

Resolva cada um dos Grupos I, II, III e IV em folhas separadas e identifique cada folha com o seu **nome completo** e **número de aluno**. O incumprimento destas regras pode conduzir ao anulamento da Prova.

Duração: 3h 00m

GRUPO I

- 1 ■** Sejam A , B e C matrizes reais quadradas de ordem n . Indique, justificando, o valor de verdade de cada uma das proposições seguintes no universo referido:
- a ■** $\forall_{A,B} (A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ **b ■** $\forall_{A,B} AB + B = (A+1)B$
c ■ $\forall_{A,B} (AB)^2 = A^2 B^2$ **d ■** $\forall_{A,B} A^2 + AB = (A+B)A$
e ■ $\forall_{A,B,C} (A \neq O_n \wedge AB = AC \Rightarrow B = C)$
- 2 ■** Considere, no espaço vectorial cartesiano real \mathbb{R}^3 , o conjunto $F = \{(x, y, z) : z = 0 \wedge y = 2x\}$ e a sequência de vectores $s = ((0, 3, -2), (1, -1, 2), (2, 1, 2))$:
- a ■** Mostre que F é um subespaço de \mathbb{R}^3 e indique uma base e a dimensão de F .
b ■ Determine uma base e a dimensão de F^\perp .
c ■ Seja $S = L(s)$ o subespaço de \mathbb{R}^3 gerado por s . Justificando as suas respostas, indique uma base e a dimensão de S e caracterize os vectores $(x, y, z) \in S$ por meio de uma condição nas suas coordenadas x, y, z .

GRUPO II

- 1 ■** Considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas reais (x, y, z, w) e no qual a e b são parâmetros reais:

$$\begin{cases} x - y &= 2 \\ -ay + w &= 2a \\ ax - w &= b \end{cases}$$

- a ■** Escreva o sistema na forma matricial $AX = B$ e, sem efectuar quaisquer cálculos, conclua que não existem valores dos parâmetros a e b que tornem o sistema possível e determinado.
b ■ Discuta o sistema em função dos valores reais de a e b .
c ■ Resolva o sistema para os valores de a e b que o tornem possível.
- 2 ■** Considere a matriz real de ordem 5

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -6 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule o determinante de A e, com base no resultado obtido, indique o valor de verdade das proposições seguintes:

- a ■** A matriz A é invertível.
b ■ O sistema homogéneo $AX = O$ tem uma infinidade de soluções.
c ■ O espaço das colunas de A é igual a \mathbb{R}^5 .
d ■ O espaço nulo de A tem dimensão 2.

GRUPO III

- 1 ■ Seja $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o endomorfismo de \mathbb{R}^2 no qual:
 f_1 é a rotação de $\theta = +\frac{3\pi}{2}$ em torno da origem,
 f_2 é a projecção ortogonal sobre o eixo dos xx e
 f_3 é a simetria relativamente ao eixo dos yy .
 Determine $f(x, y)$, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- 2 ■ Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.
- a ■ Determine os valores e vectores próprios de A .
 - b ■ Determine uma matriz diagonal D e uma matriz invertível T tais que $A = TDT^{-1}$ e verifique esta igualdade para as matrizes D e T por si apresentadas.
 - c ■ Aproveite a alínea anterior para determinar A^7 .

GRUPO IV

- 1 ■ Considere, no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 (munido do produto interno canónico), os vectores
- $$\vec{v}_1 = (1, 0, 0), \vec{v}_2 = (2, 2, -1) \text{ e } \vec{v}_3 = (3, 1, 8).$$
- a ■ Prove que \vec{v}_2 e \vec{v}_3 são ortogonais.
 - b ■ Mostre que a sequência $v = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ é uma base não ortogonal de \mathbb{R}^3 .
 - c ■ A partir da sequência v , obtenha uma base ortonormada $w = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ de \mathbb{R}^3 tal que $L(\vec{w}_1) = L(\vec{v}_1)$, $L(\vec{w}_2) = L(\vec{v}_2)$ e $L(\vec{w}_3) = L(\vec{v}_3)$.
- 2 ■ Considere o intervalo $I = [0, 2\pi]$ e o espaço vectorial complexo $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ das funções complexas definidas e contínuas no intervalo I , com o produto interno

$$f \cdot g = \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Mostre que a sequência de funções $v = (1, e^{it})$ é ortogonal e obtenha dela uma sequência ortonormada.

