

AULA 13

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Exercícios.

13. Exercícios.

DETERMINAR UMA BASE DE UM SUBESPAÇO.

13.1. Determinar uma base do subespaço de \mathbb{R}^4

$$\mathbb{W} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : (x - y + 2z = 0) \wedge (w - x - z = 0) \right\}$$

Uma vez que qualquer conjunto de k vectores linearmente independentes pertencentes a \mathbb{W} é uma base de \mathbb{W} , sendo k a dimensão do subespaço, a solução particular encontrada depende do método utilizado na sua determinação.

Dadas as restrições impostas, temos o sistemas de equações

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ w - x - z = 0 \end{cases}$$

Fazendo

$$\begin{cases} y = x + 2z \\ w = x + z \end{cases}$$

, o que corresponde a considerar x e z como variáveis livres, e y e w como variáveis principais, resulta que os vectores $\mathbf{u} = (x, y, z, w)$ pertencentes ao subespaço são da forma

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x + 2z \\ z \\ x + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2z \\ z \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ou seja, são uma combinação linear dos vectores $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 1)$ e $\mathbf{u}_2 = (0, 2, 1, 1)$. Dado que \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 são linearmente independentes fica assim determinada uma base de \mathbb{W} .

Se analisarmos formalmente o sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ w - x - z = 0 \end{cases}$$

, ou seja, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



```
>> A=[1 -1 2 0;-1 0 -1 1];
>> B=[0 0]';
>> rref([A B])
ans =
```

```
1 0 1 -1 0
0 1 -1 -1 0
```

, concluímos que o sistema é possível e indeterminado, sendo x e y variáveis principais e z e w variáveis livres, as soluções do sistema são da forma

$$\begin{cases} x = w - z \\ y = w + z \end{cases}$$

ou seja

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w - z \\ w + z \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ w \\ 0 \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z \\ z \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

são portanto uma combinação linear dos vectores $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 1)$ e $\mathbf{u}_3 = (-1, 1, 1, 0)$. Dado que \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_3 são linearmente independentes, fica assim determinada uma outra base de \mathbb{W} . Note-se que $\mathbf{u}_3 = -\mathbf{u}_2$. O subespaço \mathbb{W} tem dimensão 2; quaisquer 2 vectores linearmente independentes pertencentes \mathbb{W} são uma base de \mathbb{W} .

REPRESENTAR UM VECTOR EM BASES DIFERENTES.

13.2. Vimos num exemplo anterior que, em \mathbb{R}^2 , dadas a base canónica $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ e a base $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, com $\mathbf{w}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, sendo conhecida a representação de \mathbf{v} na base \mathcal{W} , $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, podemos encontrar a representação de \mathbf{v} na base \mathcal{E}

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$$

, atendendo ao conceito de matriz de transição,

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} &= M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} \\ &= \begin{bmatrix} [\mathbf{w}_1]_{\mathcal{E}} & [\mathbf{w}_2]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} [\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Caso fosse conhecida a representação de \mathbf{v} na base \mathcal{E} , $\mathbf{v} = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, e se pretendesse encontrar a representação de \mathbf{v} na base \mathcal{W}

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{W}}$$

, deveríamos ter em atenção que

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} = M_{\mathcal{W}\mathcal{E}}^{-1} [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$$

logo

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou seja $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$.

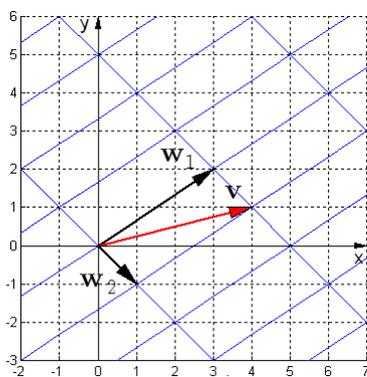


Figura 13.1

13.3. Em \mathbb{R}^2 , consideremos a base canónica $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, a base $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, com $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, e o vector $\mathbf{v} = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. Consideremos o problema de, sendo conhecida a representação de \mathbf{v} na base \mathcal{E} , encontrar a representação de \mathbf{v} na base \mathcal{U}

