

AULA 10

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Estruturas algébricas.

Espaço vectorial.

Combinação linear.

Independência linear.

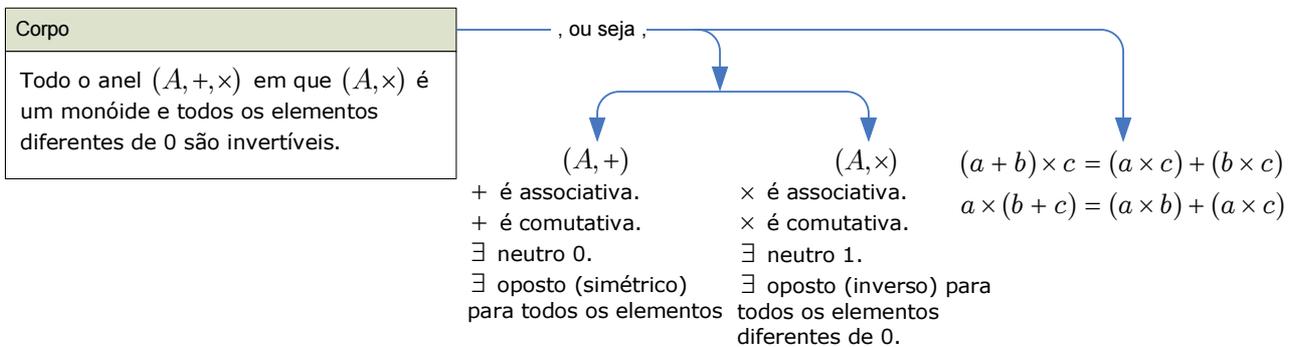
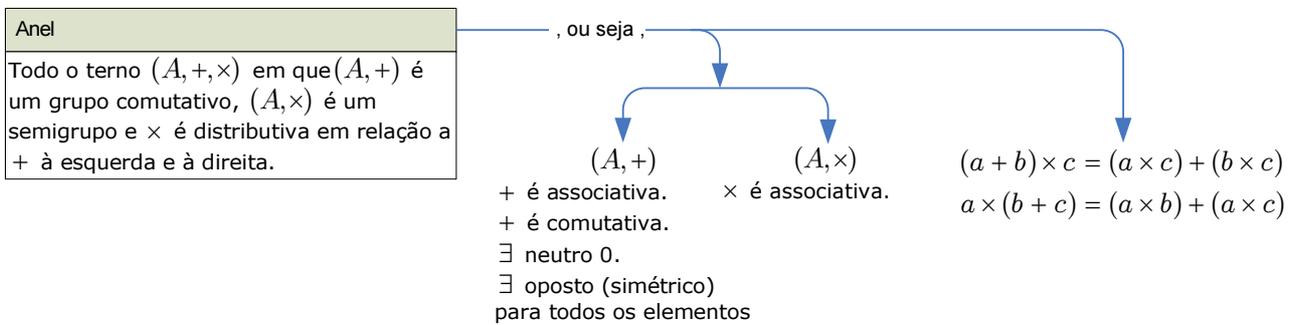
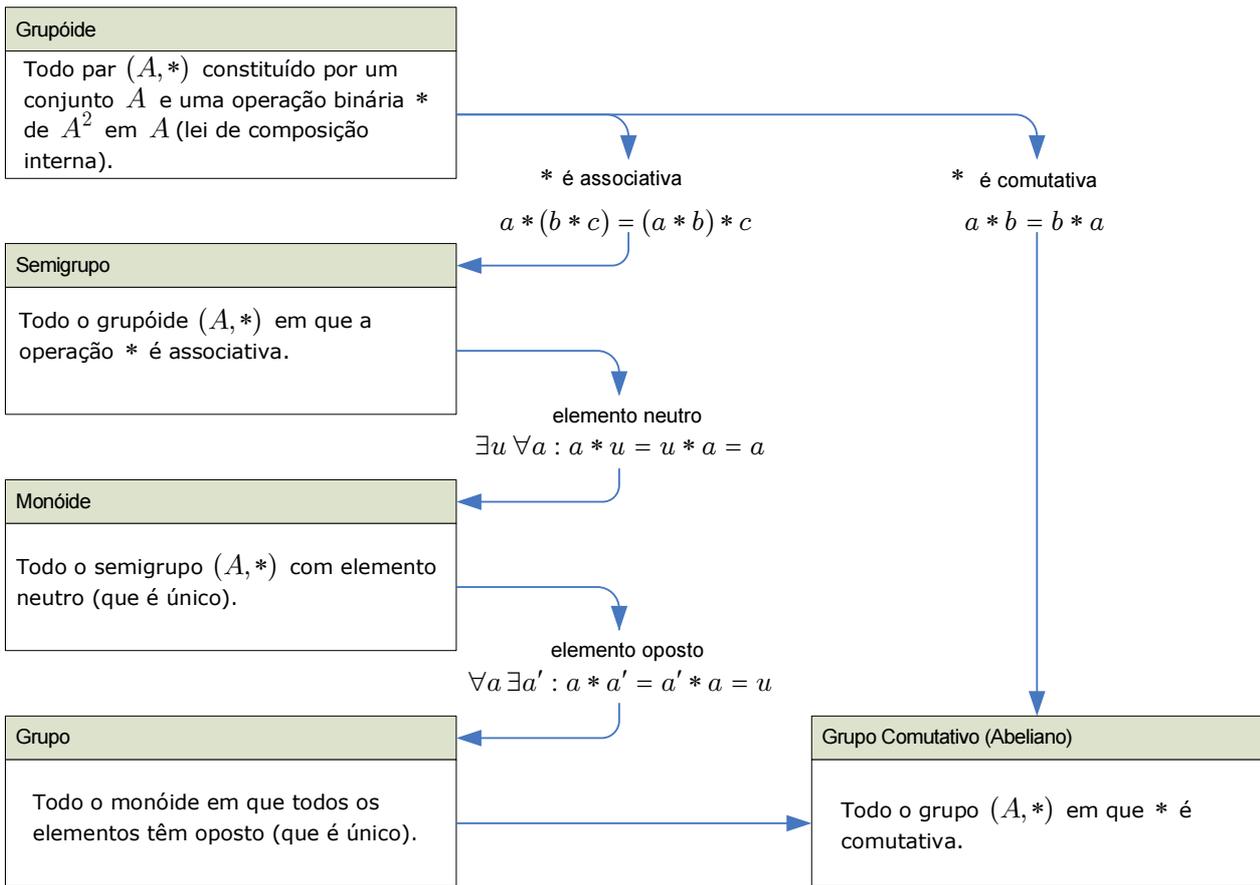
10. Espaços Vectoriais.

