

# AULA 15

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

## TÓPICOS

Projectção ortogonal.

Base ortogonal e base ortonormada.

Produto externo de vectores em  $\mathbb{R}^3$ .

Produto misto de vectores em  $\mathbb{R}^3$ .

## 15. Projectção ortogonal.

### 15.1. Projectção ortogonal.

Sejam  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  (não nulo) dois vectores de  $\mathbb{R}^n$ . Podemos sempre decompor o vector  $\mathbf{u}$  na soma de dois vectores,  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$ ,

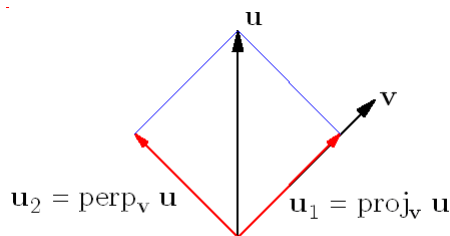


Figura 15.1

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

, tendo  $\mathbf{u}_1$  a direcção de  $\mathbf{v}$  e sendo  $\mathbf{u}_2$  ortogonal a  $\mathbf{v}$ . O vector  $\mathbf{u}_1$  é chamado **projectção ortogonal de  $\mathbf{u}$  sobre  $\mathbf{v}$** ,  $\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$ , sendo

$$\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$$

, e sendo a componente ortogonal (ou perpendicular de  $\mathbf{u}$  sobre  $\mathbf{v}$ )

$$\text{perp}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$$

Se  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r \in \mathbb{R}^n$  são vectores ortogonais não nulos, isto é, tais que  $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$  para  $i \neq j$ , então o conjunto  $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r\}$  é linearmente independente. Para todo o vector  $\mathbf{u}$  que pertença ao subespaço gerado  $S$ , ou seja, tal que  $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^r k_i \mathbf{u}_i$ , temos

$$k_i = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|^2} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i}$$

, donde,

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^r k_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^r \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i} \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^r \text{proj}_{\mathbf{u}_i} \mathbf{u}$$

### Exemplos

1. Dados os vectores  $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ , a projecção ortogonal de  $\mathbf{u}$  sobre  $\mathbf{v}$  é

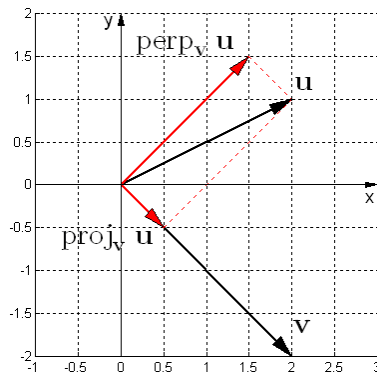


Figura 15.2

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \\ &= \frac{(2 \times 2) + (1 \times (-2))}{(2 \times 2) + ((-2) \times (-2))} (2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) \\ &= \frac{2}{8} (2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) \\ &= 0.5\mathbf{e}_1 - 0.5\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

, sendo a componente perpendicular

$$\begin{aligned} \text{perp}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 \\ &= 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - (0.5\mathbf{e}_1 + 0.5\mathbf{e}_2) \\ &= 1.5\mathbf{e}_1 + 1.5\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$



```
>> u=[2 1]';
>> v=[2 -2]';
>> u1=(u'*v)/(v'*v)*v
u1 =
    0.5000
   -0.5000
>> u2=u-u1
u2 =
    1.5000
    1.5000
```

2. A projecção ortogonal do vector  $\mathbf{u} = (3, -3, 4, -4)$  sobre o vector  $\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0, -2)$  é

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 \\ &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 \\ &= \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1} \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u} = \frac{\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{0 - 3 + 0 + 8}{0 + 1 + 0 + 4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

O vector  $\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u}$  é ortogonal a  $\mathbf{u}_1$ . Temos

$$\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}_1 &= (\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u})^T \mathbf{u}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= 0 - 4 + 0 + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$



```
>> u=[3 -3 4 -4]';
>> u1=[0 1 0 -2]';
>> proju1=(u'*u1)/(u1'*u1)*u1
proju1 =
     0
     1
     0
    -2
>> (u-proju1) '*u1
ans =
     0
```

## 15.2. Base ortogonal e base ortonormada.

Se  $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$  é uma base dum subespaço de  $\mathbb{R}^n$ , dizemos que  $S$  é uma **base ortogonal** se  $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$  para  $i \neq j$ , ou seja, se os vectores da base são ortogonais.

Sendo  $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$  uma base dum subespaço de  $\mathbb{R}^n$ , dizemos que  $S$  é uma **base ortonormada** se, para além de ser uma base ortogonal,  $\|\mathbf{u}_i\| = 1$  para  $i = 1, \dots, k$  (isto é, todos os vectores de  $S$  são unitários).

### Exemplos

3. A base canónica de  $\mathbb{R}^4$   $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ , com  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$  e  $\mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$ , é uma base ortonormada, dado que todos os vectores da base têm norma um e são ortogonais

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^T \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T \\ \mathbf{e}_4^T \end{bmatrix} [\mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \mathbf{e}_3 \mid \mathbf{e}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_3^T \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3^T \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3^T \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_3^T \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_4^T \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_4^T \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_4^T \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4^T \mathbf{e}_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \|\mathbf{e}_1\|^2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \|\mathbf{e}_2\|^2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 & \|\mathbf{e}_3\|^2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4 & \|\mathbf{e}_4\|^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. Os vectores  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$  geram  $\mathbb{R}^n$ , são linearmente independentes, unitários e ortogonais. Logo, a base canónica  $\mathbb{R}^n$  é uma base ortonormada do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ .

