

AULA 19

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Transformação linear.

Classificação de transformações lineares.

Matriz de uma transformação linear e mudança de base.

Imagem e núcleo de uma transformação linear.

Operações com transformações lineares.

19. Transformações lineares.

19.1. Transformação linear.

1. Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{E}'$ espaços vectoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma função $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ é uma **transformação** (aplicação, função) **linear** se:

$$1. T(\alpha \mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$$

$$2. T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

, ou, equivalentemente,

$$T(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v})$$

, para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

2. Resulta imediatamente da definição que

$$T(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}) = \mathbf{0}_{\mathbb{E}'}$$

, ou seja, a imagem do vector nulo de $\mathbb{E}$ é o vector nulo de $\mathbb{E}'$. Com efeito

$$T(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}) = T(0 \mathbf{0}_{\mathbb{E}}) = 0 T(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}) = \mathbf{0}_{\mathbb{E}'}$$

3. Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{E}'$ espaços vectoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$, $\mathbb{E}$ com dimensão finita, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ uma base de $\mathbb{E}$, e $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ quaisquer n vectores de $\mathbb{E}'$. Então existe uma e só uma transformação linear $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ tal que

$$T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{u}_i \quad , \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Quer isto dizer que uma aplicação linear T , cujo domínio é um espaço vectorial $\mathbb{E}$, de dimensão finita, fica perfeitamente definida quando se conhecem as imagens dos vectores de uma qualquer base do domínio.

Mais ainda, se $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ é uma base de $\mathbb{E}$ e

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \dots + v_n\mathbf{e}_n \in \mathbb{E}$$

então

$$T(\mathbf{v}) = v_1T(\mathbf{e}_1) + v_2T(\mathbf{e}_2) + \dots + v_nT(\mathbf{e}_n)$$

19.2. Classificação de transformações lineares.

Como qualquer aplicação, as transformações lineares podem ser classificadas quanto à injectividade, sobrejectividade. Porque são aplicações especiais, uma vez que preservam as operações definidas nos espaços vectoriais, por isso também designadas em Álgebra por **morfismos** de espaços vectoriais, existem termos específicos para indicar qual ou quais as propriedades de que gozam. Concretamente:

1. Se $\mathbb{E}' = \mathbb{E}$, ou seja, $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$, T diz-se um **endomorfismo** em $\mathbb{E}$. (gr. endo: no interior de).
2. Se T é injectiva, T diz-se um **monomorfismo** de $\mathbb{E}$ em $\mathbb{E}'$. (gr. mono: único).
3. Se T é sobrejectiva, T diz-se um **epimorfismo** de $\mathbb{E}$ em $\mathbb{E}'$. (gr. epi: sobre).
4. Se T é bijectiva, T diz-se um **isomorfismo** de $\mathbb{E}$ em $\mathbb{E}'$. (gr. iso: igual).
5. Se $\mathbb{E}' = \mathbb{E}$ e T é bijectiva, T diz-se um **automorfismo** em $\mathbb{E}$. (gr. auto: em si mesmo).

19.3. Matriz de uma transformação linear.

Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{E}'$ espaços vectoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$, com dimensões n e m , respectivamente. Sejam $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ uma base de $\mathbb{E}$ e $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$ uma base de $\mathbb{E}'$. Uma vez fixadas as duas bases, uma no domínio outra no espaço de chegada, tem-se que:

1. A qualquer transformação linear $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ corresponde uma e uma só matriz $\mathbf{A}$ do tipo $m \times n$, e vice-versa.

2. A matriz $\mathbf{A}$ correspondente à transformação T , dita **matriz da transformação (relativa às bases escolhidas)**, tem por colunas as coordenadas das imagens dos vectores da base de $\mathbb{E}$ relativamente à base de $\mathbb{E}'$. Ou seja, sendo

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + \dots + a_{m1}\mathbf{u}_m \\ T(\mathbf{e}_2) &= a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + \dots + a_{m2}\mathbf{u}_m \\ &\dots \\ T(\mathbf{e}_n) &= a_{1n}\mathbf{u}_1 + a_{2n}\mathbf{u}_2 + \dots + a_{mn}\mathbf{u}_m \end{aligned}$$

, temos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

3. Sendo $\mathbf{y} = y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2 + \dots + y_m\mathbf{u}_m$ o vector de $\mathbb{E}'$ que é o transformado de um vector $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$ de $\mathbb{E}$, $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$ equivale a $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{y}]_{\mathcal{B}'} = \left[T(\mathbf{e}_1)_{\mathcal{B}'} \mid T(\mathbf{e}_2)_{\mathcal{B}'} \mid \dots \mid T(\mathbf{e}_n)_{\mathcal{B}'} \right] [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

4. Em particular, se $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \dots + u_n\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$, então $T(\mathbf{u}) = u_1T(\mathbf{e}_1) + u_2T(\mathbf{e}_2) + \dots + u_nT(\mathbf{e}_n)$ donde existe uma única matriz real $\mathbf{A}_{m \times n}$ tal que

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

$\mathbf{A}$ é chamada **matriz (canónica) da transformação**

$$\mathbf{A} = \left[T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2) \mid \dots \mid T(\mathbf{e}_n) \right]$$

, em que, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $T(\mathbf{e}_k)$ é o **vector coluna** que resulta de calcular a imagem de $\mathbf{e}_k$ por meio de T .

