

Instituto Superior de Engenharia de Lisboa
LEETC
Álgebra Linear e Geometria Analítica ■ Teste Final ■ 2008 Julho 09, 19:00h

Resolva cada um dos Grupos I e II em folhas separadas e identifique cada folha com o seu **nome completo** e **número de aluno**. O incumprimento destas regras pode conduzir ao anulamento da Prova.

Duração: 3h 00m

GRUPO I

1 ■ A forma escalonada reduzida de uma matriz real A é

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a ■ Resolva o sistema $AX = O$.

b ■ Seja C_j a coluna j de A , para $j = 1, 2, 3, 4$ e suponha que $B = C_1 + C_2$. Determine a solução geral do sistema $AX = B$.

2 ■ Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ k & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2k^2 \end{bmatrix}$. Determine o(s) valor(es) de $k \in \mathbb{R}$ de modo que A seja invertível.

3 ■ Seja B uma matriz invertível de 3ª ordem tal que

$$B^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a ■ Calcule $\det(B)$.

b ■ Calcule B .

4 ■ Considere, no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 (munido do produto interno canónico), os vectores

$$\vec{u}_1 = (0, 0, 1), \vec{u}_2 = (0, 1, 1) \text{ e } \vec{u}_3 = (1, 1, 1).$$

a ■ Prove que $u = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ é uma base de \mathbb{R}^3 .

b ■ Seja $F = L(\vec{u}_1, \vec{u}_3)$ o subespaço de \mathbb{R}^3 gerado por \vec{u}_1 e \vec{u}_3 . Caracterize os vectores $(x, y, z) \in F$ por meio de uma condição nas suas coordenadas x , y e z .

c ■ Determine uma base e a dimensão de F^\perp .

d ■ Determine uma base ortogonal (\vec{u}, \vec{v}) de F e a projecção ortogonal de \vec{u}_2 sobre F .

e ■ Indique um vector $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tal que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme uma base ortogonal de \mathbb{R}^3 .

GRUPO II

1 ■ Seja A uma matriz real do tipo 6×3 , cujas colunas são linearmente independentes. Indique quais as dimensões dos 4 espaços fundamentais de A : $\text{Lin}(A)$, $\text{Col}(A)$, $\text{Ker}(A)$ e $\text{Ker}(A^T)$.

2 ■ Considere a transformação linear $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que consiste numa rotação de um ângulo $\theta = \pi$ em torno da origem, seguida de uma simetria relativamente ao eixo dos yy .

a ■ Determine a imagem por f do quadrado $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ de vértices $V_1 = [0 \ 0]^T$,

$V_2 = [0 \ 1]^T$, $V_3 = [1 \ 0]^T$ e $V_4 = [1 \ 1]^T$.

b ■ Mostre que f coincide com a simetria em relação ao eixo dos xx .

3 ■ Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a ■ Determine os subespaços próprios de A .

b ■ Determine uma matriz invertível T tal que $T^{-1}AT$ seja uma matriz diagonal.

c ■ Aproveite a alínea anterior para determinar A^8 .

4 ■ Sejam \vec{u} e \vec{v} vectores não nulos de um espaço vectorial real com produto interno. Mostre que:

a ■ $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$. Interprete geometricamente.

b ■ O vector $\vec{w} = \|\vec{v}\|\vec{u} + \|\vec{u}\|\vec{v}$ divide ao meio o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} .

5 ■ Considere o intervalo $I = [-1, 1]$ e o espaço vectorial real $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ das funções reais definidas e contínuas no intervalo I , com o produto interno

$$f \cdot g = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt.$$

a ■ Mostre que a sequência de funções $v = (1, t, t^2)$ é linearmente independente.

b ■ Obtenha de v uma sequência ortogonal.