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{U}}$$

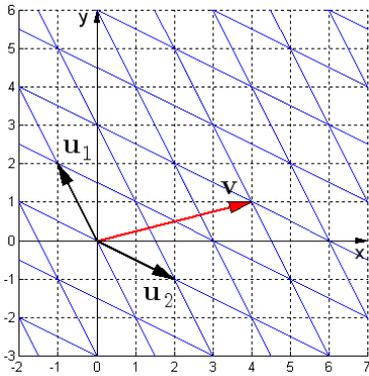


Figura 13.2

Sendo conhecida a matriz de transição da base \mathcal{U} para a base \mathcal{E}

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{U}\mathcal{E}} &= \begin{bmatrix} [u_1]_{\mathcal{E}} & [u_2]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

, e dado que

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{U}} = M_{\mathcal{U}\mathcal{E}}^{-1}$$

temos

$$[v]_{\mathcal{U}} = M_{\mathcal{U}\mathcal{E}}^{-1} [v]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

, ou seja, $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$.

13.4. Em \mathbb{R}^2 , consideremos a base $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, com $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, a base $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, com $\mathbf{w}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, e $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$. Pretendemos encontrar a representação de \mathbf{v} na base \mathcal{U}

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{U}}$$

Com os dados do problema, é fácil determinar as matrizes de transição das base \mathcal{W} e \mathcal{U} para a base canónica

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ M_{\mathcal{U}\mathcal{E}} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pelo que, considerando a representação intermédia de \mathbf{v} na base canónica

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{U}}$$

, sendo

$$[v]_{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} [v]_{\mathcal{W}}$$

e

$$[v]_{\mathcal{U}} = M_{\mathcal{E}\mathcal{U}} [v]_{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{U}\mathcal{E}}^{-1} [v]_{\mathcal{E}}$$

resulta

$$\begin{aligned} [v]_{\mathcal{U}} &= M_{\mathcal{U}}^{-1} M_{\mathcal{W}} [v]_{\mathcal{W}} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

, ou seja, $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$.



```
>> u1=[-1 2]';
>> u2=[2 -1]';
>> w1=[3 2]';
>> w2=[1 -1]';
>> Mwe=[w1 w2];
>> Mue=[u1 u2];
>> vw=[1 1]';
>> vu=inv(Mue)*Mwe*vw
vu =
    2.0000
    3.0000
```

MISCELÂNEA.

13.5. Para cada um dos conjuntos seguintes, averigue se são subespaços dos espaços vectoriais reais indicados.

a) $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 3\} \subset \mathbb{R}^2$

b) $\mathcal{B} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y - 2z = 0 \wedge 2x + z - 2w = 0\} \subset \mathbb{R}^4$

a) \mathcal{A} não é um subespaço de \mathbb{R}^2 . Basta verificar que $(0, 0)$ não pertence ao conjunto, dado que não verifica a condição, $2 \times 0 - 0 = 0 \neq 3$.

O conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 3$ constitui uma recta que não passa na origem. Qualquer recta que não passe na origem não constitui um subespaço vectorial de \mathbb{R}^2 .

b) Dadas as restrições impostas, temos o sistemas de equações

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x + z - 2w = 0 \end{cases}$$

Fazendo

$$\begin{cases} y = x - 2z \\ w = x + 1/2 z \end{cases}$$

, o que corresponde a considerar x e z como variáveis livres, e y e w como variáveis principais, resulta que os vectores $\mathbf{u} = (x, y, z, w)$ pertencentes ao, eventual, subespaço são da forma

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x - 2z \\ z \\ x + 1/2 z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2z \\ z \\ 1/2 z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Ou seja, constituem o subespaço resultante da combinação linear dos vectores de \mathbb{R}^4 , $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 1)$ e $\mathbf{u}_2 = (0, -2, 1, 1/2)$. \mathcal{B} é um subespaço de \mathbb{R}^4 de dimensão 2, constituindo \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 uma sua base.

13.6. Considere o subespaço de \mathbb{R}^4 definido por

$$\mathbb{W} = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z - w = 0 \right\}$$

e o conjunto $\mathcal{B} = \left\{ [1 \ 0 \ -1 \ -1]^T, [1 \ 0 \ 2 \ 0]^T, [1 \ 0 \ 0 \ 1]^T \right\}$ de vectores de \mathbb{R}^4 , e seja ainda $\mathbb{G} = L(\mathcal{B})$ o subespaço gerado por \mathcal{B} .

