

AULA 29

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Exercícios.

29. Exercícios.

DETERMINAR A MELHOR APROXIMAÇÃO A UM VECTOR NUM SUBESPAÇO

29.1. Consideremos a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Os vectores que constituem as colunas da matriz, $\mathbf{u}_1 = [2 \ 0 \ 1]^T$ e $\mathbf{u}_2 = [0 \ -2 \ 1]^T$, são linearmente independentes.

Dado o vector $\mathbf{v} = [0 \ 1 \ 1]^T$, a melhor aproximação do vector \mathbf{v} no subespaço \mathbb{W} , gerado por \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 , ou seja, a melhor aproximação do vector \mathbf{v} no espaço coluna de \mathbf{A} (poderíamos verificar que \mathbf{v} não pertence ao espaço coluna, mostrando que $\mathbf{Ax} = \mathbf{v}$ é impossível), **não pode ser determinado a partir de $\text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{v}$ e $\text{proj}_{\mathbf{u}_2} \mathbf{v}$ porque \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 não são ortogonais.**

$$\hat{\mathbf{v}} = \text{proj}_{\mathbb{W}} \mathbf{v} \neq \text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{v} + \text{proj}_{\mathbf{u}_2} \mathbf{v}$$

É necessário encontrar uma base ortogonal do espaço gerado por \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 , por exemplo, recorrendo à ortogonalização de Gram-Schmidt. Temos então

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = [2 \ 0 \ 1]^T$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \text{proj}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2/5 \\ -2 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

Podemos agora determinar a melhor aproximação do vector \mathbf{v} no espaço coluna de \mathbf{A}

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{v}} &= \text{proj}_{\mathbb{W}} \mathbf{v} = \text{proj}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{v} + \text{proj}_{\mathbf{v}_2} \mathbf{v} \\ &= \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 \\ &= [1/2 \quad 1/2 \quad 0]^T\end{aligned}$$



```
>> u1=[2 0 1]';
>> u2=[0 -2 1]';
>> A=[u1 u2];
>> v=[0 1 1]';
>> v1=u1;
>> v2=u2-(u2'*v1)/(v1'*v1)*v1;
vm=(v'*v1)/(v1'*v1)*v1+(v'*v2)/(v2'*v2)*v2
vm =
    0.5000
    0.5000
    0
```

DETERMINAR A SOLUÇÃO DE MÍNIMO ERRO QUADRÁTICO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

29.2. O sistema de equações

$$\begin{cases} x = 0 \\ -2y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

, com forma matricial, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é, como podemos verificar, um sistema impossível. Como a matriz \mathbf{A} (que é a mesma dos exercícios anteriores) tem colunas linearmente independentes, a solução de mínimo erro quadrático do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é única, sendo

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

Para evitar a inversão da matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ no cálculo de $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$, é mais prático resolver o sistema de equações normais $(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$. Temos

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e, resolvendo o sistema

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & -1/4 \end{bmatrix}$$

, donde,

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ -1/4 \end{bmatrix}$$



```
>> A=[2 0; 0 -2 ;1 1];
>> b=[0 1 1]';
>> xm=inv(A'*A)*A'*v
xm =
    0.2500
   -0.2500
```

Note que a imagem de $\hat{\mathbf{x}}$ no espaço coluna de \mathbf{A} , corresponde à projecção ortogonal de \mathbf{b} no espaço coluna de \mathbf{A} .

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 \\ -1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

, pelo que o exercício anterior pode ser resolvido por esta via, isto é, dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e o vector $\mathbf{v} = [0 \ 1 \ 1]^T$, a melhor aproximação do vector \mathbf{v} no espaço coluna de \mathbf{A} é

$$\hat{\mathbf{v}} = \text{proj}_{\mathbb{W}} \mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



```
>> A=[2 0; 0 -2 ;1 1];
>> v=[0 1 1]';
>> vm=A*inv(A'*A)*A'*v
vm =
    0.5000
    0.5000
    0
```

DETERMINAR OS PARÂMETROS DE UM MODELO LINEAR QUE MELHOR SE ADAPTA A UM CONJUNTO DE PONTOS

29.3. Dados os pontos de \mathbb{R}^2 , $(1,2)$, $(3,2)$, e $(4,5)$, podemos determinar os parâmetros m e b da recta $y = mx + b$ (sendo m o declive da recta e $(0,b)$ o ponto em que a recta intersecta o eixo dos yy) que melhor se adapta ao conjunto dos pontos, segundo um critério de minimização do erro quadrático cometido.