FIM

Cotações

	Grupo I				Grupo II				
	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5
a	0,5	1,0	1,0	0,5	1,0	1,0	1,5	1,0	1,0
b	0,5		1,0	0,5		1,0	1,0	1,0	1,5
c				1,0			1,0		
d				1,5					
e				1,5					

ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

Resolução do Teste Final

09 de Julho de 2008

Ano Lectivo: 2007 - 2008

Semestre: Verão



ISEL ■ DEETC Secção de Matemática ■ ALGA

Grupo I

1 ■ A forma escalonada reduzida de uma matriz real A é

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a ■ Resolva o sistema $AX = O$.

b ■ Seja C_j a coluna j de A , para $j = 1, 2, 3, 4$ e suponha que $B = C_1 + C_2$. Determine a solução geral do sistema $AX = B$.

Resposta

1a ■ Seja $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ a solução geral do sistema $AX = O$. A matriz escalonada reduzida mostra que a característica de A é $r = 2$ (portanto, o grau de indeterminação do sistema é $n - r = 4 - 2 = 2$) e que as incógnitas principais são x e z . Então, temos $x = y - 2w$ e $z = 2w$, pelo que a solução geral é da forma

$$(x, y, z, w) = (y - 2w, y, 2w, w) = y(1, 1, 0, 0) + w(-2, 0, 2, 1); y, w \in \mathbb{R}$$

1b ■ O sistema $AX = B$ nas incógnitas $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ pode escrever-se na forma (dita vectorial)

$$xC_1 + yC_2 + zC_3 + wC_4 = B$$

Como $B = C_1 + C_2 = 1C_1 + 1C_2 + 0C_3 + 0C_4$, segue-se que $(1, 1, 0, 0)$ é uma solução particular de $AX = B$. A solução geral será então, atendendo à alínea anterior,

$$\begin{aligned} (x, y, z, w) &= (1, 1, 0, 0) + y(1, 1, 0, 0) + w(-2, 0, 2, 1) \\ &= (1 + y)(1, 1, 0, 0) + w(-2, 0, 2, 1) \\ &= y'(1, 1, 0, 0) + w(-2, 0, 2, 1) \end{aligned} \quad ; y', w \in \mathbb{R}$$

Vemos, assim, que a solução de $AX = B$ constitui o subespaço vectorial

$$L((1, 1, 0, 0), (-2, 0, 2, 1)) \subset \mathbb{R}^4$$

que coincide com o espaço das soluções de $AX = O$ obtido na alínea anterior. Portanto, deverá ser $B = O$: a matriz completa $A' = [A|B]$ transforma-se por operações elementares sobre as suas linhas na matriz completa $A'' = [R|B']$ de um sistema equivalente ao dado (isto é, com as mesmas soluções) e a relação $B = C_1 + C_2$ entre a 5ª e coluna e as duas primeiras na matriz A' completa mantém-se ao longo do processo de condensação, pelo que na matriz reduzida final A'' se terá $B' = [1 \ 0 \ 0]^T + [-1 \ 0 \ 0]^T = [0 \ 0 \ 0]^T = O$.

2 ■ Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ k & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2k^2 \end{bmatrix}$. Determine o(s) valor(es) de $k \in \mathbb{R}$ de modo que A seja invertível.

Resposta

A matriz A é invertível sse $\det(A) \neq 0$. Ora, usando a regra de Sarrus,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ k & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2k^2 \end{vmatrix} = 2k^2 - k^2 - k - 2 = k^2 - k - 2$$

As raízes do polinómio obtido são $k = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow k = 2 \vee k = -1$. Então, A é invertível sse $\det(A) = (k - 2)(k + 1) \neq 0$, ou seja, $k \in \mathbb{R} \setminus \{2, -1\}$.

3 ■ Seja B uma matriz invertível de 3ª ordem tal que

$$B^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a ■ Calcule $\det(B)$.

b ■ Calcule B .