19.4. Matriz de uma transformação linear e mudança de base.

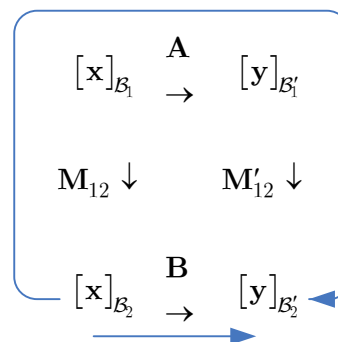
Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{E}'$ espaços vectoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ uma transformação linear. Interessa relacionar as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, de T , em diferentes bases de $\mathbb{E}$ e $\mathbb{E}'$.

Sejam então $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ duas bases de $\mathbb{E}$, $\mathcal{B}'_1$ e $\mathcal{B}'_2$ duas bases de $\mathbb{E}'$, $\mathbf{A}$ a matriz de T em relação às bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1$ e $\mathbf{B}$ a matriz de T relativamente às bases $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2$.

Dado $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$, seja $\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) \in \mathbb{E}'$.

Sejam $\mathbf{M}_{12}$ e $\mathbf{M}'_{12}$ as matrizes de mudança de base entre as bases escolhidas em $\mathbb{E}$ e $\mathbb{E}'$ respectivamente.

Tem-se:



$$\text{a) } [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_2} = \mathbf{M}_{12} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_1} \Leftrightarrow [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_1} = \mathbf{M}_{12}^{-1} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_2} \Leftrightarrow [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_1} = \mathbf{M}_{21} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_2}$$

$$\text{b) } [\mathbf{y}]_{\mathcal{B}'_2} = \mathbf{M}'_{12} [\mathbf{y}]_{\mathcal{B}'_1}$$

$$\text{c) } [\mathbf{y}]_{\mathcal{B}'_1} = \mathbf{A} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_1}$$

$$\text{d) } [\mathbf{y}]_{\mathcal{B}'_2} = \mathbf{B} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_2}$$

Assim, e tendo em conta b) c) e a)

$$\text{e) } [\mathbf{y}]_{\mathcal{B}'_2} = \mathbf{M}'_{12} [\mathbf{y}]_{\mathcal{B}'_1} = \mathbf{M}'_{12} \mathbf{A} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_1} = \mathbf{M}'_{12} \mathbf{A} \mathbf{M}_{21} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_2}$$

De d) e e) conclui-se que

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}'_{12} \mathbf{A} \mathbf{M}_{21}$$

19.5. Imagem e núcleo de uma transformação linear.

Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{E}'$ espaços vectoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ uma transformação linear.

1. Chama-se **imagem** de T , e representa-se por $\text{Im}(T)$, o **contradomínio** de T

$$\text{Im}(T) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{E}' : \mathbf{y} = T(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{x} \in \mathbb{E}\}$$

2. Sendo $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ uma transformação linear, $\text{Im}(T)$ é um subespaço de $\mathbb{E}'$.

3. Chama-se **núcleo** de T , e representa-se por $\text{Nuc}(T)$ ou $\text{Ker}(T)$, o conjunto de vectores de $\mathbb{E}$ cuja imagem é o vector nulo de $\mathbb{E}'$,

$$\text{Nuc}(T) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E} : T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{\mathbb{E}'}\}$$

4. Sendo $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ uma transformação linear, $\text{Ker}(T)$ é um subespaço de $\mathbb{E}$.

5. A transformação T é injectiva sse $\text{Nuc}(T) = \mathbf{0}_{\mathbb{E}}$.

Se $\mathbb{E}$ e $\mathbb{E}'$ tem dimensão finita, existe uma relação entre as dimensões da imagem de T e do núcleo de T e ainda uma relação destes subespaços com alguns dos espaços da matriz de T em relação a bases fixadas em $\mathbb{E}$ e $\mathbb{E}'$.

Concretamente, se $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ é uma base de $\mathbb{E}$, $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$ é uma base de $\mathbb{E}'$ e $\mathbf{A}$ é a matriz de T em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$:

6. (**Teorema de Dimensão**) A dimensão de $\mathbb{E}$ é a soma das dimensões do núcleo e da imagem de T

$$\dim(\mathbb{E}) = \dim(\text{Nuc}(T)) + \dim(\text{Im}(T))$$

7. À dimensão do espaço imagem chama-se **característica** da aplicação linear

$$\text{Car}(T) = \dim(\text{Im}(T))$$

8. A transformação T é sobrejectiva sse $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(\mathbb{E}')$

9. $\text{Im}(T)$ é o subespaço de $\mathbb{E}'$ gerado pelos vectores $T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), \dots, T(\mathbf{e}_n)$, logo, $\text{Im}(T)$ é o espaço gerado pelos vectores que constituem as colunas de $\mathbf{A}$.