- Determine uma base e a dimensão de \mathbb{W} .
- Construa uma base de \mathbb{R}^4 que contenha a base de \mathbb{W} que indicou em a).
- Diga, justificando, se os vectores $\mathbf{u} = [2 \ 0 \ 3 \ -1]^T$ e $\mathbf{v} = [1 \ 1 \ 1 \ 0]^T$ pertencem a \mathbb{W} e, em caso afirmativo, determine as suas coordenadas em relação à base de \mathbb{W} que indicou na alínea anterior.
- Porque razão não pode ser \mathcal{B} uma base de \mathbb{R}^4 .
- Justifique se é \mathcal{B} linearmente independente.
- Indique uma base e a dimensão de \mathbb{G} e caracterize os vectores de \mathbb{G} por meio de uma condição nas suas coordenadas.
- Determine o subespaço $\mathbb{H} = \mathbb{G} \cap \mathbb{W}$, indicando uma base e a dimensão de \mathbb{H} .
- Será $\mathbb{G} \cup \mathbb{W}$ um subespaço de \mathbb{R}^4 ? Justifique a resposta.

a) Uma vez que qualquer conjunto de k vectores linearmente independentes pertencentes a \mathbb{W} é uma base de \mathbb{W} , sendo k a dimensão do subespaço, a solução particular encontrada depende do método utilizado na sua determinação.

Dado que apenas é imposta uma restrição podemos escolher quaisquer das 3 variáveis para variáveis livres. Por exemplo, fazendo:

$$\begin{aligned} x - y - z - w &= 0 \\ x &= y + z + w \end{aligned}$$

, ou seja, escolhendo x como variável principal, resulta que os vectores $\mathbf{u} = (x, y, z, w)$ pertencentes ao subespaço são da forma

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y+z+w \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ z \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ou seja, são uma combinação linear dos vectores $\mathbf{u}_1 = (1,1,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = (1,0,1,0)$ e $\mathbf{u}_3 = (1,0,0,1)$. Dado que \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 e \mathbf{u}_3 são linearmente independentes,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

, fica assim determinada uma base de \mathbb{W} que é portanto um subespaço de \mathbb{R}^4 de dimensão 3.

b) Basta juntar a \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 e \mathbf{u}_3 um vector \mathbf{u}_4 , da base canónica de \mathbb{R}^4 , de modo a que os 4 vectores sejam linearmente independentes. Como se pode ver a matriz escalonada acima não tem pivot na 3ª coluna. Escolhendo $\mathbf{u}_4 = (0,0,1,0)$ obtém-se a base de \mathbb{R}^4 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$.

c) Se os vectores $\mathbf{u} = [2 \ 0 \ 3 \ -1]^T$ e $\mathbf{v} = [1 \ 1 \ 1 \ 0]^T$ pertencem a \mathbb{W} podem ser escritos como combinação linear de uma sua base. Sendo a base constituída pelos vectores $\mathbf{u}_1 = (1,1,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = (1,0,1,0)$ e $\mathbf{u}_3 = (1,0,0,1)$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 + z\mathbf{u}_3 \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} &= x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Escalonando a matriz completa do sistema, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema é possível e determinado tendo como solução $x = 0$, $y = 3$ e $z = -1$. Portanto $\mathbf{u} = [2 \ 0 \ 3 \ -1]^T$ pertencem a \mathbb{W} , $\mathbf{u} = 0\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 - 1\mathbf{u}_3 = 3\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$, ou seja, $\mathbf{u} = [0 \ 3 \ -1]_{\mathcal{U}}^T$.

Procedendo de modo semelhante, temos para $\mathbf{v} = [1 \ 1 \ 1 \ 0]^T$

$$\mathbf{v} = x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 + z\mathbf{u}_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Escalonando a matriz completa do sistema, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O sistema é impossível, pelo que $\mathbf{v} \notin \mathbb{W}$.

d) \mathcal{B} não pode ser uma base de \mathbb{R}^4 dado que toda a base de \mathbb{R}^4 é constituída por 4 vectores e \mathcal{B} é constituído apenas por 3 vectores.

e) Dispondo os vectores de \mathcal{B} sobre as linhas de uma matriz e procedendo ao seu escalonamento, temos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

, pelo que \mathcal{B} é linearmente independente.

f) Sendo os 3 vectores de \mathcal{B} linearmente independentes constituem uma base do espaço \mathbb{G} por eles gerado que tem, portanto, dimensão 3. Podemos assim escolher para base de \mathbb{G} os vectores $\mathbf{u}_1 = [1 \ 0 \ -1 \ -1]$, $\mathbf{u}_2 = [1 \ 0 \ 2 \ 0]^T$ e $\mathbf{u}_3 = [1 \ 0 \ 0 \ 1]^T$.