10.1. Estruturas Algébricas.

Na generalidade, uma estrutura algébrica é constituída por um ou mais conjuntos (suportes da estrutura), munidos de uma ou mais operações (leis de composição interna ou externa, operações unárias, etc.) envolvendo elementos daquele(s) conjuntos e satisfazendo certas propriedades formais.

Caso não exista ambiguidade, pode identificar-se um dos conjuntos suporte com a estrutura algébrica. Por exemplo, o corpo $(\mathbb{R}, +, \times)$ refere-se, geralmente, apenas como o corpo \mathbb{R} (o corpo dos reais).

Algumas estruturas algébricas envolvem mais de um conjunto. Por exemplo, um espaço vectorial tem inerentes dois conjuntos: um conjunto de vectores e outro de escalares (um corpo), uma lei de composição interna (adição vectorial) e outra externa (multiplicação de escalar por vector).



10.2. Espaço Vectorial.

Seja \mathbb{E} um conjunto de elementos $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots, \mathbf{w}$, chamados **vectores**, e \mathbb{K} um corpo, de elementos $\alpha, \beta, \dots, \gamma$, chamados **escalares**. Diz-se que \mathbb{E} é um **espaço vectorial** (ou **espaço linear**) sobre o corpo \mathbb{K} sse:

a. estiver definida em \mathbb{E} a operação *adição vectorial*, $+$, que a $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$ e a $\mathbf{v} \in \mathbb{E}$ associa o elemento $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{E}$, tal que $(\mathbb{E}, +)$ é um grupo comutativo, ou seja, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{E}$:

a1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ ($+$ é associativa)

a2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ ($+$ é comutativa)

a3. $\exists_1 \mathbf{0} \in \mathbb{E} : (\mathbf{u} + \mathbf{0}) = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ (elemento neutro de $+$, designado por *zero*)

a4. $\forall \mathbf{u} \exists_1 -\mathbf{u} \in \mathbb{E} : \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ (elemento oposto de \mathbf{u} para a operação $+$, designado por *simétrico* de \mathbf{u})

m. estiver definida a operação *multiplicação de escalar por vector*, \times , que a $\alpha \in \mathbb{K}$ e a $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$ associa o elemento $\alpha \times \mathbf{u} \in \mathbb{E}$ (ou, simplesmente $\alpha \mathbf{u}$), que verifica:

m1. $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}$ (\times é distributiva em relação à adição dos elementos de \mathbb{E})

m2. $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{u}$ (\times é distributiva em relação à adição de elementos de \mathbb{K})

m3. $\alpha(\beta \mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$ (associatividade mista)

m4. $1 \mathbf{u} = \mathbf{u}$ (elemento neutro de \times à esquerda)

A operação binária $+$ de \mathbb{E}^2 em \mathbb{E} designa-se por **adição vectorial**, e a operação binária \times de $\mathbb{E} \times \mathbb{K}$ em \mathbb{E} designa-se por **multiplicação de escalar por vector**.

