

AULA 24

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Diagonalização de matrizes simétricas.

Decomposição espectral

24. Diagonalização.

24.1. Diagonalização de matrizes simétricas. Decomposição espectral.

Recordemos que uma matriz quadrada $\mathbf{A}$, $n \times n$, é simétrica se $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ e é ortogonal se $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ (isto é $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$).

Sabe-se que, se $\mathbf{A}$ é uma matriz real simétrica, os valores próprios de $\mathbf{A}$ são números reais e os vectores próprios associados a valores próprios distintos são ortogonais.

Para além disso, toda a matriz simétrica é diagonalizável.

De todos estes resultados conclui-se que, se $\mathbf{A}$ é uma matriz real simétrica de ordem n , então $\mathbf{A}$ é diagonalizável por uma matriz ortogonal, isto é, existe uma matriz ortogonal $\mathbf{Q}$ e uma matriz diagonal $\mathbf{D}$ tais que

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$$

Do que foi visto na aula 28,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

é a matriz cujos elementos diagonais são os valores próprios de $\mathbf{A}$, listados por certa ordem, e $\mathbf{Q}$ é a matriz obtida a partir de vectores próprios de $\mathbf{A}$ *normalizados*, listados por ordem correspondente à de $\mathbf{D}$.

A factorização $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$ pode ser escrita na forma

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T$$

, onde $\mathbf{q}_i$ é a coluna i da matriz $\mathbf{Q}$, chamada **decomposição espectral** da matriz $\mathbf{A}$.

Exemplo

1. Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

, determinamos os seus valores próprios a partir do polinómio característico. Sendo

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) \end{aligned}$$

, os valores próprios de $\mathbf{A}$ são $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, e $\lambda_3 = 1$

Podemos agora determinar os vectores próprios associados resolvendo os sistemas homogéneos correspondentes.

Para $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ temos

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, pelo que o conjunto de todos os vectores próprios associados a $\lambda_1 = 3$ satisfaz

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

, com $k \neq 0$.

Para $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ temos

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, pelo que o conjunto de todos os vectores próprios associados a $\lambda_2 = 2$ satisfaz

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

, com $k \neq 0$.

Para $(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, pelo que o conjunto de todos os vectores próprios associados a $\lambda_3 = 1$ satisfaz

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

, com $k \neq 0$.

A matriz $\mathbf{A}$ tem 3 valores próprios diferentes, pelo que os vectores próprios associados são ortogonais. Temos

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Normalizando cada uma dos vectores próprios obtemos a matriz

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos então a matriz $\mathbf{A}$ diagonalizada por uma matriz ortogonal:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

, como podemos verificar



```
>> A=[2 -1 0;-1 2 0;0 0 2];
```

```
>> [V D]=eig(A);
```

```
>> V*D*V'
```

```
ans =
```

```
    2.0000    -1.0000         0
   -1.0000     2.0000         0
         0         0     2.0000
```

Exercícios.

DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES SIMÉTRICAS

24.1. Determinemos a matriz ortogonal que diagonaliza a matriz simétrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz $\mathbf{A}$ tem valores próprios $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 4$. Ao valor próprio $\lambda_{1,2} = 2$ estão associados os vectores próprios $\mathbf{v}_1 = [1 \ 1 \ 0]^T$ e $\mathbf{v}_2 = [0 \ 0 \ 1]^T$, e ao valor próprio $\lambda_3 = 4$ o vector próprio $\mathbf{v}_3 = [1 \ -1 \ 0]^T$ (como poderíamos deduzir pelo método habitual).

Como a matriz tem valores próprios iguais não temos a garantia que os vectores próprios $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sejam ortogonais. $\mathbf{v}_3$ é necessariamente ortogonal a $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Quanto a estes dois, dado que estão associados a valores próprio iguais, é necessário verificar. Temos

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = [1 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Os vectores são ortogonais, pelo que basta construir a matriz cujas colunas são os vectores próprios encontrados e normalizar cada um deles para obter a matriz ortogonal que diagonaliza $\mathbf{A}$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos verificar



```
>> A=[3 -1 0;-1 3 0;0 0 2];
```

```
>> [V D]=eig(A)
```

```
V =
```

```
   -0.7071         0   -0.7071
   -0.7071         0    0.7071
         0    1.0000         0
```

```
D =
```

```
     2     0     0
     0     2     0
     0     0     4
```

```
>> V*D*V'
ans =
    3.0000    -1.0000         0
   -1.0000     3.0000         0
         0         0     2.0000
```

(Nota: Se $\mathbf{A}$ for uma matriz simétrica, em resultado do algoritmo utilizado no cálculo pelo MatLab, a função `eig(A)` devolve uma matriz ortogonal de vectores próprios.)

24.2. Determinemos a matriz ortogonal que diagonaliza a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

A matriz $\mathbf{A}$ tem valores próprios $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, e $\lambda_3 = 8$. Ao valor próprio $\lambda_{1,2} = 2$ estão associados os vectores próprios $\mathbf{v}_1 = [-1 \ 1 \ 0]^T$ e $\mathbf{v}_2 = [-1 \ 0 \ 1]^T$ e ao valor próprio $\lambda_3 = 8$ o vector próprio $\mathbf{v}_3 = [1 \ 1 \ 1]^T$ (como poderíamos deduzir pelo método habitual).

