

**Instituto Superior de Engenharia de Lisboa**  
**LEIC ■ LEETC ■ LERCM**  
**Álgebra Linear e Geometria Analítica ■ Exame de 1ª Fase ■ 2008 Julho 09, 19:00h**

Resolva cada um dos Grupos I, II, III e IV em folhas separadas e identifique cada folha com o seu **nome completo** e **número de aluno**. O incumprimento destas regras pode conduzir ao anulamento da Prova.  
**Duração: 3h 00m**

**GRUPO I**

- 1 ■** A forma escalonada reduzida de uma matriz real  $A$  é

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- a ■** Resolva o sistema  $AX = O$ .  
**b ■** Seja  $C_j$  a coluna  $j$  de  $A$ , para  $j = 1, 2, 3, 4$  e suponha que  $B = C_1 + C_2$ . Determine a solução geral do sistema  $AX = B$ .

- 2 ■** Considere a matriz real  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ k & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2k^2 \end{bmatrix}$ . Determine o(s) valor(es) de  $k \in \mathbb{R}$  de modo que  $A$  seja invertível.

**GRUPO II**

- 1 ■** Seja  $B$  uma matriz invertível de 3ª ordem tal que

$$B^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- a ■** Calcule  $\det(B)$ .  
**b ■** Calcule  $B$ .

- 2 ■** Considere, no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  (munido do produto interno canónico), os vectores

$$\vec{u}_1 = (0, 0, 1), \vec{u}_2 = (0, 1, 1) \text{ e } \vec{u}_3 = (1, 1, 1).$$

- a ■** Prove que  $u = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  é uma base de  $\mathbb{R}^3$ .  
**b ■** Seja  $F = L(\vec{u}_1, \vec{u}_3)$  o subespaço de  $\mathbb{R}^3$  gerado por  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_3$ . Caracterize os vectores  $(x, y, z) \in F$  por meio de uma condição nas suas coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ .  
**c ■** Determine uma base e a dimensão de  $F^\perp$ .  
**d ■** Determine uma base ortogonal  $(\vec{u}, \vec{v})$  de  $F$  e a projecção ortogonal de  $\vec{u}_2$  sobre  $F$ .  
**e ■** Indique um vector  $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$  tal que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  forme uma base ortogonal de  $\mathbb{R}^3$ .

### GRUPO III

- 1 ■ Seja  $A$  uma matriz real do tipo  $6 \times 3$ , cujas colunas são linearmente independentes. Indique quais as dimensões dos 4 espaços fundamentais de  $A$ :  $\text{Lin}(A)$ ,  $\text{Col}(A)$ ,  $\text{Ker}(A)$  e  $\text{Ker}(A^T)$ .
- 2 ■ Considere a transformação linear  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que consiste numa rotação de um ângulo  $\theta = \pi$  em torno da origem, seguida de uma simetria relativamente ao eixo dos  $yy$ .
  - a ■ Determine a imagem por  $f$  do quadrado  $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  de vértices  $V_1 = [0 \ 0]^T$ ,  $V_2 = [0 \ 1]^T$ ,  $V_3 = [1 \ 0]^T$  e  $V_4 = [1 \ 1]^T$ .
  - b ■ Mostre que  $f$  coincide com a simetria em relação ao eixo dos  $xx$ .

- 3 ■ Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- a ■ Determine os subespaços próprios de  $A$ .
- b ■ Determine uma matriz invertível  $T$  tal que  $T^{-1}AT$  seja uma matriz diagonal.
- c ■ Aproveite a alínea anterior para determinar  $A^8$ .

### GRUPO IV

- 1 ■ Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vectores não nulos de um espaço vectorial real com produto interno. Mostre que:
  - a ■  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$ . Interprete geometricamente.
  - b ■ O vector  $\vec{w} = \|\vec{v}\|\vec{u} + \|\vec{u}\|\vec{v}$  divide ao meio o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .
- 2 ■ Considere o intervalo  $I = [-1, 1]$  e o espaço vectorial real  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  das funções reais definidas e contínuas no intervalo  $I$ , com o produto interno

$$f \cdot g = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt.$$

- a ■ Mostre que a sequência de funções  $v = (1, t, t^2)$  é linearmente independente.
- b ■ Obtenha de  $v$  uma sequência ortogonal.

### FIM

### Cotações

	Grupo I		Grupo II		Grupo III			Grupo IV	
	Problema 1	Problema 2	Problema 1	Problema 2	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 1	Problema 2
a	0,5	1,0	1,0	0,5	1,0	1,0	1,5	1,0	1,0
b	0,5		1,0	0,5		1,0	1,0	1,0	1,5
c				1,0			1,0		
d				1,5					
e				1,5					

# **ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA**

**Resolução do Exame de 1ª Fase**

09 de Julho de 2008

---

Ano Lectivo: 2007 - 2008

Semestre: Verão



**ISEL ■ DEETC** Secção de Matemática ■ ALGA

**Grupo I**

**1 ■** A forma escalonada reduzida de uma matriz real  $A$  é

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**a ■** Resolva o sistema  $AX = O$ .