FIM

Cotações

	Grupo I		Grupo II		Grupo III		Grupo IV	
	Problema 1	Problema 2	Problema 1	Problema 2	Problema 1	Problema 2	Problema 1	Problema 2
—	—	—	—	1,0	1,0	—	—	1,5
a	0,5	0,5	0,5	0,5	—	1,5	0,5	—
b	0,5	1,0	1,5	0,5	—	1,5	0,5	—
c	0,5	1,0	1,0	0,5	—	1,0	1,5	—
d	0,5	—	—	0,5	—	—	—	—
e	0,5	—	—	—	—	—	—	—

ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

Resolução do Exame de 2ª Fase

26 de Julho de 2008

Ano Lectivo: 2007 - 2008

Semestre: Verão



ISEL ■ DEETC Secção de Matemática ■ ALGA

Grupo I

1 ■ Sejam A , B e C matrizes reais quadradas de ordem n . Indique, justificando, o valor de verdade de cada uma das proposições seguintes no universo referido:

a ■ $\forall_{A,B} (A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

b ■ $\forall_{A,B} AB + B = (A+1)B$

c ■ $\forall_{A,B} (AB)^2 = A^2 B^2$

d ■ $\forall_{A,B} A^2 + AB = (A+B)A$

e ■ $\forall_{A,B,C} (A \neq O_n \wedge AB = AC \Rightarrow B = C)$

Resposta

1a ■ É falsa. Para quaisquer matrizes quadradas de ordem n , tem-se:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

Esta igualdade mostra que a proposição dada é verdadeira se e só se A e B são *permutáveis* ($AB = BA$).

1b ■ É falsa. O 2º membro da igualdade dada não faz sentido (soma de uma matriz A quadrada de ordem n com o escalar 1). A igualdade correcta seria $AB + B = (A + I_n)B$.

1c ■ É falsa, no universo de todas as matrizes reais quadradas de ordem n . Todavia, no universo das matrizes reais *permutáveis* de ordem n , será verdadeira, como se mostra a seguir:

$$(AB)^2 = (AB)(AB) = A(BA)B = A(AB)B = (AA)(BB) = A^2 B^2$$

1d ■ É falsa, no universo de todas as matrizes reais quadradas de ordem n . Todavia, no universo das matrizes reais *permutáveis* de ordem n , será verdadeira, como se mostra a seguir:

$$A^2 + AB = A^2 + BA = (A+B)A$$

1e ■ É falsa. A igualdade $AB = AC$ equivale a $A(B-C) = O_n$. Ora, a propriedade de anulamento do produto não vale para matrizes (isto é, *o produto pode ser nulo sem que nenhum dos factores o seja*), pelo que o facto de ser $A \neq O_n$ não implica ser $B-C = O_n$, o que equivaleria a $B = C$. Por exemplo, para as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{Temos } A \neq O_n \wedge AB = AC = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 14 & 6 \end{bmatrix} \wedge B \neq C.$$

A propriedade que é verdadeira no universo das matrizes reais quadradas de ordem n é

$$\forall_{A,B,C} (A \text{ é invertível} \wedge AB = AC \Rightarrow B = C)$$

e, para o provar, basta multiplicar ambos os membros de $AB = AC$ por A^{-1} . Observe, por fim, que a matriz A do exemplo dado antes não é invertível.

