

AULA 23

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Valores e vectores próprios.

Equação característica.

Matrizes semelhantes.

Matriz diagonalizável.

Factorização PDP⁻¹

23. Diagonalização.

23.1. Valores e vectores próprios. Equação característica.

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada de ordem n com elementos reais (ou complexos).

Um escalar λ , real ou complexo, é um **valor próprio** de $\mathbf{A}$ se existir um vector não nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

, dizendo-se que $\mathbf{v}$ é um **vector próprio** de $\mathbf{A}$ associado a λ . O conjunto dos valores próprios de $\mathbf{A}$ é designado por **espectro** de $\mathbf{A}$.

Se λ é um valor próprio de $\mathbf{A}$ o conjunto $\mathbb{E}_\lambda = \{\mathbf{v} : \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$ formado por todos os vectores próprios associados a λ e ainda pelo vector nulo é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) chamado o **subespaço próprio** associado a λ .

Os valores próprios de $\mathbf{A}$ são as soluções da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n) = 0$$

, designada por **equação característica** de $\mathbf{A}$, ou seja, são as raízes do polinómio

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$$

denominado por **polinómio característico** de $\mathbf{A}$.

Os vectores próprios associados a cada valor próprio λ são as soluções não nulas do sistema homogéneo (indeterminado),

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Se λ é um valor próprio de $\mathbf{A}$, a **multiplicidade algébrica** de λ , $m_a(\lambda)$, é a multiplicidade de λ como raiz do polinómio característico e **multiplicidade geométrica** de λ , $m_g(\lambda)$, é a dimensão do subespaço próprio $\mathbb{E}_\lambda$. Tem-se:

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

Observe-se que, se $\mathbf{A}$ é uma matriz triangular (em particular, se $\mathbf{A}$ é uma matriz diagonal), os valores próprios de $\mathbf{A}$ são os elementos da diagonal principal (elementos diagonais).

Exemplo

1. Seja a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. O polinómio característico de $\mathbf{A}$ é

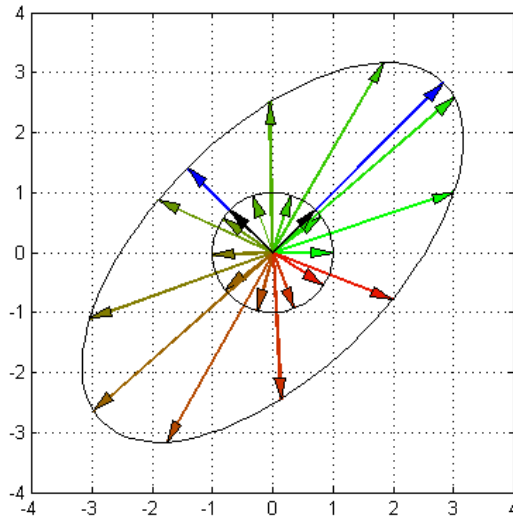


Figura 23.1

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \\ &= \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (3 - \lambda)^2 - 1 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 8 \\ &= (\lambda - 4)(\lambda - 2) \end{aligned}$$

, pelo que os valores próprios da matriz $\mathbf{A}$ são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 2$, ambos com multiplicidade algébrica 1.

Podemos agora determinar os vectores próprios associados resolvendo os sistemas $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Para $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ temos

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é $\mathbf{v} = k \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, com $k \in \mathbb{R}$.

Para $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é $\mathbf{v} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$, com $k \in \mathbb{R}$.

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_4 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \\ \mathbb{E}_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Por isso,

$$m_g(4) = \dim(\mathbb{E}_4) = 1$$

e

$$m_g(2) = \dim(\mathbb{E}_2) = 1$$

23.2. Matrizes semelhantes. Matriz diagonalizável. Factorização PDP^{-1} .

Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n . Diz-se que A é semelhante a B , e escreve-se $A \sim B$, se existe uma matriz P , quadrada de ordem n , invertível, tal que $B = P^{-1}AP$. Resulta da definição que, se $A \sim B$ também $B \sim A$ e dizemos, por isso, que A e B são **matrizes semelhantes**.

Matrizes semelhantes têm o mesmo determinante, a mesma característica, o mesmo polinómio característico e, conseqüentemente, os mesmos valores próprios (mas, em geral, não têm os mesmos vectores próprios).

Uma matriz quadrada A é **diagonalizável** se for semelhante a uma matriz diagonal, ou seja, se existir uma matriz P invertível, dita *matriz diagonalizadora* (ou diagonalizante), e uma matriz diagonal D tal que $A = PDP^{-1}$.

