

AULA 20

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

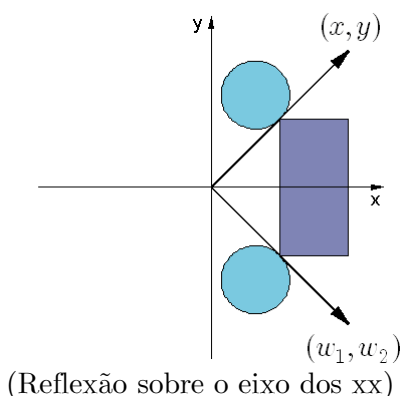
Transformações lineares elementares em $\mathbb{R}^2$.

Transformações lineares elementares em $\mathbb{R}^3$.

Isometria.

20. Transformações lineares elementares em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

20.1. Transformações lineares elementares em $\mathbb{R}^2$.



1. Projectção ortogonal.

Projectção ortogonal sobre o eixo dos **xx**.

Equações

$$w_1 = x$$

$$w_2 = 0$$

Matriz de Transformação

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Projectção ortogonal sobre o eixo dos **yy**.

Equações

$$w_1 = 0$$

$$w_2 = y$$

Matriz de Transformação

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Reflexão.

Reflexão sobre o eixo dos **xx**.

Equações

$$w_1 = x$$

$$w_2 = -y$$

Matriz de Transformação

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Reflexão sobre o eixo dos **yy** (figura 25.4).

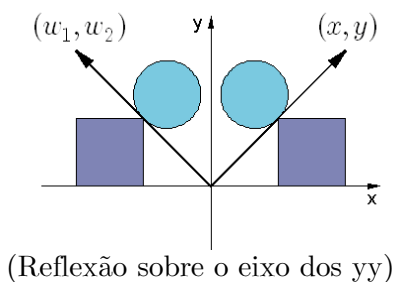
Equações

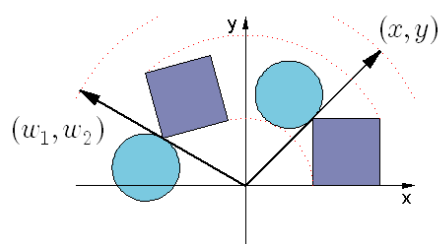
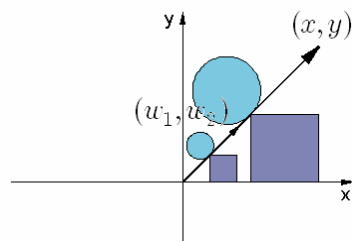
$$w_1 = -x$$

$$w_2 = y$$

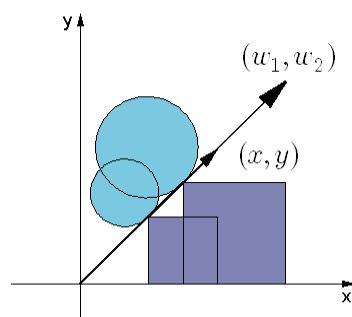
Matriz de Transformação

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(Rotação de um ângulo θ)

(Contração)



(Expansão)

3. Rotação (figura 25.5).Rotação de um ângulo θ no sentido directo

Equações

$$w_1 = x \cos(\theta) - y \sin(\theta)$$

$$w_2 = x \sin(\theta) + y \cos(\theta)$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

4. Contração (figura 25.6).Contração de um factor k , $T(\mathbf{u}) = k\mathbf{u}$ ($0 \leq k < 1$).

Equações

$$w_1 = kx$$

$$w_2 = ky$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

5. Expansão (figura 25.7).Expansão de um factor k , $T(\mathbf{u}) = k\mathbf{u}$ ($k > 1$).

Equações

$$w_1 = kx$$

$$w_2 = ky$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

20.2. Transformações lineares elementares em $\mathbb{R}^3$.

1. Projectão ortogonal.

Projectão ortogonal sobre plano xy .