Resposta

3a ■ A igualdade dada equivale (multiplicando ambos os membros por B à esquerda) a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Daqui obtemos imediatamente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \det(B) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow -4 = -\det(B) \Leftrightarrow \det(B) = 4$$

3b ■ Sejam $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $V = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. A igualdade matricial obtida na alínea anterior pode escrever-se na forma $V = BU$ e, multiplicando ambos os membros desta pela

matriz U^{-1} à direita, vem:

$$B = VU^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A seguir, apresentamos o cálculo da inversa de U usada em cima:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow U^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4 ■ Considere, no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 (munido do produto interno canónico), os vectores

$$\vec{u}_1 = (0, 0, 1), \vec{u}_2 = (0, 1, 1) \text{ e } \vec{u}_3 = (1, 1, 1).$$

a ■ Prove que $u = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ é uma base de \mathbb{R}^3 .

b ■ Seja $F = L(\vec{u}_1, \vec{u}_3)$ o subespaço de \mathbb{R}^3 gerado por \vec{u}_1 e \vec{u}_3 . Caracterize os vectores $(x, y, z) \in F$ por meio de uma condição nas suas coordenadas x, y e z .

c ■ Determine uma base e a dimensão de F^\perp .

d ■ Determine uma base ortogonal (\vec{u}, \vec{v}) de F e a projecção ortogonal de \vec{u}_2 sobre F .

e ■ Indique um vector $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tal que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme uma base ortogonal de \mathbb{R}^3 .

Resposta

4a ■ Tratando-se de 3 vectores de \mathbb{R}^3 , bastará provar que não é nulo o determinante desses vectores, o qual foi já calculado no problema **2**,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Em alternativa, poderíamos mostrar que a matriz cujas linhas são os vectores de u tem característica igual a 3 ou ainda usar directamente a definição de independência linear.

4b ■ Como (\vec{u}_1, \vec{u}_3) é linearmente independente, um vector $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pertence a F sse $(\vec{u}_1, \vec{u}_3, \vec{v})$ for linearmente dependente. A característica da matriz de linhas $(\vec{u}_1, \vec{u}_3, \vec{v})$ deverá ser igual a 2:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & y-x & z-x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & y-x & 0 \end{bmatrix}$$

Para que a característica da matriz seja 2 deverá ser $y - x = 0$. Portanto,

$$F = \{(x, y, z): y - x = 0\}$$

Geometricamente, F é um plano passando pela origem.

4c ■ F^\perp é formado pelos vectores ortogonais a todos os vectores de F e sabemos que um vector de \mathbb{R}^3 é ortogonal a F sse for ortogonal a cada um dos vectores de uma qualquer base de F , a qual pode ser $(\vec{u}_1, \vec{u}_3) = ((0, 0, 1), (1, 1, 1))$. Então,

$$\begin{aligned} F^\perp &= \{(x, y, z): (0, 0, 1) \cdot (x, y, z) = 0 \wedge (1, 1, 1) \cdot (x, y, z) = 0\} \\ &= \{(x, y, z): z = 0 \wedge x + y + z = 0\} = \{(x, -x, 0): x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, -1, 0): x \in \mathbb{R}\} = L((1, -1, 0)) \end{aligned}$$

O vector $(1, -1, 0)$ gera F^\perp e não é nulo, logo constitui uma base de F^\perp e será $\dim(F^\perp) = 1$. Geometricamente, F^\perp é uma recta perpendicular ao plano F e passando pela origem.

4d ■ Temos $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 1$, pelo que a base (\vec{u}_1, \vec{u}_3) de F não é ortogonal. Para obtermos uma base ortogonal (\vec{u}, \vec{v}) de F , bastará usar o método de Gram-Schmidt:

$$\vec{u} = \vec{u}_1 = (0, 0, 1)$$

$$\vec{v} = \vec{u}_3 - \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u} = (1, 1, 1) - \frac{(1, 1, 1) \cdot (0, 0, 1)}{(0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1)} (0, 0, 1) = (1, 1, 1) - \frac{1}{1} (0, 0, 1) = (1, 1, 0)$$

Assim, uma base ortogonal de F será $(\vec{u}, \vec{v}) = ((0, 0, 1), (1, 1, 0))$.