Para caracterizar mais facilmente os vectores de \mathbb{G} por meio de uma condição nas suas coordenadas, podemos continuar o escalonamento da matriz \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, os vectores $\mathbf{u} = (x, y, z, w) \in \mathbb{G}$ são tais que

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Ficando assim determinada a condição:

$$\mathbb{G} = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y = 0 \}$$

Nota: O método de resolução acima é equivalente ao utilizado na aula 12. Teríamos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ -1 & 2 & 0 & z \\ -1 & 0 & 1 & w \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 3 & 1 & x+z \\ 0 & 0 & 5 & 2x-z+3w \\ 0 & 0 & 0 & y \end{bmatrix}$$

Para que o sistema seja possível, ou seja, qualquer vector de \mathbb{G} seja uma combinação linear de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, deverá ser $y = 0$, a mesma condição obtida acima.

g) O subespaço $\mathbb{H} = \mathbb{G} \cap \mathbb{W}$, tendo que verificar simultaneamente as condições a que cada um dos dois subespaço obedece, é

$$\mathbb{H} = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z + w = 0 \wedge y = 0 \right\}$$

Temos então que todos os vectores $\mathbf{u} = (x, y, z, w)$ pertencentes ao subespaço são da forma

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y + z + w \\ 0 \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z + w \\ 0 \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ z \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ou seja, são uma combinação linear dos vectores $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1, 0)$ e $\mathbf{u}_2 = (1, 0, 0, 1)$. Dado que $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ e \mathbf{u}_3 são linearmente independentes, fica assim determinada uma base de \mathbb{H} que é, portanto, um subespaço de \mathbb{R}^4 de dimensão 2.

h) $\mathbb{G} \cup \mathbb{W}$ só seria um subespaço de \mathbb{R}^4 se $\mathbb{G} \subset \mathbb{W}$ ou $\mathbb{G} \supset \mathbb{W}$, o que, como podemos concluir dos resultados obtidos na alínea g), não se verifica. Assim sendo, o espaço resultante da reunião não é fechado relativamente à adição vectorial, como podemos comprovar facilmente. Por exemplo, $\mathbf{u}_1 = (3, 1, 1, 1) \in \mathbb{W}$, dado que $x = y + z + w$, $\mathbf{u}_2 = (1, 0, 2, 2) \in \mathbb{G}$, dado que $y = 0$, e portanto $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{G} \cup \mathbb{W}$, mas $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = (4, 1, 3, 3) \notin \mathbb{G} \cup \mathbb{W}$, dado que não verifica nenhuma das condições.

13.7. Seja \mathbb{W} um espaço vectorial real e $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ uma base de \mathbb{W} . Diga, justificando, se cada uma dos conjuntos seguintes gera \mathbb{W} .

a) $\mathcal{C} = \{\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3\}$

b) $\mathcal{D} = \{2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3\}$

a) \mathbb{W} é um espaço de dimensão 3. \mathcal{C} , constituído por 3 vectores, $\mathbf{c}_1 = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$ e $\mathbf{c}_3 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3$, poderá gerar \mathbb{W} , se os 3 vectores forem linearmente independentes, e, se assim for, por serem em número igual à dimensão do espaço, $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ e \mathbf{c}_3 para além de gerar \mathbb{W} constituem uma sua base.