Equações

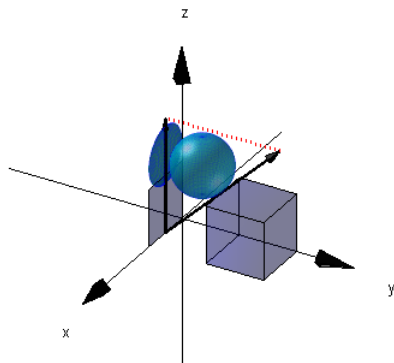
$$w_1 = x$$

$$w_2 = y$$

$$w_3 = 0$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



(Projectão ortogonal sobre o plano xz)

Projectão ortogonal sobre plano xz

Equações

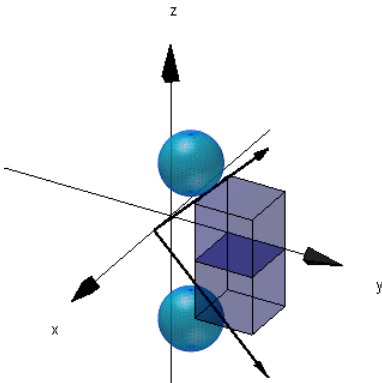
$$w_1 = x$$

$$w_2 = 0$$

$$w_3 = z$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(Reflexão sobre o plano xy)

Projectão ortogonal sobre plano yz .

Equações

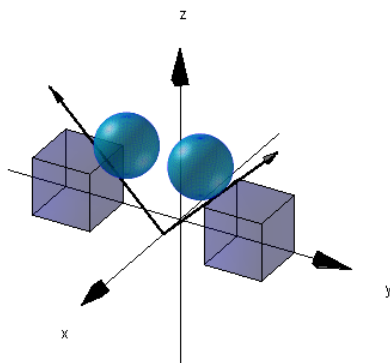
$$w_1 = 0$$

$$w_2 = y$$

$$w_3 = z$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(Reflexão sobre o plano xz)

2. Reflexão.

Reflexão sobre o plano xy .

Equações

$$w_1 = x$$

$$w_2 = y$$

$$w_3 = -z$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Reflexão sobre o plano xz .

Equações

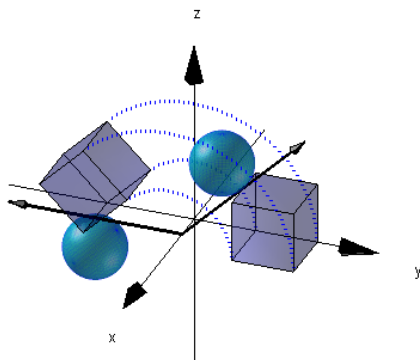
$$w_1 = x$$

$$w_2 = -y$$

$$w_3 = z$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(Rotação sobre o eixo dos xx , $\theta = 3\pi/4$)

Reflexão sobre o plano yz .

Equações

$$w_1 = -x$$

$$w_2 = y$$

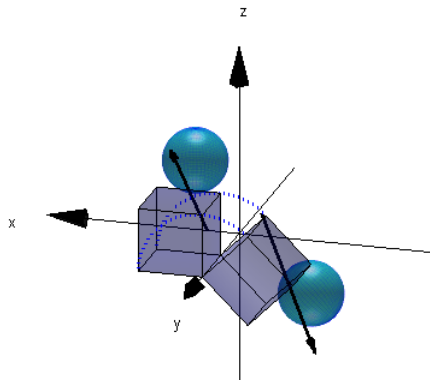
$$w_3 = z$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Rotação.

Rotação de um ângulo θ , no sentido directo, sobre o eixo dos **xx**.



Equações

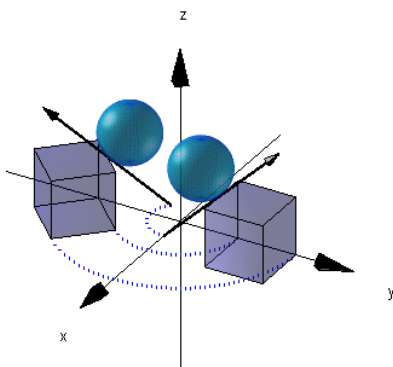
$$\begin{aligned} w_1 &= x \\ w_2 &= y \cos(\theta) - z \sin(\theta) \\ w_3 &= y \sin(\theta) + z \cos(\theta) \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Rotação de um ângulo θ , no sentido directo, sobre o eixo dos **yy**.