10. Sendo $\text{Car}(\mathbf{A})$ o número de colunas linearmente independentes de $\mathbf{A}$ então

$$\dim(\text{Im}(T)) = \text{Car}(T) = \text{Car}(\mathbf{A})$$

11. À dimensão do núcleo de T chama-se **nulidade** da aplicação linear.

12. $\text{Nuc}(T)$ é o conjunto das soluções do sistema homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, ou seja, o núcleo de T coincide com o núcleo da matriz $\mathbf{A}$. Assim:

$$\dim(\text{Nuc}(T)) = \dim(\text{Nuc}(\mathbf{A})) = g$$

, onde g é o grau de indeterminação do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

19.6. Operações com transformações lineares.

Adição e multiplicação por um escalar

Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{E}'$ espaços vectoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$, $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ e $S : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ duas aplicações lineares, e $\alpha \in \mathbb{K}$.

A adição de T com S , $T + S$, é a aplicação $T + S : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ tal que

$$(T + S)(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) + S(\mathbf{x}) \quad , \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}$$

A multiplicação do escalar α por T , αT , é a aplicação $\alpha T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ tal que

$$(\alpha T)(\mathbf{x}) = \alpha T(\mathbf{x}) \quad , \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}$$

É fácil verificar, usando a definição, que $T + S$ e αT ainda são transformações lineares.

Mais ainda, se $\mathbb{E}$ e $\mathbb{E}'$ têm dimensão finita, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são bases de $\mathbb{E}$ e $\mathbb{E}'$, respectivamente, $\mathbf{A}_T$ é a matriz de T em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ e $\mathbf{A}_S$ é a matriz de S em relação às mesmas bases, então $(\mathbf{A}_T + \mathbf{A}_S)$ é a matriz de $(T + S)$ e $\alpha \mathbf{A}_T$ é a matriz de αT em relação a essas bases.

Composição

Sejam $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}'$ e $\mathbb{E}''$ espaços vectoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$, $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ e $S : \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{E}''$ transformações lineares.

A **composta** de S com T , $S \circ T$, é a aplicação $S \circ T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}''$ tal que

$$(S \circ T)(\mathbf{x}) = S(T(\mathbf{x})) \quad , \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}$$

Prova-se facilmente (por definição) que $S \circ T$ é uma transformação linear.

Se $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}'$ e $\mathbb{E}''$ têm dimensão finita, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$ são bases de $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}'$ e $\mathbb{E}''$, respectivamente, $\mathbf{A}_T$ é a matriz de T em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, $\mathbf{A}_S$ é a matriz de S em relação às bases $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$, então $\mathbf{A}_S \mathbf{A}_T$ é a matriz de $S \circ T$ em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}''$.

Em particular, se $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é uma transformação linear com matriz canónica $\mathbf{A}_T$ e $S : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ é outra transformação linear com matriz canónica $\mathbf{A}_S$, então $S \circ T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é linear e a sua matriz canónica é

$$\mathbf{A}_{S \circ T} = \mathbf{A}_S \mathbf{A}_T$$

Inversão

1. Se $\mathbb{E}$ é um espaço vectorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, a transformação $I_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ tal que $I_{\mathbb{E}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ é linear e designa-se por **identidade** em $\mathbb{E}$.

2. Duas transformações quaisquer $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ e $S : \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{E}$ dizem-se **transformações inversas** uma da outra se $S \circ T = I_{\mathbb{E}}$ e $T \circ S = I_{\mathbb{E}'}$. Escrevemos $S = T^{-1}$ e $T = S^{-1}$ (uma vez que a inversa, quando existe é única) e dizemos que S e T são **invertíveis**.

Seja $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ um isomorfismo. Então $T^{-1} : \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{E}$ é ainda um isomorfismo.

Mais ainda, se $\mathbb{E}$ e $\mathbb{E}'$ são espaços vectoriais de dimensão finita, tendo em conta o teorema da dimensão,

$$\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{E}') = n$$

Fixando uma base $\mathcal{B}$ em $\mathbb{E}$ e uma base $\mathcal{B}'$ em $\mathbb{E}'$ ($\#\mathcal{B} = \#\mathcal{B}'$) e sendo $\mathbf{A}_T$ a matriz (quadrada) de T em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, tem-se que $\mathbf{A}_T^{-1}$ é a matriz de T^{-1} em relação às bases $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}$.

3. Em particular, se $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear invertível (um **isomorfismo**), com matriz canónica $\mathbf{A}_T$, então $T^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear invertível com matriz canónica

$$\mathbf{A}_{T^{-1}} = \mathbf{A}_T^{-1}$$