Temos:

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3 = [1 \ 2 \ -3]_{\mathcal{B}}^T$$

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 = [0 \ 1 \ -1]_{\mathcal{B}}^T$$

$$\mathbf{c}_3 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3 = [1 \ 0 \ -1]_{\mathcal{B}}^T$$

Para verificar se os vectores são linearmente independentes basta dispo-los sobre as linhas de uma matriz e escaloná-la

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os vectores \mathbf{c}_1 , \mathbf{c}_2 e \mathbf{c}_3 não são linearmente independentes, $\mathbf{c}_3 = \mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2$, logo não geram \mathbb{W} .

b) Procedendo de modo semelhante a a), temos

$$\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 = [2 \ -3 \ 0]_{\mathcal{B}}^T$$

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = [1 \ -2 \ 1]_{\mathcal{B}}^T$$

$$\mathbf{c}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 = [1 \ 1 \ -1]_{\mathcal{B}}^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Neste caso os vectores \mathbf{c}_1 , \mathbf{c}_2 e \mathbf{c}_3 são linearmente independentes, logo geram \mathbb{W} constituindo uma sua base.

O enunciado dá-nos os vectores \mathbf{c} escritos na base \mathcal{B} . Constituindo \mathcal{C} uma base de \mathbb{W} é imediato escrever a matriz de mudança de base da base \mathcal{C} para a base \mathcal{B} :

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{CB}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$$

Por exemplo, o vector \mathbf{c}_1 escrito na base \mathcal{C} é

$$\mathbf{c}_1 = 1\mathbf{c}_1 + 0\mathbf{c}_2 + 0\mathbf{c}_3 = [1 \ 0 \ 0]_{\mathcal{C}}^T$$

, resultando na base \mathcal{B}

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{CB}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{C}}$$

, ou seja, $\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2$.

13.8. Sejam \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3 e \mathbf{u}_4 vectores de um espaço vectorial real \mathbb{W} tais que

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{o} \wedge \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 = \mathbf{o} \wedge -\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 = \mathbf{o} \wedge \mathbf{u}_4 \notin L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$$

Indique, justificando, uma base e a dimensão do subespaço $\mathbb{G} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) \subset \mathbb{W}$ gerado pelos quatro vectores.

Os vectores \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 são linearmente dependentes:

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{u}_1$$

, tal como os vectores \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_3 :

$$\mathbf{u}_3 = -\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 = -\mathbf{u}_1 - \frac{3}{2}\mathbf{u}_1 = -\frac{5}{2}\mathbf{u}_1$$

Todos eles geram o mesmo espaço, um espaço de dimensão 1. Dado que \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_4 são linearmente independentes então $\mathbb{G} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4)$, ou seja, \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_4 constituem uma base de \mathbb{G} que é um espaço de dimensão 2.

13.9. Considere o subespaço de \mathbb{R}^3 definido por

$$\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + y + z = 0\}$$

e o conjunto $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T \right\}$ de vectores de \mathbb{R}^3 , e seja ainda $\mathbb{G} = L(\mathcal{B})$ o subespaço gerado por \mathcal{B} .

- Determine uma base e a dimensão de \mathbb{W} .
- Diga, justificando, se os vectores $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}^T$ pertencem a \mathbb{W} e, em caso afirmativo, determine as suas coordenadas em relação à base de \mathbb{W} que indicou na alínea anterior.
- Construa uma base de \mathbb{R}^3 que contenha a base de \mathbb{W} que indicou em a).
- Indique uma base e a dimensão de \mathbb{G} e caracterize os vectores de \mathbb{G} por meio de uma condição nas suas coordenadas.
- Será $\mathbb{G} \cup \mathbb{W}$ um subespaço de \mathbb{R}^3 ? Justifique a resposta.

a) Uma vez que qualquer conjunto de k vectores linearmente independentes pertencentes a \mathbb{W} é uma base de \mathbb{W} , sendo k a dimensão do subespaço, a solução particular encontrada depende do método utilizado na sua determinação.

Dado que apenas é imposta uma restrição podemos escolher quaisquer das 3 variáveis para variáveis livres. Por exemplo, fazendo:

$$\begin{aligned} -2x + y + z &= 0 \\ y &= 2x - z \end{aligned}$$

, ou seja, escolhendo y como variável principal, resulta que os vectores $\mathbf{u} = (x, y, z)$ pertencentes ao subespaço são da forma

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x - z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ou seja, são uma combinação linear dos vectores $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, -1, 1)$. Dado que \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 são linearmente independentes,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

, fica assim determinada uma base de \mathbb{W} que é portanto um subespaço de \mathbb{R}^3 de dimensão 2.

b) Se os vectores $\mathbf{u} = [3 \ 2 \ 4]^T$ e $\mathbf{v} = [1 \ -1 \ 4]^T$ pertencem a \mathbb{W} podem ser escritos como combinação linear de uma sua base. Sendo a base constituída pelos vectores $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, -1, 1)$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} &= x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Escalonando a matriz completa do sistema, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema é possível e determinado tendo como solução $x = 3$ e $y = 4$. Portanto $\mathbf{u} = [3 \ 2 \ 4]^T$ pertence a \mathbb{W} , $\mathbf{u} = 3\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2$, ou seja, $\mathbf{u} = [3 \ 4]_{\mathcal{U}}^T$.