(Rotação sobre o eixo dos **yy**, $\theta = -\pi/4$)



Equações

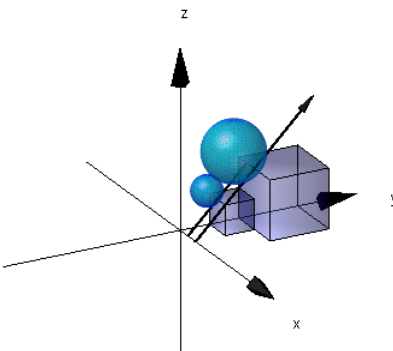
$$\begin{aligned} w_1 &= x \cos(\theta) + z \sin(\theta) \\ w_2 &= y \\ w_3 &= -x \sin(\theta) + z \cos(\theta) \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Rotação de um ângulo θ , no sentido directo, sobre o eixo dos **zz**.

(Rotação sobre o eixo dos **zz**, $\theta = -3\pi/4$)



Equações

$$\begin{aligned} w_1 &= x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \\ w_2 &= x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \\ w_3 &= z \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Contracção.

Contracção de um factor k ($0 \leq k < 1$).

Equações

$$\begin{aligned} w_1 &= kx \\ w_2 &= ky \\ w_3 &= kz \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

(Contracção, $k = 0.5$)

5. Expansão.

Expansão de um factor k ($k > 1$).

Equações

$$\begin{aligned} w_1 &= kx \\ w_2 &= ky \\ w_3 &= kz \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

(Expansão, $k = 1.5$)

20.3. Isometria.

Observe-se que, seja em $\mathbb{R}^2$ ou em $\mathbb{R}^3$, a **matriz de qualquer rotação ou qualquer reflexão é uma matriz ortogonal**, isto é, verifica a igualdade

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

Resulta daí que, se T é uma rotação ou uma reflexão, em $\mathbb{R}^2$ ou em $\mathbb{R}^3$, então T é uma **isometria** (uma transformação linear que conserva normas), isto é,

$$\forall \mathbf{u}, \quad \|T(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{A}\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|$$

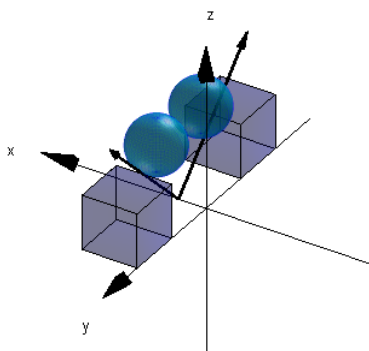
Com efeito,

$$\begin{aligned} \|T(\mathbf{u})\|^2 &= T(\mathbf{u}) \cdot T(\mathbf{u}) \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{u})^T \mathbf{A}\mathbf{u} \\ &= (\mathbf{u}^T \mathbf{A}^T) \mathbf{A}\mathbf{u} \\ &= \mathbf{u}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{u} \\ &= \mathbf{u}^T \mathbf{I}_n \mathbf{u} \\ &= \mathbf{u}^T \mathbf{u} \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \end{aligned}$$

Já as contracções e as expansões (no plano e no espaço) são as vulgarmente designadas **homotetias de razão** $k \neq 1$ e, obviamente, não preservam normas.

Exemplos

1. Podemos verificar se uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, consistindo numa reflexão sobre o plano xz , seguida de uma rotação de $\theta = -\pi/2$ sobre o eixo dos zz , é uma isometria

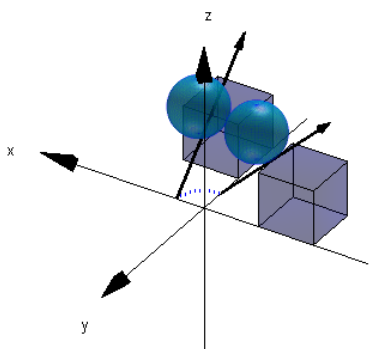


Sendo a matriz de uma reflexão sobre o plano xz

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

, e a matriz de uma rotação de $\theta = -\pi/2$ sobre o eixo dos zz

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



A matriz da transformação $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Para verificar se a transformação linear é uma isometria vamos verificar se a matriz $\mathbf{A}$ é ortogonal

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \mathbf{A}^T &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_3
 \end{aligned}$$

, logo a transformação linear é uma isometria.



```

>> A1=[1 0 0;0 -1 0;0 0 1];
>> A2=[0 1 0;-1 0 0;0 0 1];
>> A=A2*A1;
>> A'*A
ans =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1

```