O sistema de equações

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + b \\ y_2 = mx_2 + b \\ y_3 = mx_3 + b \end{cases}$$

que, na forma matricial é

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

é possível e determinado se os pontos forem colineares. No caso presente,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

, não sendo os pontos colineares, pois o sistema é impossível

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



```
>> A=[1 1;1 3; 1 4];
```

```
>> b=[2 2 5]';
```

```
>> rref([A b])
```

```

1      0      0
0      1      0
0      0      1
```

Vamos procurar a solução do sistema que minimiza o erro quadrático cometido na determinação dos parâmetros m e b , calculando $\hat{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{m} \end{bmatrix}$. Temos

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 26 \end{bmatrix}$$

e

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 26 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 26 & -8 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$$

pelo que,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{p}} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y} \\ &= \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 26 & -8 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 18 & 2 & -6 \\ -5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{m} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5/7 \\ 6/7 \end{bmatrix}\end{aligned}$$



```
>> xs=inv(A'*A)*A'*b
```

```
xs =
```

```
5/7
```

```
6/7
```

Temos então $b = 5/7$ e $m = 6/7$, ou seja, a recta que melhor se adapta ao conjunto de pontos é

$$y = \frac{6}{7}x + \frac{5}{7}$$

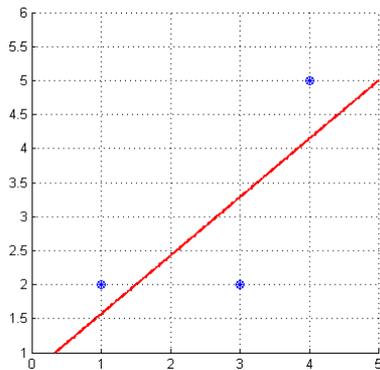


Figura 29.1

A figura mostra o conjunto de pontos e a recta que melhor se lhes adapta, no sentido da minimização do erro quadrático, ou seja, o somatório do quadrado das distâncias entre a recta e os pontos dados é menor do que para qualquer outra recta que pudéssemos definir.

Para evitar a inversão da matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ no cálculo de

$$\hat{\mathbf{p}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y}$$

podemos resolver o sistema de equações normais

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$$

Teríamos então

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 26 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 28 \end{bmatrix}$$

de onde resulta o sistema

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 28 \end{bmatrix}$$

, que facilmente se resolve,

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 8 & 26 & 28 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/7 \\ 0 & 1 & 6/7 \end{bmatrix}$$

, de onde resulta a solução encontrada anteriormente

$$\begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/7 \\ 6/7 \end{bmatrix}$$



```
>> A=[1 1;1 3; 1 4];
>> y=[2 2 5]';
>> rref([A'*A A'*y])
ans =
```

```
      1      0      5/7
      0      1      6/7
```

Podemos ainda ter em atenção que

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 \end{bmatrix}$$

, em que N é o número de pontos, e

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i x_i y_i \end{bmatrix}$$

, pelo que podemos escrever as equações normais

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$$

na forma

$$\begin{bmatrix} N & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i x_i y_i \end{bmatrix}$$

29.4. Dados os pontos de \mathbb{R}^2 , $(-1.5, 2)$, $(-1, 1)$, $(0, 1)$, e $(0.5, 1.5)$, determinar os parâmetros a_0 , a_1 , e a_2 da parábola $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ que melhor se adapta ao conjunto dos pontos, segundo um critério de minimização do erro quadrático cometido.