2 ■ Considere, no espaço vectorial cartesiano real \mathbb{R}^3 , o conjunto

$$F = \{(x, y, z): z = 0 \wedge y = 2x\}$$

e a sequência de vectores $s = ((0, 3, -2), (1, -1, 2), (2, 1, 2))$:

a ■ Mostre que F é um subespaço de \mathbb{R}^3 e indique uma base e a dimensão de F .

b ■ Determine uma base e a dimensão de F^\perp .

c ■ Seja $S = L(s)$ o subespaço de \mathbb{R}^3 gerado por s . Justificando as suas respostas, indique uma base e a dimensão de S e caracterize os vectores $(x, y, z) \in S$ por meio de uma condição nas suas coordenadas x, y, z .

Resposta

2a ■ O conjunto F pode ser escrito na forma

$$F = \{(x, y, z): z = 0 \wedge y = 2x\} = \{(x, 2x, 0): x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 2, 0): x \in \mathbb{R}\} = L((1, 2, 0))$$

Concluimos que F é o subespaço de \mathbb{R}^3 gerado pelo vector $(1, 2, 0)$, o qual, sendo não nulo, é linearmente independente e uma base de F . Então, $\text{Base}(F) = ((1, 2, 0))$ e $\dim(F) = 1$. Geometricamente, F é a recta que passa pela origem e que tem a direcção do vector $(1, 2, 0)$.

2b ■ Temos $\dim(F^\perp) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(F) = 3 - 1 = 2$. Então, F^\perp é um plano passando pela origem e perpendicular à recta F . Para determinar F^\perp , basta atender a que um vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pertence a F^\perp se e só se $(1, 2, 0) \perp (x, y, z)$, isto é,

$$\begin{aligned} F^\perp &= \{(x, y, z): (1, 2, 0) \cdot (x, y, z) = 0\} = \{(x, y, z): x + 2y = 0\} = \{(-2y, y, z): y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-2, 1, 0) + z(0, 0, 1): y, z \in \mathbb{R}\} = L((-2, 1, 0), (0, 0, 1)) \end{aligned}$$

O resultado anterior mostra que a sequência $((-2, 1, 0), (0, 0, 1))$ gera F^\perp e, por ser linearmente independente (observe que está em escada e não há vectores nulos) será uma base de F^\perp . Portanto, $\text{Base}(F^\perp) = ((-2, 1, 0), (0, 0, 1))$ e $\dim(F^\perp) = 2$, o que confirma o resultado obtido no início desta alínea.

2c ■ Para determinar uma base e a dimensão de S , basta usar o algoritmo de condensação vertical sobre a matriz cujas linhas são os vectores de S

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A lista $b = ((1, -1, 2), (0, 3, -2))$ gera S e é linearmente independente, logo é uma base de S . Portanto, $\text{Base}(S) = ((1, -1, 2), (0, 3, -2))$ e $\dim(S) = 2$.

Finalmente, um vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pertencerá a S se e só se a matriz cujas linhas são $((1, -1, 2), (0, 3, -2), (x, y, z))$ tiver característica igual a 2

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ x & y & z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & x+y & -2x+z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4x-2y-3z \end{bmatrix}$$

Deste modo, será $S = \{(x, y, z): 4x - 2y - 3z = 0\}$.

Grupo II

1 ■ Considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas reais (x, y, z, w) e no qual a e b são parâmetros reais:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ -ay + w = 2a \\ ax - w = b \end{cases}$$

a ■ Escreva o sistema na forma matricial $AX = B$ e, sem efectuar quaisquer cálculos, conclua que não existem valores dos parâmetros a e b que tornem o sistema possível e determinado.

b ■ Discuta o sistema em função dos valores reais de a e b .

c ■ Resolva o sistema para os valores de a e b que o tornem possível.