Quanto à projecção ortogonal de \vec{u}_2 sobre F e atendendo a que a base (\vec{u}, \vec{v}) determinada anteriormente é ortogonal, teremos

$$\text{proj}_F \vec{u}_2 = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{u}_2 + \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}_2 = \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u} + \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{1}{1} (0, 0, 1) + \frac{1}{2} (1, 1, 0) = \frac{1}{2} (1, 1, 2)$$

4e ■ Como $F = L(\vec{u}_1, \vec{u}_3) = L(\vec{u}, \vec{v})$ e (\vec{u}, \vec{v}) já é ortogonal, bastará tomar qualquer vector $\vec{w} \in F^\perp \setminus \{\vec{0}\}$ para que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme uma base ortogonal de \mathbb{R}^3 . Assim, \vec{w} poderá ser o vector $(1, -1, 0)$ da base de F^\perp apresentado em **4c**.

Grupo II

1 ■ Seja A uma matriz real do tipo 6×3 , cujas colunas são linearmente independentes. Indique quais as dimensões dos 4 espaços fundamentais de A : $\text{Lin}(A)$, $\text{Col}(A)$, $\text{Ker}(A)$ e $\text{Ker}(A^T)$.

Resposta

- Como as 3 colunas de A são linearmente independentes, teremos $\dim(\text{Col}(A)) = 3$ (a característica r de A).
- A dimensão de $\text{Lin}(A)$ é sempre igual à de $\text{Col}(A)$, donde: $r = \dim(\text{Lin}(A)) = 3$.
- A dimensão de $\text{Ker}(A)$ é o grau de indeterminação do sistema homogêneo $AX = O$, isto é, o número de colunas n de A menos a sua característica r :

$$\dim(\text{Ker}(A)) = n - r = 3 - 3 = 0$$

No caso presente, o sistema homogêneo $AX = O$ é determinado e tem apenas a solução trivial $X = O$.

- A dimensão de $\text{Ker}(A^T)$ será o número de colunas de A^T (ou de linhas de A , $m = 6$) menos a característica de A^T (igual à de A , $r = 3$): $\dim(\text{Ker}(A^T)) = m - r = 6 - 3 = 3$.

2 ■ Considere a transformação linear $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que consiste numa rotação de um ângulo $\theta = \pi$ em torno da origem, seguida de uma simetria relativamente ao eixo dos yy .

a ■ Determine a imagem por f do quadrado $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ de vértices $V_1 = [0 \ 0]^T$, $V_2 = [0 \ 1]^T$, $V_3 = [1 \ 0]^T$ e $V_4 = [1 \ 1]^T$.

b ■ Mostre que f coincide com a simetria em relação ao eixo dos xx .

Resposta

2a ■ Sejam $c = ((1, 0), (0, 1))$ a base canónica de \mathbb{R}^2 e ainda $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\sigma_y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ respectivamente a rotação e a simetria referidas no enunciado. Então:

$$\begin{cases} r(1, 0) = (-1, 0) \\ r(0, 1) = (0, -1) \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_y(1, 0) = (-1, 0) \\ \sigma_y(0, 1) = (0, 1) \end{cases}$$

As matrizes de r e de σ_y na base canónica de \mathbb{R}^2 serão:

$$M_c(r) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I_2 \text{ e } M_c(\sigma_y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ora $f = \sigma_y \circ r$ e, portanto

$$M_c(f) = M_c(\sigma_y)M_c(r) = -\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A imagem do quadrado $Q = [V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4]$ por meio de f será

$$f(Q) = M_c(f)Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [W_1 \ W_2 \ W_3 \ W_4]$$

Trata-se de outro quadrado de vértices

$$W_1 = V_1 = [0 \ 0]^T, W_2 = -V_2 = [0 \ -1]^T, W_3 = V_3 = [1 \ 0]^T \text{ e } W_4 = [1 \ -1]^T$$

2b ■ Seja $\sigma_x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a simetria em relação ao eixo dos xx . Então

$$\begin{cases} \sigma_x(1, 0) = (1, 0) \\ \sigma_x(0, 1) = (0, -1) \end{cases}$$

Daqui se conclui que a matriz de σ_x na base canónica é $M_c(\sigma_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, a qual coincide com a matriz de f determinada na alínea anterior, o que mostra que $\sigma_x = f$.