### 15.3. Produto externo de vectores em $\mathbb{R}^3$ .

O **produto externo** (ou produto vectorial) de dois vectores,  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ , é um vector com as seguintes características:

Se  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  ou  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são não nulos:

1. Tem módulo

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin(\alpha)$$

, sendo  $\alpha$  o ângulo formado pelos dois vectores.

2. Tem direcção perpendicular a  $\mathbf{u}$  e a  $\mathbf{v}$ .

3. Tem sentido dado pela regra da mão direita (ou do saca rolhas).

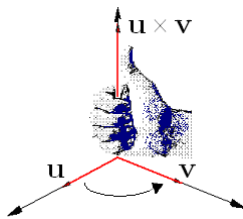


Figura 15.3

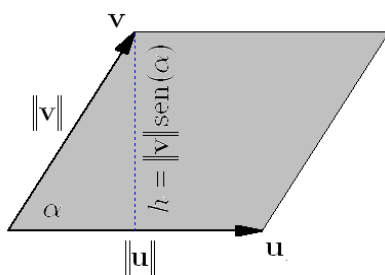


Figura 15.4

#### Propriedades do produto externo

1.  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$
2.  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{u} = k\mathbf{v}$  ou  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  ou  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
3.  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$
4.  $\alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\alpha\mathbf{v})$
5.  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$
6.  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$
7.  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$

Dados dois vectores em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$  e  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ , o produto externo entre eles pode ser calculado através do determinante simbólico

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix} \mathbf{e}_1 + \det \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{bmatrix} \mathbf{e}_2 + \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \mathbf{e}_3 \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{e}_1 + (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

A norma de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ,

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin(\alpha)$$

, é numericamente igual à área do paralelogramo determinado por  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  (ver figura 16.4).

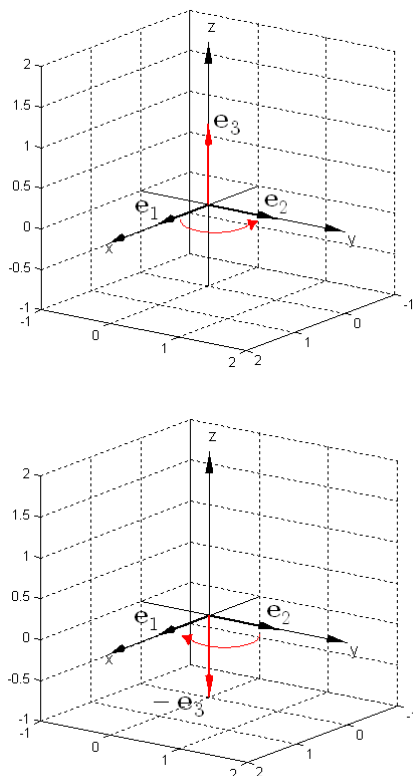


Figura 15.5

## Exemplos

5. O produto externo entre os versores  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ , é

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

O produto externo entre os versores  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_1$ , é

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -\mathbf{e}_3\end{aligned}$$



O produto externo pode ser calculado através da função **cross(u,v)**.

```
>> e1=[1 0 0]';
>> e2=[0 1 0]';
>> cross(e1,e2)
ans =
    0
    0
    1
```

## \*\*15.4. Produto misto de vectores em $\mathbb{R}^3$ .

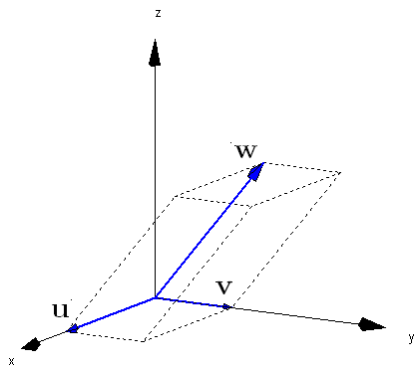


Figura 15.6

Dados três vectores em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ , e  $\mathbf{w} = w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2 + w_3\mathbf{e}_3$  o **produto misto**  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$  pode ser calculado através do determinante

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

O volume de um paralelepípedo determinado por três vectores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ , é numericamente igual ao valor absoluto do produto misto destes vectores,  $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$ .

### Exemplo

6. O produto externo entre os vectores  $\mathbf{u} = 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$  e  $\mathbf{v} = 0\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 1\mathbf{e}_3$ , é

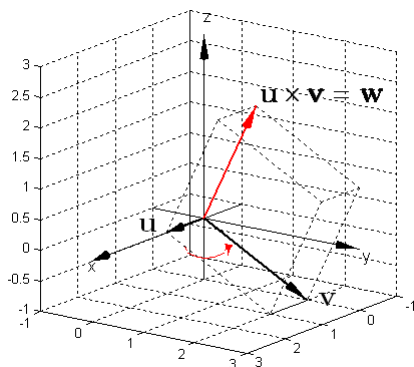


Figura 15.7

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

$$\begin{aligned} &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

O volume do paralelepípedo determinado por  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ , é

$$\begin{aligned} V &= \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \\ &= 5 \end{aligned}$$



```
>> u=[1 0 0]';
>> v=[0 2 -1]';
>> w=cross(u,v)

w =

     0
     1
     2

>> u'*cross(v,w)
ans =

     5
```