Resposta

1a ■ O sistema dado está na forma canónica e o vector incógnita é $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, pelo que a sua forma matricial é

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2a \\ b \end{bmatrix}$$

A matriz simples A é do tipo 3×4 , pelo que a sua característica é $r \leq 3$. Como o número de incógnitas é $n = 4$, não poderá ocorrer, quaisquer que sejam os valores de a e b , a condição $r = n$, necessária (mas não suficiente) para o sistema ser determinado. Este é, aliás, um resultado geral: *um sistema de equações lineares com um número de equações estritamente inferior ao de incógnitas não poderá ser determinado.*

1b ■ Condensem-se a matriz completa $A' = [A|B]$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -a & 0 & 1 & 2a \\ a & 0 & 0 & -1 & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -a & 0 & 1 & 2a \\ 0 & a & 0 & -1 & b - 2a \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -a & 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -a & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

Observe que, na última passagem, trocámos as colunas 2 e 4, isto é, reordenámos as incógnitas para (x, w, z, y) . Segue-se a discussão pedida, na qual r é a característica de A , s é a característica de A' e n é o número de incógnitas (observe que a não intervém na discussão):

$$\begin{cases} b = 0 \Rightarrow r = s = 2 \wedge n = 4 \Rightarrow \text{Sistema possível duplamente indeterminado } (n - r = 2) \\ b \neq 0 \Rightarrow r = 2 \wedge s = 3 \Rightarrow \text{Sistema impossível} \end{cases}$$

1c ■ Basta supor $b = 0$ e obtemos imediatamente a solução geral (atender à ordem (x, w, z, y) das incógnitas)

$$\begin{cases} x = 2 + y \\ y = y \\ z = z \\ w = 2a + ay \end{cases} ; y, z \in \mathbb{R}$$

A solução pode ser escrita na forma vectorial, para qualquer $a \in \mathbb{R}$ e $b = 0$:

$$(x, y, z, w) = (2 + y, y, z, 2a + ay) = (2, 0, 0, 2a) + y(1, 1, 0, a) + z(0, 0, 1, 0); y, z \in \mathbb{R}$$

2 ■ Considere a matriz real de ordem 5

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -6 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule o determinante de A e, com base no resultado obtido, indique o valor de verdade das proposições seguintes:

- a ■** A matriz A é invertível.
- b ■** O sistema homogéneo $AX = O$ tem uma infinidade de soluções.
- c ■** O espaço das colunas de A é igual a \mathbb{R}^5 .
- d ■** O espaço nulo de A tem dimensão 2.

Resposta

O teorema de Laplace aplicado à primeira linha dá-nos

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -6 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -9 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

O mesmo teorema aplicado agora à 4ª linha e a regra de Sarrus dão-nos finalmente:

$$\det(A) = 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 3(3 - 2) = 3 \neq 0$$

2a ■ Verdadeira: é consequência de ser $\det(A) \neq 0$.

2b ■ Falsa: como $\det(A) \neq 0$, as linhas de A são linearmente independentes, pelo que a característica de A é 5 e o grau de indeterminação do sistema $AX = O$ é nulo (sistema determinado). Deste modo, apenas existe a solução trivial $X = O$.

2c ■ Verdadeira: como $\det(A) \neq 0$, as colunas de A são vectores de \mathbb{R}^5 linearmente independentes, pelo que constituem uma base de $\text{Col}(A)$; isto mostra que $\dim(\text{Col}(A)) = 5$. Como $\text{Col}(A) \subset \mathbb{R}^5$ e $\dim(\text{Col}(A)) = 5$, será $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^5$.

2d ■ Falsa: já vimos que a característica de A é $r = 5$, pelo que a dimensão do espaço nulo de A será $\dim(\text{Ker}(A)) = n - r = 5 - 5 = 0$.

Grupo III

1 ■ Seja $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o endomorfismo de \mathbb{R}^2 no qual:

f_1 é a rotação de $\theta = +\frac{3\pi}{2}$ em torno da origem,

f_2 é a projecção ortogonal sobre o eixo dos xx e

f_3 é a simetria relativamente ao eixo dos yy .