Como a matriz tem valores próprios iguais não temos a garantia que os vectores próprios $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sejam ortogonais. $\mathbf{v}_3$ é necessariamente ortogonal a $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Quanto aos dois últimos temos

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = [-1 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2$$

, pelo que os vectores não são ortogonais. É por isso necessário, recorrendo ao método de Gram-Schmidt, encontrar uma base ortogonal para o subespaço próprio $\mathbb{E}_2$. Temos

$$1. \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 = [-1 \ 1 \ 0]^T$$

$$2. \mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \text{proj}_{\mathbf{v}'_1} \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}'_1}{\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_1} \mathbf{v}'_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ficamos assim com 3 vectores ortogonais. Basta, agora, construir a matriz dos vectores próprios e normalizar cada um deles para obter a matriz ortogonal que diagonaliza a matriz $\mathbf{A}$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Podemos verificar que a matriz é ortogonal, e que diagonaliza a matriz $\mathbf{A}$



```
>> Q=[-1/sqrt(2) -1/sqrt(6) 1/sqrt(3);...
      1/sqrt(2) -1/sqrt(6) 1/sqrt(3);...
      0      2/sqrt(6) 1/sqrt(3)];

>> Q'*Q
ans =
    1.0000         0         0
         0    1.0000         0
         0         0    1.0000

>> D=[2 0 0;0 2 0;0 0 8];
>> Q*D*Q'
ans =
    4.0000    2.0000    2.0000
    2.0000    4.0000    2.0000
    2.0000    2.0000    4.0000
```

24.3. Conhecidos os valores próprios e a matriz $\mathbf{Q}$, podemos escrever a matriz $\mathbf{A}$ na forma da sua decomposição espectral

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T$$

Temos então

$$M_1 = \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1^T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_2^T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \mathbf{q}_3 \mathbf{q}_3^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

, pelo que, e reordenando os valores próprios por ordem decrescente, a decomposição espectral da matriz $\mathbf{A}$ é

$$\mathbf{A} = 8 \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_i \mathbf{u} &= \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T \mathbf{u} = \mathbf{q}_i (\mathbf{u}^T \mathbf{q}_i)^T = \mathbf{q}_i (\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_i)^T \\
&= \mathbf{q}_i (\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_i) && \text{(dado que } \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_i \text{ é um escalar)} \\
&= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_i) \mathbf{q}_i \\
&= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_i}{\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_i} \mathbf{q}_i && \text{(dado que } \|\mathbf{q}_i\| = 1) \\
&= \text{proj}_{\mathbf{q}_i} \mathbf{u}
\end{aligned}$$

Cada uma das matrizes $\mathbf{M}_i = \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T$ corresponde à matriz de projecção no subespaço gerado por $\mathbf{q}_i$, ou seja, corresponde à matriz de projecção no subespaço próprio $\mathbb{E}_{\lambda_i}$, caso a multiplicidade geométrica de λ_i seja 1.

Por exemplo, para $\mathbf{u} = [1 \ 2 \ 3]^T$



```

>> q1=Q(:,1); q2=Q(:,2); q3=Q(:,3);
>> M1=q1*q1'; M2=q2*q2'; M3=q3*q3';
>> u=[1 2 3]';
>> [(u'*q3)*q3 (u'*q2)*q2 (u'*q1)*q1]
ans =
     2     -1/2    -1/2
     2     -1/2     1/2
     2         1         0
>> [M3*u M2*u M1*u]
ans =
     2     -1/2    -1/2
     2     -1/2     1/2
     2         1         0

```

, temos $\mathbf{u} = \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1$, sendo $\mathbf{u}_3 = [2 \ 2 \ 2]^T$, $\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 = [-1/2 \ -1/2 \ 1]^T + [-1/2 \ 1/2 \ 0]^T$, as projecções de $\mathbf{u}$ sobre cada um dos subespaços próprios de $\mathbf{A}$. A transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a que a matriz $\mathbf{A}$ está associada transforma o vector $\mathbf{u}$ no vector $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u} = 8\mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_1$



```

>> 8*M3*u + 2*M2*u + 2*M1*u
ans =
    14
    16
    18
>> w=A*u
w =
    14
    16
    18

```

DETERMINAR UMA MATRIZ COM VALORES E VECTORES PRÓPRIOS ESPECÍFICOS

Determinar uma matriz simétrica com valores e vectores próprios (ortogonais) específicos é trivial, quer a partir da decomposição $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$, quer a partir da decomposição espectral da matriz $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T$.

24.4. Determinar a matriz simétrica $\mathbf{A}$ com valores próprios $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 2$, e vectores próprios $\mathbf{v}_1 = [-1 \ 1]^T$ e $\mathbf{v}_2 = [1 \ 1]^T$.

Sendo $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ ortogonais, basta calcular o respectivos versores $\mathbf{q}_1 = [-1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2}]^T$ e $\mathbf{q}_2 = [1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2}]^T$, resultando

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$



```
>> D=[4 0;0 2];
>> Q=[-1/sqrt(2) 1/sqrt(2); 1/sqrt(2) 1/sqrt(2)];
>> A=Q*D*Q'
A =
    3.0000    -1.0000
   -1.0000     3.0000
```