3 ■ Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a ■ Determine os subespaços próprios de A .

b ■ Determine uma matriz invertível T tal que $T^{-1}AT$ seja uma matriz diagonal.

c ■ Aproveite a alínea anterior para determinar A^8 .

Resposta

3a ■ O polinómio característico de A é

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 0 & -1 \\ -5 & 1 - \lambda & -3 \\ 2 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 - 2(\lambda - 1) = (\lambda - 1)(-(\lambda + 2)(\lambda - 1) - 2) \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda + \lambda^2) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

O espectro de A é, pois, $\mathcal{E}(A) = \{-1, 1, 0\}$. Como existem 3 valores próprios distintos e algebricamente simples, podemos concluir que as multiplicidades geométricas valem todas 1. Como a soma destas é igual a 3, A é diagonalizável (todavia não é invertível, visto que 0 é um valor próprio). Para determinar os vectores próprios de A , temos que resolver os sistemas simplesmente indeterminados $(A - \lambda I_3)X = O$, para $\lambda \in \mathcal{E}(A)$:

• Para $\lambda = -1$, temos

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Daqui se conclui que os vectores próprios são

$$(x, y, z) = (-z, -z, z) = z(-1, -1, 1); z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

O subespaço próprio de A associado a $\lambda = -1$ é

$$E_{-1}(A) = L((-1, -1, 1))$$

- Para $\lambda = 1$, temos

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -5 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Daqui se conclui que os vectores próprios são

$$(x, y, z) = (0, y, 0) = y(0, 1, 0); y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

O subespaço próprio de A associado a $\lambda = 1$ é

$$E_1(A) = L((0, 1, 0))$$

- Para $\lambda = 0$, temos

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Daqui se conclui que os vectores próprios são

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z, z\right) = \frac{1}{2}z(-1, 1, 2); z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

O subespaço próprio de A associado a $\lambda = 0$ é

$$E_0(A) = L((-1, 1, 2))$$

3b ■ A matriz T cujas colunas são os vectores próprios de A anteriormente determinados $((-1, -1, 1), (0, 1, 0), (-1, 1, 2))$ diagonalizará A (esta matriz não é única), isto é, teremos $T^{-1}AT = \text{diag}(-1, 1, 0)$, como se pede no enunciado:

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3c ■ Começemos por observar que a potência de expoente natural m de uma matriz diagonal $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ é, como facilmente se reconhece,

$$D^m = \text{diag}(\lambda_1^m, \lambda_2^m, \dots, \lambda_n^m)$$

Seja então $D = \text{diag}(-1, 1, 0)$. Da relação $D = T^{-1}AT$ deduzimos a relação

$$A = TDT^{-1}$$

Então,

$$A^8 = \underbrace{TDT^{-1}TDT^{-1} \dots TDT^{-1}}_{\substack{I_3 \\ 8 \text{ factores}}} = TD^8T^{-1}$$

No caso vertente, teremos $D^8 = \text{diag}((-1)^8, 1^8, 0) = \text{diag}(1, 1, 0)$ e portanto:

$$\begin{aligned} A^8 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Apresentamos, de seguida, o cálculo da matriz T^{-1} usada em cima:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4 ■ Sejam \vec{u} e \vec{v} vectores não nulos de um espaço vectorial real com produto interno. Mostre que:

a ■ $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$. Interprete geometricamente.

b ■ O vector $\vec{w} = \|\vec{v}\|\vec{u} + \|\vec{u}\|\vec{v}$ divide ao meio o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} .

