{R}^n$  como o conjunto de todas as seqüências ordenadas de  $n$  números reais,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , (ditas **n-uplos**).

Tal como em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , os elementos de  $\mathbb{R}^n$  podem ser interpretados como pontos, ou como vectores, num espaço  $n$ -dimensional.

#### Exemplos

4.  $\mathbb{R}^1$  é o conjunto de todos os números reais que representamos sobre um eixo orientado  $\mathbf{x}$ .  $\mathbb{R}^2$  é o conjunto de todos os pares ordenados de números reais,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , que usualmente representamos geometricamente no plano 2D recorrendo a um sistema de eixos cartesiano  $\mathbf{xy}$ .  $\mathbb{R}^3$  é o conjunto de todos os ternos ordenados de números reais,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , que usualmente representamos geometricamente no espaço 3D recorrendo a um sistema de eixos cartesiano  $xyz$ .  $\mathbb{R}^4$ ,  $\mathbb{R}^5$ ,  $\mathbb{R}^6$ , ...,  $\mathbb{R}^n$ , é o conjunto de todos os quádruplos,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ , quintuplos,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ , sêxtuplos,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ , ...,  $n$ -uplos,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , que não podemos representar geometricamente, mas que podemos continuar a pensar como pontos, ou vectores, de um espaço 4D, 5D, 6D, ...,  $n$ D.

### 9.4. Vectores iguais.

Em  $\mathbb{R}^n$ , dois **vectores**,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , são **iguais** se, ordenadamente, cada uma das suas coordenadas é igual

$$u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_n = v_n$$

### 9.5. Soma de vectores.

O vector **soma de dois vectores**,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , é o vector  $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$  cujas coordenadas são a soma ordenada das coordenadas dos vectores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

### 9.6. Produto de um escalar por um vector.

O **produto de um escalar real  $\alpha$  por um vector  $\mathbf{u}$**  é o vector

$$\mathbf{v} = \alpha \mathbf{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_n)$$

, dizendo-se que  $\mathbf{v}$  é um **múltiplo escalar** de  $\mathbf{u}$ .

### 9.7. Notação matricial.

Um vector de  $\mathbb{R}^n$  pode ser escrito em **notação matricial** como uma matriz linha (ou **vector linha**) ou uma matriz coluna (ou **vector coluna**). Temos assim que

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

pode ser escrito na forma da matriz linha

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n]$$

ou na forma da matriz coluna

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Utilizando a notação matricial as operações vectoriais de soma e produto por um escalar são idênticas às definidas para as matrizes

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

, e

$$\mathbf{v} = \alpha \mathbf{u} = \alpha \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \vdots \\ \alpha u_n \end{bmatrix}$$

### Exemplos

5. Em  $\mathbb{R}^2$ , em alternativa à notação

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$$

,  $\mathbf{u}$  pode ser escrito na forma de um vector coluna

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Temos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \\ &= u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 \\ &= [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6. Dados os vectores de  $\mathbb{R}^4$ ,  $\mathbf{u} = (1, -2, 3, 1)$  e  $\mathbf{v} = (3, 1, -1, 0)$  o vector  $\mathbf{w} = 3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$  é

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= 3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} \\ &= 3 \times (1, -2, 3, 1) - 2 \times (3, 1, -1, 0) \\ &= (3, -6, 9, 3) - (6, 2, -2, 0) \\ &= (-3, -8, 11, 3) \end{aligned}$$

, ou, em notação matricial,

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= 3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 \\ -8 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



```
>> u=[1 -2 3 1]';
>> v=[3 1 -1 0]';
>> w=3*u-2*v
w =
    -3
    -8
    11
     3
```

## 9.8. Vector nulo. Vector simétrico.

O vector nulo é representado por  $\mathbf{0}$  e define-se como sendo o elemento neutro da adição em  $\mathbb{R}^n$ , ou seja,

$$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$$

Sendo  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  um vector de  $\mathbb{R}^n$ , o vector simétrico de  $\mathbf{u}$ , representa-se por  $-\mathbf{u}$ , e é

$$-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$$

, uma vez que

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (u_1, u_2, \dots, u_n) + (-u_1, -u_2, \dots, -u_n) = (0, 0, \dots, 0) = \mathbf{0}$$

## 9.9. Propriedades da soma e do produto por um escalar.

As propriedades da soma de vectores e do produto de um vector por um escalar real são idênticas às conhecidas para vectores livres.

Sendo  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  dois vectores em  $\mathbb{R}^n$ , e  $\alpha$  e  $\beta$  dois escalares, temos

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

$$\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{0}) = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$