Saliente-se que um espaço vectorial é fechado relativamente à adição vectorial.

Quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ diz-se que \mathbb{E} é um espaço vectorial real, e quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ diz-se que \mathbb{E} é um espaço vectorial complexo.

Exemplos

1. São exemplos de espaços vectoriais (ou seja, pode demonstrar-se que verificam as 8 propriedades acima enunciadas) os seguintes conjuntos, com a definição habitual de adição entre os seus elementos, e de multiplicação dos seus elementos por um escalar do corpo \mathbb{K} indicado:

- O conjunto \mathbb{R}^n , como temos vindo a considerar até aqui, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
- O conjunto dos segmento orientados, que apropriadamente designámos por vectores, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
- O conjunto \mathbb{C}^n , com $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (e também com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

10.3. Combinação Linear.

Seja \mathbb{E} um espaço vectorial sobre um corpo \mathbb{K} . Diz-se que um vector $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$ é **combinação linear** dos vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{E}$, se existirem escalares $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{K}$, designados por **coeficientes da combinação linear**, tais que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \dots + k_n\mathbf{u}_n \\ &= \sum_{i=1}^n k_i\mathbf{u}_i \end{aligned}$$

Exemplos

2. O vector de \mathbb{R}^4 , $\mathbf{u} = (1, -2, -3, 4)$ é combinação linear dos vectores $\mathbf{u}_1 = (2, 0, -1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 0, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 0, -1, 2)$ e $\mathbf{u}_4 = (2, 0, 0, -1)$, dado que existem escalares, $k_1 = 2, k_2 = -1, k_3 = 1, k_4 = -2$, tais que

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^4 k_i\mathbf{u}_i$$

Com efeito

$$\begin{aligned} k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 + k_4\mathbf{u}_4 &= 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 - 2\mathbf{u}_4 \\ &= 2 \times (2, 0, -1, 0) - (-1, 2, 0, 0) + (0, 0, -1, 2) - 2(2, 0, 0, -1) \\ &= (4, 0, -2, 0) + (1, -2, 0, 0) + (0, 0, -1, 2) + (-4, 0, 0, 2) \\ &= (1, -2, -3, 4) = \mathbf{u} \end{aligned}$$

10.4. Independência linear.

O conjunto de vectores $\mathbb{V} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset \mathbb{E}$, diz-se **linearmente independente** sse a equação

$$k_1 \mathbf{u}_1 + k_2 \mathbf{u}_2 + \dots + k_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

só possui a solução trivial

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$$

Ou, o que é equivalente, nenhum dos vectores pode ser expresso como combinação linear dos restantes. Caso contrário, isto é, se a equação possui uma solução não trivial, dizemos que os vectores de \mathbb{V} são **linearmente dependentes**. Equivalentemente, \mathbb{V} é linearmente dependente sse um dos seus elementos é combinação linear dos restantes.

Exemplos

3. O conjunto de vectores $\mathbb{V} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$, com $\mathbf{u}_1 = (2, 0, -1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 0, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 0, -1, 2)$ e $\mathbf{u}_4 = (2, 0, 0, -1)$, é linearmente independente dado que

$$\begin{aligned} k_1 \mathbf{u}_1 + k_2 \mathbf{u}_2 + k_3 \mathbf{u}_3 + k_4 \mathbf{u}_4 &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow k_1(2, 0, -1, 0) + k_2(-1, 2, 0, 0) + k_3(0, 0, -1, 2) + k_4(2, 0, 0, -1) &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow (2k_1, 0, -k_1, 0) + (-k_2, 2k_2, 0, 0) + (0, 0, -k_3, 2k_3) + (2k_4, 0, 0, -k_4) &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow (2k_1 - k_2 + 2k_4, 2k_2, -k_1 - k_3, 2k_3 - k_4) &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow 2k_1 - k_2 + 2k_4 = 0 \wedge 2k_2 = 0 \wedge -k_1 - k_3 = 0 \wedge 2k_3 - k_4 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema podemos verificar que só existe a solução trivial $k_1 = 0 \wedge k_2 = 0 \wedge k_3 = 0 \wedge k_4 = 0$.