Resposta

4a ■ Temos, atendendo às propriedades algébricas do produto interno e ao facto de se tratar de um espaço vectorial real (o que implica a *comutatividade* do produto interno):

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| &\Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \Leftrightarrow \\ \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} &= \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \Leftrightarrow 4\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \end{aligned}$$

Geometricamente a equivalência anterior significa que “...as diagonais de um paralelogramo são iguais se e só se o paralelogramo for rectângulo”.

4b ■ Equivale a mostrar que $\text{ang}(\vec{u}, \vec{w}) = \text{ang}(\vec{w}, \vec{v})$ ou, equivalentemente,

$$\cos(\text{ang}(\vec{u}, \vec{w})) = \cos(\text{ang}(\vec{w}, \vec{v}))$$

Segue-se a demonstração:

$$\begin{aligned} \cos(\text{ang}(\vec{u}, \vec{w})) &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\| \|\vec{w}\|} = \frac{\vec{u} \cdot (\|\vec{v}\|\vec{u} + \|\vec{u}\|\vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{w}\|} = \frac{\|\vec{v}\|\vec{u} \cdot \vec{u} + \|\vec{u}\|\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{w}\|} \\ &= \frac{\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{u}\|\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{w}\|} = \frac{\|\vec{v}\|\|\vec{u}\| + \vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{w}\|} \\ \cos(\text{ang}(\vec{w}, \vec{v})) &= \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{w}\| \|\vec{v}\|} = \frac{(\|\vec{v}\|\vec{u} + \|\vec{u}\|\vec{v}) \cdot \vec{v}}{\|\vec{w}\| \|\vec{v}\|} = \frac{\|\vec{v}\|\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{u}\|\vec{v} \cdot \vec{v}}{\|\vec{w}\| \|\vec{v}\|} \\ &= \frac{\|\vec{v}\|\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|^2}{\|\vec{w}\| \|\vec{v}\|} = \frac{\|\vec{v}\|\|\vec{u}\| + \vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{w}\|} \end{aligned}$$

5 ■ Considere o intervalo $I = [-1, 1]$ e o espaço vectorial real $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ das funções reais definidas e contínuas no intervalo I , com o produto interno

$$f \cdot g = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt.$$

a ■ Mostre que a sequência de funções $v = (1, t, t^2)$ é linearmente independente.

b ■ Obtenha de v uma sequência ortogonal.

Resposta

5a ■ Determinemos o Wronskiano de v

$$W_v(t) = \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ 1' & t' & (t^2)' \\ 1'' & t'' & (t^2)'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Como o Wronskiano não é idênticamente nulo em I , a lista v é linearmente independente.

5b ■ Usamos o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para transformar a lista de funções dada $v = (v_1, v_2, v_3)$ numa lista $w = (w_1, w_2, w_3)$ ortogonal:

$$\begin{cases} w_1(t) = v_1(t) = 1 \\ w_2(t) = v_2(t) - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1(t) = t - 0 = t \\ w_3(t) = v_3(t) - \frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1(t) - \frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2(t) = t^2 - \frac{2/3}{2} 1 - 0 = t^2 - \frac{1}{3} \end{cases}$$

Segue-se o cálculo dos produtos internos necessários:

$$v_2 \cdot w_1 = \int_{-1}^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^1 = 0 \quad (v_1 \perp v_2)$$

$$w_1 \cdot w_1 = \int_{-1}^1 1 dt = [t]_{-1}^1 = 2$$

$$v_3 \cdot w_1 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

$$v_3 \cdot w_2 = \int_{-1}^1 t^3 dt = \left[\frac{t^4}{4} \right]_{-1}^1 = 0 \quad (v_2 \perp v_3)$$

$$w_2 \cdot w_2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

A sequência ortogonal resultante é, pois, $w = (1, t, t^2 - \frac{1}{3})$.