Dado o sistema de equações

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 \\ y_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 \\ y_3 = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 \\ y_4 = a_0 + a_1 x_4 + a_2 x_4^2 \end{cases}$$

, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

, e, no caso presente,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 2.25 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

, podemos determinar os valores dos parâmetros da parábola que melhor se adapta ao conjunto de pontos, do ponto de vista da minimização do erro quadrático, resolvendo as equações normais

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$$

Temos então

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1.5 & -1 & 0 & 0.5 \\ 2.25 & 1 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 2.25 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3.5 \\ -2 & 3.5 & -4.25 \\ 3.5 & -4.25 & 6.125 \end{bmatrix}$$

, e

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1.5 & -1 & 0 & 0.5 \\ 2.25 & 1 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.5 \\ -3.25 \\ 5.875 \end{bmatrix}$$

, de onde resulta o sistema

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3.5 \\ -2 & 3.5 & -4.25 \\ 3.5 & -4.25 & 6.125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.5 \\ -3.25 \\ 5.875 \end{bmatrix}$$

e, resolvendo o sistema, os parâmetros

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.8 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

, ou seja, a parábola de equação

$$y = 0.9 + 0.8x + x^2$$

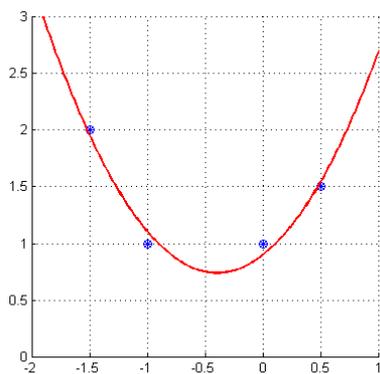


Figura 29.2



```
>> x1=[-1.5 2]';
>> x2=[-1 1]';
>> x3=[0 1]';
>> x4=[0.5 1.5]';
```

```

>> X=[x1 x2 x3 x4];
>> A=[[1 1 1 1]' X(1,:) (X(1,:).^2)'];
>> b=X(2,:);
>> p=inv(A'*A)*A'*b
p =
    0.9000
    0.8000
    1.0000

```

CALCULAR A MATRIZ DE PROJEÇÃO NUM SUBESPAÇO

29.5. Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

calcular a matriz de projecção no seu espaço coluna.

A matriz de projecção no espaço coluna de \mathbf{A} , que coincide com a matriz de projecção no subespaço gerado pelos vectores $\mathbf{u}_1 = [2 \ 0 \ 1]^T$ e $\mathbf{u}_2 = [0 \ -2 \ 1]^T$ que constituem as suas colunas, é

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$$

Temos,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

, e, finalmente,

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Conhecida a matriz de projecção (ortogonal) no espaço coluna de uma matriz, calcular a imagem de qualquer vector nesse subespaço é trivial. Por exemplo, considerando de novo o vector $\mathbf{v} = [0 \ 1 \ 1]^T$, temos

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{T}\mathbf{v} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



```
>> A=[2 0; 0 -2 ;1 1];
```

```
>> T=A*inv(A'*A)*A'
```

```
T =
```

$$\begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/6 & 5/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

```
>> vm=T*v
```

```
vm =
```

$$\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

CALCULAR A PSEUDO INVERSA DE UMA MATRIZ

29.6. Calcular a matriz pseudo-inversa da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz pseudo-inversa de uma matriz \mathbf{A} é, por definição,

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$$

No caso presente, como já vimos em exemplos anteriores, $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ é invertível, pelo que temos de imediato

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

, e, finalmente,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+ &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Conhecida a matriz pseudo-inversa da matriz \mathbf{A} , o cálculo da matriz de projecção no seu espaço coluna, $\mathbf{T} = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$, ou da solução de mínimo erro quadrático do sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}$, é trivial. Por exemplo, dado o sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

, a solução de mínimo erro quadrático do sistema é

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^+ \mathbf{b} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/4 \\ -1/4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



```
>> A=[2 0; 0 -2 ;1 1];
>> b=[0 1 1]';
>> pinv(A)
ans =
    5/12    1/12    1/6
   -1/12   -5/12    1/6
>> xm=pinv(A)*b
xm =
    1/4
   -1/4
```