

AULA 11

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Subespaço.

Subespaço gerado.

Base e dimensão.

Mudança de base.

11. Subespaço, Base e Dimensão.

11.1. Subespaço .

Seja \mathbb{E} um espaço vectorial sobre um corpo \mathbb{K} . Qualquer conjunto não vazio $\mathbb{W} \subset \mathbb{E}$ que seja fechado relativamente à soma vectorial e ao produto escalar designa-se por subespaço vectorial de \mathbb{E} . Ou seja:

Se \mathbb{W} é um subconjunto não vazio de um espaço vectorial \mathbb{E} sobre um corpo \mathbb{K} , dizemos que \mathbb{W} é um **subespaço** de \mathbb{E} se:

1. $\forall \mathbf{u}$ e \mathbf{v} pertencentes a \mathbb{W} , $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ pertence a \mathbb{W} .
2. $\forall \mathbf{u}$ pertencente a \mathbb{W} e $\forall k \in \mathbb{K}$, $k\mathbf{u}$ pertence a \mathbb{W} .

Saliente-se que o fecho relativamente ao produto escalar implica que todos os subespaços contêm o vector nulo (basta considerar $k = 0$ em 2.).

Exemplos

1. Num espaço vectorial \mathbb{E} sobre um corpo \mathbb{K} , $\{\mathbf{0}\}$ e \mathbb{E} são subespaços vectoriais (designados por *subespaços triviais*).
2. O conjunto dos inteiros, \mathbb{Z} , não é um espaço vectorial sobre \mathbb{R} , dado que não é fechado para a multiplicação escalar: o produto de qualquer escalar não inteiro por um inteiro não é um inteiro.
3. \mathbb{R}^2 não é um subespaço de \mathbb{R}^3 , dado que \mathbb{R}^2 é um conjunto de pares ordenados, e portanto não é um subconjunto de \mathbb{R}^3 , que é o conjunto de ternos ordenados de números reais. No entanto, o plano $\mathbb{W} = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de \mathbb{R}^3 .

11.2. Subespaço gerado.

Se \mathbb{W} é um subespaço de um espaço vectorial \mathbb{E} , dizemos que os vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{W}$ **geram** \mathbb{W} , ou que $\mathbb{V} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ é um **conjunto de geradores** de \mathbb{W} , se qualquer vector de \mathbb{W} é combinação linear de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$. Dizemos que \mathbb{W} é o **subespaço gerado** por $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ e escrevemos $\mathbb{W} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ ou $\mathbb{W} = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$.

Ou seja, o conjunto de todas as combinações lineares de um conjunto de vectores $\mathbb{V} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset \mathbb{E}$ é um subespaço vectorial de \mathbb{E} designado por **subespaço gerado** por \mathbb{V} .

Exemplos

4. Em \mathbb{R}^4 , o subespaço gerado pelo conjunto de vectores $\mathbb{V} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$, com $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$ e $\mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$ é coincidente com \mathbb{R}^4 . Escrevendo um qualquer vector $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ como combinação linear de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ e \mathbf{e}_4 , temos

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + k_3\mathbf{e}_3 + k_4\mathbf{e}_4$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}$$

A resolução do sistema é imediata, dado que a matriz já está na forma escalonada reduzida. Concluimos que o sistema é possível e determinado para quaisquer valores de x_1, x_2, x_3 e x_4 . Assim, o subespaço gerado por $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ e \mathbf{e}_4 é constituído por todos os vectores $\mathbf{u} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ sem restrições, ou seja, é coincidente com \mathbb{R}^4

$$\mathbb{W} = L((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)) = \mathbb{R}^4$$

11.3. Base e dimensão.

Se \mathbb{W} é um subespaço vectorial de \mathbb{E} , dizemos que o conjunto de vectores $\mathbb{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{W}$ é uma **base** de \mathbb{W} se:

1. \mathbb{U} é um conjunto de geradores de \mathbb{W}
2. \mathbb{U} é linearmente independente.

Se \mathbb{W} é um subespaço vectorial de \mathbb{E} e $\mathbb{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{W}$ é uma base de \mathbb{W} , prova-se que todas as bases de \mathbb{W} têm o mesmo número k de elementos. A **dimensão** de \mathbb{W} , $\dim(\mathbb{W})$, é o número k de elementos de uma qualquer base de \mathbb{W} .

Se $\dim(\mathbb{W}) = k$, qualquer conjunto de k vectores linearmente independentes pertencentes a \mathbb{W} é uma base de \mathbb{W} , e qualquer conjunto de mais de k vectores de \mathbb{W} é linearmente dependente.

Um espaço vectorial pode ter um número infinito de vectores linearmente independentes (isto é, existem conjuntos linearmente independentes com tantos vectores quantos quisermos), como é o caso da maioria dos espaços de funções, dizendo-se então um **espaço de dimensão infinita**.