Determine $f(x, y)$, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Resposta

As matrizes canónicas de f_1 , f_2 e f_3 são respectivamente as matrizes F_1 , F_2 e F_3 seguintes:

$$\begin{cases} f_1(1, 0) = (0, -1) \\ f_1(0, 1) = (1, 0) \end{cases} \Rightarrow F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} f_2(1, 0) = (1, 0) \\ f_2(0, 1) = (0, 0) \end{cases} \Rightarrow F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} f_3(1, 0) = (-1, 0) \\ f_3(0, 1) = (0, 1) \end{cases} \Rightarrow F_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz canónica de $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ será então

$$F = F_3 F_2 F_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da matriz F concluímos que $f(1, 0) = (0, 0)$ e $f(0, 1) = (-1, 0)$, pelo que

$$f(x, y) = f(x(1, 0) + y(0, 1)) = xf(1, 0) + yf(0, 1) = x(0, 0) + y(-1, 0) = (-y, 0)$$

2 ■ Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

a ■ Determine os valores e vectores próprios de A .

b ■ Determine uma matriz diagonal D e uma matriz invertível T tais que $A = TDT^{-1}$ e verifique esta igualdade para as matrizes D e T por si apresentadas.

c ■ Aproveite a alínea anterior para determinar A^7 .

Resposta

2a ■ O polinómio característico de A é

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(3 - \lambda) + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2) \end{aligned}$$

O espectro de A é, pois, $\mathcal{E}(A) = \{1, 2\}$. Como existem 2 valores próprios distintos e algebricamente simples, podemos concluir que as multiplicidades geométricas valem também ambas 1. Como a soma destas é igual a 2, A é diagonalizável (e invertível, visto que 0 não é

valor próprio de A). Para determinar os vectores próprios de A , temos que resolver os sistemas simplesmente indeterminados $(A - \lambda I_2)X = O$, para $\lambda \in \mathcal{E}(A)$:

- Para $\lambda = 1$, temos

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Daqui se conclui que os vectores próprios são

$$(x, y) = (2y, y) = y(2, 1); y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

O subespaço próprio de A associado a $\lambda = 1$ é

$$E_1(A) = L((2, 1))$$

- Para $\lambda = 2$, temos

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Daqui se conclui que os vectores próprios são

$$(x, y) = (y, y) = y(1, 1); y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

O subespaço próprio de A associado a $\lambda = 2$ é

$$E_2(A) = L((1, 1))$$

2b ■ A matriz T cujas colunas são os vectores próprios de A anteriormente determinados $((2, 1), (1, 1))$ diagonalizará A (esta matriz não é única), isto é, teremos

$$D = T^{-1}AT, \text{ onde } D = \text{diag}(1, 2) \text{ e } T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou, mais geralmente, } T = \begin{bmatrix} 2\alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}; \alpha, \beta \neq 0$$

Multiplicando a igualdade $D = T^{-1}AT$ por T à esquerda e por T^{-1} à direita, obtemos a igualdade equivalente $A = TDT^{-1}$ que passamos a verificar

$$TDT^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = A$$

Cálculo da matriz T^{-1} usada em cima:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Observe-se que também a matriz $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e as matrizes $T = \begin{bmatrix} \alpha & 2\beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta \neq 0$ responderiam à questão proposta.

2c ■ Começemos por observar que a potência de expoente natural m de uma matriz diagonal $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ é, como facilmente se reconhece,

$$D^m = \text{diag}(\lambda_1^m, \lambda_2^m, \dots, \lambda_n^m)$$

Seja então $D = \text{diag}(1, 2)$. Então, por ser $A = TDT^{-1}$,

$$A^7 = \underbrace{(TDT^{-1})(TDT^{-1})\dots(TDT^{-1})}_{7 \text{ factores}} = \underbrace{TD \overbrace{(T^{-1}T)}^{I_2} D (T^{-1}\dots T)}_{7 \text{ factores}} DT^{-1} = TD^7T^{-1}$$

No caso vertente, teremos $D^7 = \text{diag}(1^7, 2^7) = \text{diag}(1, 128)$ e portanto:

$$\begin{aligned} A^7 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 128 \\ 1 & 128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -126 & 254 \\ -127 & 255 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Grupo IV

1 ■ Considere, no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 (munido do produto interno canónico), os vectores

$$\vec{v}_1 = (1, 0, 0), \vec{v}_2 = (2, 2, -1) \text{ e } \vec{v}_3 = (3, 1, 8).$$

a ■ Prove que \vec{v}_2 e \vec{v}_3 são ortogonais.

b ■ Mostre que a sequência $v = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ é uma base não ortogonal de \mathbb{R}^3 .

c ■ A partir da sequência v , obtenha uma base ortonormada $w = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ de \mathbb{R}^3 tal que $L(\vec{w}_1) = L(\vec{v}_1)$, $L(\vec{w}_1, \vec{w}_2) = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ e $L(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3) = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

Resposta

1a ■ Basta atender a que $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = (2, 2, -1) \cdot (3, 1, 8) = 6 + 2 - 8 = 0$.