Uma matriz quadrada de ordem n , A , é diagonalizável sse possui n vectores próprios linearmente independentes, $v_1, v_2, \dots, v_n$, associados aos valores próprios (iguais ou distintos) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, respectivamente. As matrizes

$$P = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] \text{ e } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}$$

Vectores próprios associados a valores próprios distintos são linearmente independentes, pelo que, se A tem n valores próprios distintos então A é diagonalizável.

Exemplo

2. As matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

são semelhantes. Considerando a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

podemos verificar que $AP = PD$ (o que é o mesmo que $P^{-1}AP = D$, multiplicando à esquerda por P , e evitando assim ter que inverter a matriz), logo, $A \sim D$

$$AP = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = PD = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Nota: Embora utilizemos o mesmo símbolo, a semelhança entre matrizes não deve ser confundida com a equivalência por linhas: **as operações elementares sobre as linhas de uma matriz não preservam os seus valores próprios**.

Dado que D é uma matriz diagonal, podemos dizer que A é diagonalizável. Note-se que, conforme vimos no exemplo 1, D corresponde à matriz dos valores próprios da matriz A , escritos por uma certa ordem, e P corresponde à matriz dos vectores próprios associados, escritos pela ordem correspondente à de D , sendo

$$A = PDP^{-1}$$

Exercícios.

CALCULAR OS VALORES E OS VECTORES PRÓPRIOS DE UMA MATRIZ

23.1. Seja a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

O polinómio característico de $\mathbf{A}$ é

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 \end{aligned}$$

, pelo que os valores próprios da $\mathbf{A}$ são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$.

Podemos agora determinar os vectores próprios associados a cada valor próprio resolvendo os sistemas $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Para $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ temos

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é $\mathbf{v} = k \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^T$, com $k \in \mathbb{R}$.

Para $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ temos

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é $\mathbf{v} = k \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$, com $k \in \mathbb{R}$.



Recorrendo ao MatLab, podemos calcular os valores e vectores próprios de uma matriz com a função **[V D]=eig(A)**, em que D é uma matriz diagonal com os valores próprios e V uma matriz em que as colunas correspondem aos vectores próprios ordenados conforme os elementos da diagonal de D.

```
>> A=[1 -1;-4 1]
A =
     1     -1
    -4      1
>> [V,D] = eig(A)
V =
    0.4472    0.4472
   -0.8944    0.8944
D =
    3.0000         0
         0   -1.0000
```

Os vectores próprios apresentados pelo MatLab têm norma unitária. Podemos verificar que correspondem a um múltiplo dos valores deduzidos teoricamente.

```
>> V/V(1)
ans =
    1.0000    1.0000
   -2.0000    2.0000
```

Podemos ainda recorrer ao MatLab para resolver o problema seguindo a dedução analítica

```
>> syms d
p=det(A-d*eye(2))
p =
-3-2*d+d^2
>> d=solve(p)
d =
    3
   -1
>> rref([A-d(1)*eye(2) [0 0]'])
ans =
[ 1, 1/2, 0]
[ 0, 0, 0]
>> rref([A-d(2)*eye(2) [0 0]'])
ans =
[ 1, -1/2, 0]
[ 0, 0, 0]
```

23.2. Seja a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

O polinómio característico de $\mathbf{A}$ é

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 3 & -\lambda & -3 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= -\lambda \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda((-1-\lambda)^2 - 1) \\ &= -\lambda^2(\lambda + 2) \end{aligned}$$

, pelo que os valores próprios da matriz $\mathbf{A}$ são $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (ou seja, o valor próprio $\lambda = 0$ tem multiplicidade algébrica 2) e $\lambda_3 = -2$.

Podemos agora determinar os vectores próprios associados a cada valor próprio resolvendo os sistemas $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (que é idêntico a $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$) e $(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Para $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ temos

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral satisfaz $x - z = 0$. Assim, o subespaço próprio associado a $\lambda = 0$, $\mathbb{E}_0$, é

$$\mathbb{E}_0 = \left\{ \begin{bmatrix} z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

, ou seja, é o subespaço gerado pelos vectores $[0 \ 1 \ 0]^T$ e $[1 \ 0 \ 1]^T$, que são linearmente independentes. O valor próprio $\lambda = 0$ tem multiplicidade geométrica 2, tendo por vectores próprios associados todas as combinações lineares não nulas dos vectores $\mathbf{v}_1 = [0 \ 1 \ 0]^T$ e $\mathbf{v}_2 = [1 \ 0 \ 1]^T$.