Procedendo de modo semelhante, temos para $\mathbf{v} = [1 \ -1 \ 4]^T$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Escalonando a matriz completa do sistema, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O sistema é impossível, pelo que $\mathbf{v} \notin \mathbb{W}$.

c) Basta juntar a \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 um vector \mathbf{u}_3 da base canónica de \mathbb{R}^3 de modo a que os 3 vectores \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 e \mathbf{u}_3 sejam linearmente independentes. Por exemplo, $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$, como se pode ver por observação da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

acima, que não tem pivot na 3ª coluna, não é combinação linear de \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 , constituindo assim os 3 vectores uma base de \mathbb{R}^3 .

d) Dispondo os vectores de \mathcal{B} sobre as linhas de uma matriz e procedendo ao seu escalonamento, temos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, pelo que \mathcal{B} não é linear independente. O vector $\mathbf{u}_4 = (1, 0, 2)$ constitui uma base do espaço \mathbb{G} por eles gerado que tem, portanto, dimensão 1.

Vamos agora caracterizar os vectores de \mathbb{G} por meio de uma condição nas suas coordenadas. Temos que os vectores $\mathbf{u} = (x, y, z) \in \mathbb{G}$ são tais que

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 2k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 2x \end{bmatrix}$$

Ficando assim determinadas as condições:

$$\mathbb{G} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0 \wedge z = 2x \right\}$$

h) $\mathbb{G} \cup \mathbb{W}$ só será um subespaço de \mathbb{R}^3 se $\mathbb{G} \subset \mathbb{W}$ ou $\mathbb{G} \supset \mathbb{W}$. Sendo

$$\mathbb{W} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + y + z = 0 \right\}$$

$$\mathbb{G} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0 \wedge z = 2x \right\}$$

temos que, para $y = 0$, a condição $-2x + y + z = 0$ resulta em $-2x + z = 0 \Leftrightarrow z = 2x$, ou seja, $\mathbb{G} \subset \mathbb{W}$. Assim sendo, $\mathbb{G} \cup \mathbb{W}$ é um subespaço de \mathbb{R}^3

13.10. Em \mathbb{R}^3 , considere as bases $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, com $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ e $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, com $\mathbf{w}_1 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{w}_3 = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3$. Sendo $\mathbf{v} = -4\mathbf{w}_1 + 4\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3$ determine a representação de \mathbf{v} na base \mathcal{U} .

Pretendemos encontrar a representação de \mathbf{v} na base \mathcal{U}

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{U}}$$

Com os dados do problema, é fácil determinar as matrizes de transição das bases \mathcal{W} e \mathcal{U} para a base canónica. Sendo $\mathbf{w}_1 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{w}_3 = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3$ temos

$$M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Sendo $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ temos

$$M_{\mathcal{U}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pelo que, considerando a representação intermédia de \mathbf{v} na base canónica

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{U}}$$

, sendo

$$[v]_{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} [v]_{\mathcal{W}}$$

e

$$[v]_{\mathcal{U}} = M_{\mathcal{E}\mathcal{U}} [v]_{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{U}\mathcal{E}}^{-1} [v]_{\mathcal{E}}$$

resulta

$$[v]_{\mathcal{U}} = M_{\mathcal{U}\mathcal{E}}^{-1} M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} [v]_{\mathcal{W}}$$

, ou ainda, multiplicando à esquerda por $M_{\mathcal{U}\mathcal{E}}$,

$$M_{\mathcal{U}\mathcal{E}} [v]_{\mathcal{U}} = M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} [v]_{\mathcal{W}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} [v]_{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Escalonando a matriz completa do sistema, resulta

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Pelo que

$$[v]_{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}_{\mathcal{U}}^T = 4\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3$$