1b ■ Para mostrar que v é uma base de \mathbb{R}^3 , bastará provar que não é nulo o determinante de v :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 16 + 1 = 17 \neq 0$$

Porém, v não é ortogonal, visto que, por exemplo, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (1, 0, 0) \cdot (2, 2, -1) = 2 \neq 0$.

1c ■ Usamos o método de Gram-Schmidt sobre a sequência v para obter primeiro uma base *ortogonal* $u = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \vec{v}_1 = (1, 0, 0) \\ \vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 = (2, 2, -1) - \frac{(2, 2, -1) \cdot (1, 0, 0)}{(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0)} (1, 0, 0) \\ &= (2, 2, -1) - \frac{2}{1} (1, 0, 0) = (0, 2, -1) \\ \vec{u}_3' &= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 \\ &= (3, 1, 8) - \frac{(3, 1, 8) \cdot (1, 0, 0)}{(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0)} (1, 0, 0) - \frac{(3, 1, 8) \cdot (0, 2, -1)}{(0, 2, -1) \cdot (0, 2, -1)} (0, 2, -1) \\ &= (3, 1, 8) - \frac{3}{1} (1, 0, 0) + \frac{6}{5} (0, 2, -1) = \frac{17}{5} (0, 1, 2) \Rightarrow \vec{u}_3 = (0, 1, 2) \end{aligned}$$

Assim, $u = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = ((1, 0, 0), (0, 2, -1), (0, 1, 2))$ é uma base *ortogonal* de \mathbb{R}^3 , como facilmente se verifica. Para obter a base $w = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ *ortonormada* pedida, basta agora normalizar os vectores de u , atendendo a que $\|\vec{u}_k\| = \sqrt{\vec{u}_k \cdot \vec{u}_k}$:

$$\|\vec{u}_1\| = 1, \|\vec{u}_2\| = \sqrt{5}, \|\vec{u}_3\| = \sqrt{5}$$

Então,

$$w = \left((1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{5}} (0, 2, -1), \frac{1}{\sqrt{5}} (0, 1, 2) \right)$$

2 ■ Considere o intervalo $I = [0, 2\pi]$ e o espaço vectorial complexo $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ das funções complexas definidas e contínuas no intervalo I , com o produto interno

$$f \cdot g = \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Mostre que a sequência de funções $v = (1, e^{it})$ é ortogonal e obtenha dela uma sequência ortonormada.

Resposta

Para provar que $v = (v_1(t), v_2(t)) = (1, e^{it})$ é ortogonal, bastará mostrar que $v_1 \cdot v_2 = 0$:

$$v_1 \cdot v_2 = \int_0^{2\pi} 1 \overline{e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} 1 e^{-it} dt = [ie^{-it}]_0^{2\pi} = i(e^{-i2\pi} - e^{-i0}) = i(1 - 1) = 0$$

Para obter uma sequência ortonormada, normalizamos os vectores de v :

$$\begin{aligned} \|v_1\|^2 &= \int_0^{2\pi} v_1(t) \overline{v_1(t)} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi \Rightarrow \|v_1\| = \sqrt{2\pi} \\ \|v_2\|^2 &= \int_0^{2\pi} v_2(t) \overline{v_2(t)} dt = \int_0^{2\pi} e^{it} \overline{e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} e^{it} e^{-it} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \Rightarrow \|v_2\| = \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

A sequência ortonormada resultante é, pois, $w = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{it} \right)$.