Para $(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral satisfaz

$$\begin{cases} x = -z \\ y = 3z \end{cases}$$

O subespaço próprio associado a $\lambda = -2$, é

$$E_{-2} = \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ 3z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

, ou seja, é o subespaço gerado pelo vector $[-1 \ 3 \ 1]^T$. O valor próprio $\lambda = -2$ tem multiplicidade geométrica 1, tendo associados o vectores próprios $\mathbf{v}_3$ da forma $k[-1 \ 3 \ 1]^T$, com $k \neq 0$.



```
>> A=[-1 0 1;3 0 -3;1 0 -1]
```

```
>> [V,D]=eig(A)
```

```
V =
```

```
      0      0.7071   -0.3015
 1.0000      0      0.9045
      0      0.7071    0.3015
```

```
D =
```

```
      0      0      0
      0      0      0
      0      0     -2
```

```
>> [V(:,1),V(:,2)/V(4),-V(:,3)/V(7)]
ans =
     0     1    -1
     1     0     3
     0     1     1
```

DIAGONALIZAR UMA MATRIZ (FACTORIZAÇÃO PDP^{-1})

A diagonalização de uma matriz $\mathbf{A}$, $n \times n$, segue, em geral, os seguintes passos:

1. Determinar os valores próprios de $\mathbf{A}$.
2. Para cada valor próprio, determinar uma base do subespaço próprio associado.
3. A matriz $\mathbf{A}$ é diagonalizável sse a soma das dimensões dos subespaços próprios é igual a n . Nesse caso obtêm-se n vectores próprios linearmente independentes, pelo que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, em que $\mathbf{P}$ é a matriz cujas colunas são os vectores próprios e $\mathbf{D}$ é a matriz diagonal cujos elementos diagonais são os valores próprios a que cada vector próprio de $\mathbf{P}$, ordenadamente, está associado.

23.3. Vimos que a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

tem valores próprios $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$, a que estão associados os vectores próprios $\mathbf{v}_1 = [1 \ -2]^T$ e $\mathbf{v}_2 = [1 \ 2]^T$. Sendo os valores próprios diferentes, os vectores próprios que lhe estão associados são linearmente independentes, pelo que $\mathbf{A}$ é diagonalizável. Uma matriz diagonalizadora da matriz $\mathbf{A}$ é

$$\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

, sendo a matriz diagonal correspondente

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Temos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{PDP}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

Podemos verificar a diagonalização. Recorrendo ao MatLab



```
>> A=[1 -1;-4 1]
>> [V,D] = eig(A);
>> V*D*inv(V)
ans =
     1.0000    -1.0000
    -4.0000     1.0000
```

23.4. Vimos que a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

tem valores próprios $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, e $\lambda_3 = -2$, a que estão associados os vectores próprios $\mathbf{v}_1 = [0 \ 1 \ 0]^T$, $\mathbf{v}_2 = [1 \ 0 \ 1]^T$, e $\mathbf{v}_3 = [-1 \ 3 \ 1]^T$. Como λ_1 e λ_2 são iguais, é necessário verificar se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são linearmente independentes.



```
>> v1=[0 1 0]';
>> v2=[1 0 1]';
>> rref([v1 v2 [0 0 0]'])
ans =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     0
```

Dado que $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são linearmente independentes $\mathbf{A}$ é diagonalizável. Uma matriz diagonalizadora de $\mathbf{A}$ é

$$\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

, sendo a matriz diagonal correspondente

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Temos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Podemos verificar a diagonalização. Recorrendo ao MatLab



```
>> A=[-1 0 1;3 0 -3;1 0 -1];
>> [V,D] = eig(A);
>> V*D*inv(V)
ans =
    -1     0     1
     3     0    -3
     1     0    -1
```

23.5. Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Recorremos ao MatLab para calcular os valores e vectores próprios de $\mathbf{A}$. Temos



```
>> A=[0 1 0;0 0 1;2 -5 4];
>> [V,D] = eig(A)
V =
    -0.5774    0.5774   -0.2182
    -0.5774    0.5774   -0.4364
    -0.5774    0.5774   -0.8729
D =
    1.0000         0         0
         0    1.0000         0
         0         0    2.0000
>> [V(:,1)/V(1),V(:,2)/V(4),V(:,3)/V(7)]
ans =
    1.0000    1.0000    1.0000
    1.0000    1.0000    2.0000
    1.0000    1.0000    4.0000
```

Os valores próprios da matriz $\mathbf{A}$ são $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, e $\lambda_3 = 2$.

O valor próprio $\lambda = 1$ tem multiplicidade algébrica 2. Os vectores próprios associados a $\lambda = 1$ são da forma $\mathbf{v}_1 = k[1 \ 1 \ 1]^T$, com $k \neq 0$ e os vectores próprios associados a $\lambda = 2$ são da forma $\mathbf{v}_2 = k[1 \ 2 \ 4]^T$, com $k \neq 0$.

O valor próprio $\lambda = 1$ tem multiplicidade geométrica 1. Havendo apenas dois vectores próprios linearmente independentes, as dimensões dos subespaços próprios não somam $n(= 3)$, pelo que a matriz $\mathbf{A}$ não é diagonalizável.