Exemplos

5. Para além de gerar \mathbb{R}^4 , o conjunto de vectores $\mathbb{V} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ é linearmente independente, dado que a equação $k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + k_3\mathbf{e}_3 + k_4\mathbf{e}_4 = \mathbf{0}$ só possui a solução trivial $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = \mathbf{0}$. Temos

$$k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + k_3\mathbf{e}_3 + k_4\mathbf{e}_4 = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistema é sempre possível, admitindo apenas a solução trivial $[k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, logo os vectores são linearmente independentes. Dado que geram \mathbb{R}^4 e são linearmente independentes, os vectores $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1,0)$ e $\mathbf{e}_4 = (0,0,0,1)$ são uma base de \mathbb{R}^4 . Todas as bases de \mathbb{R}^4 têm 4 vectores, ou seja, \mathbb{R}^4 tem dimensão 4, $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$. Qualquer conjunto de 4 vectores linearmente independentes pertencentes a \mathbb{R}^4 é uma base de \mathbb{R}^4 , e qualquer conjunto de mais de 4 vectores é linearmente dependente. Os vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ e \mathbf{e}_4 formam a base canónica de \mathbb{R}^4 .

6. Os vectores $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$, geram \mathbb{R}^2 e são linearmente independentes. Formam a base canónica de \mathbb{R}^2 . Os vectores $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ geram \mathbb{R}^3 e são linearmente independentes. Formam a base canónica de \mathbb{R}^3 . Os vectores $\mathbf{e}_1 = (1,0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1, \dots, 0)$, ..., $\mathbf{e}_n = (0,0, \dots, 1)$ geram \mathbb{R}^n e são linearmente independentes. Formam a base canónica de \mathbb{R}^n . Assim, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

11.4. Mudança de base.

Seja $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ e $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\}$ duas bases de um subespaço de \mathbb{E} , um qualquer vector do subespaço, \mathbf{v} , expresso na base \mathcal{U} e na base \mathcal{W} , respectivamente,

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \dots + a_k\mathbf{u}_k$$

e

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{w}_1 + b_2\mathbf{w}_2 + \dots + b_k\mathbf{w}_k$$

tem coordenadas únicas em cada uma das bases, $[v]_{\mathcal{U}} = [a_1, a_2, \dots, a_k]^T$ e $[v]_{\mathcal{W}} = [b_1, b_2, \dots, b_k]^T$ relacionadas por uma matriz quadrada invertível, $M_{k \times k}$, chamada **matriz de mudança de base**,

$$\begin{aligned} [v]_{\mathcal{U}} &= M_{\mathcal{W}\mathcal{U}} [v]_{\mathcal{W}} \\ [v]_{\mathcal{W}} &= M_{\mathcal{U}\mathcal{W}} [v]_{\mathcal{U}} = M_{\mathcal{W}\mathcal{U}}^{-1} [v]_{\mathcal{U}} \end{aligned}$$

A matriz de transição da base \mathcal{W} para a base \mathcal{U} é dada por

$$M_{\mathcal{W}\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} [w_1]_{\mathcal{U}} & [w_2]_{\mathcal{U}} & \dots & [w_k]_{\mathcal{U}} \end{bmatrix}$$

em que $[w_i]_{\mathcal{U}}$ é o vector coluna das coordenadas do vector \mathbf{w}_i na base \mathcal{U} .

Exemplos

7. Em \mathbb{R}^2 , consideremos a base canónica $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ e a base $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, com $\mathbf{w}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, e o vector $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$.

Consideremos o problema de, sendo conhecida a representação de \mathbf{v} na base \mathcal{W} , encontrar a representação de \mathbf{v} na base \mathcal{E}

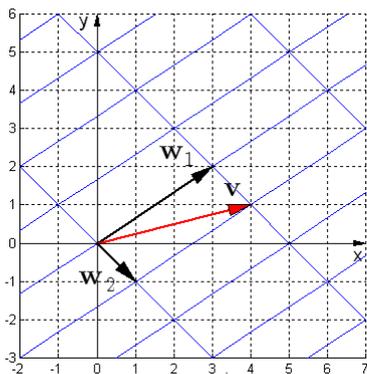


Figura 11.1

$$[v]_{\mathcal{W}} \rightarrow [v]_{\mathcal{E}}$$

Dado que

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_2 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

, que é a resposta procurada (como podemos verificar na figura).

De outro modo, poderíamos ter em atenção que, sendo

$$\mathbf{w}_1 = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{w}_2 = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

então

$$[\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2] = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \\ &= [\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Ou ainda, atendendo ao conceito de matriz de mudança de base, sendo conhecido $\mathbf{w}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, e $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, temos simplesmente

$$\begin{aligned} [v]_{\mathcal{E}} &= M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} [v]_{\mathcal{W}} \\ &= \begin{bmatrix} [w_1]_{\mathcal{E}} & [w_2]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} [v]_{\mathcal{W}} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$