**b ■** Seja  $C_j$  a coluna  $j$  de  $A$ , para  $j = 1, 2, 3, 4$  e suponha que  $B = C_1 + C_2$ . Determine a solução geral do sistema  $AX = B$ .

**Resposta**

**1a ■** Seja  $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$  a solução geral do sistema  $AX = O$ . A matriz escalonada reduzida mostra que a característica de  $A$  é  $r = 2$  (portanto, o grau de indeterminação do sistema é  $n - r = 4 - 2 = 2$ ) e que as incógnitas principais são  $x$  e  $z$ . Então, temos  $x = y - 2w$  e  $z = 2w$ , pelo que a solução geral é da forma

$$(x, y, z, w) = (y - 2w, y, 2w, w) = y(1, 1, 0, 0) + w(-2, 0, 2, 1); y, w \in \mathbb{R}$$

**1b ■** O sistema  $AX = B$  nas incógnitas  $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$  pode escrever-se na forma (dita vectorial)

$$xC_1 + yC_2 + zC_3 + wC_4 = B$$

Como  $B = C_1 + C_2 = 1C_1 + 1C_2 + 0C_3 + 0C_4$ , segue-se que  $(1, 1, 0, 0)$  é uma solução particular de  $AX = B$ . A solução geral será então, atendendo à alínea anterior,

$$\begin{aligned} (x, y, z, w) &= (1, 1, 0, 0) + y(1, 1, 0, 0) + w(-2, 0, 2, 1) \\ &= (1 + y)(1, 1, 0, 0) + w(-2, 0, 2, 1) \\ &= y'(1, 1, 0, 0) + w(-2, 0, 2, 1) \end{aligned} \quad ; y', w \in \mathbb{R}$$

Vemos, assim, que a solução de  $AX = B$  constitui o subespaço vectorial

$$L((1, 1, 0, 0), (-2, 0, 2, 1)) \subset \mathbb{R}^4$$

que coincide com o espaço das soluções de  $AX = O$  obtido na alínea anterior. Portanto, deverá ser  $B = O$ : a matriz completa  $A' = [A|B]$  transforma-se por operações elementares sobre as suas linhas na matriz completa  $A'' = [R|B']$  de um sistema equivalente ao dado (isto é, com as mesmas soluções) e a relação  $B = C_1 + C_2$  entre a 5ª e coluna e as duas primeiras na matriz  $A'$  completa mantém-se ao longo do processo de condensação, pelo que na matriz reduzida final  $A''$  se terá  $B' = [1 \ 0 \ 0]^T + [-1 \ 0 \ 0]^T = [0 \ 0 \ 0]^T = O$ .

**2 ■** Considere a matriz real  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ k & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2k^2 \end{bmatrix}$ . Determine o(s) valor(es) de  $k \in \mathbb{R}$  de modo que  $A$  seja invertível.

**Resposta**

A matriz  $A$  é invertível sse  $\det(A) \neq 0$ . Ora, usando a regra de Sarrus,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ k & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2k^2 \end{vmatrix} = 2k^2 - k^2 - k - 2 = k^2 - k - 2$$

As raízes do polinómio obtido são  $k = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow k = 2 \vee k = -1$ . Então,  $A$  é invertível sse  $\det(A) = (k - 2)(k + 1) \neq 0$ , ou seja,  $k \in \mathbb{R} \setminus \{2, -1\}$ .

**Grupo II**

**1 ■** Seja  $B$  uma matriz invertível de 3ª ordem tal que

$$B^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**a ■** Calcule  $\det(B)$ .

**b ■** Calcule  $B$ .

**Resposta**

**1a ■** A igualdade dada equivale (multiplicando ambos os membros por  $B$  à esquerda) a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Daqui obtemos imediatamente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \det(B) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow -4 = -\det(B) \Leftrightarrow \det(B) = 4$$

**1b ■** Sejam  $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  e  $V = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ . A igualdade matricial obtida na alínea anterior pode escrever-se na forma  $V = BU$  e, multiplicando ambos os membros desta pela matriz  $U^{-1}$  à direita, vem:

$$B = VU^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A seguir, apresentamos o cálculo da inversa de  $U$  usada em cima:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow U^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**2 ■** Considere, no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  (munido do produto interno canónico), os vectores

$$\vec{u}_1 = (0, 0, 1), \vec{u}_2 = (0, 1, 1) \text{ e } \vec{u}_3 = (1, 1, 1).$$

**a ■** Prove que  $u = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  é uma base de  $\mathbb{R}^3$ .

**b ■** Seja  $F = L(\vec{u}_1, \vec{u}_3)$  o subespaço de  $\mathbb{R}^3$  gerado por  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_3$ . Caracterize os vectores  $(x, y, z) \in F$  por meio de uma condição nas suas coordenadas  $x, y$  e  $z$ .

**c ■** Determine uma base e a dimensão de  $F^\perp$ .

**d ■** Determine uma base ortogonal  $(\vec{u}, \vec{v})$  de  $F$  e a projecção ortogonal de  $\vec{u}_2$  sobre  $F$ .

**e ■** Indique um vector  $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$  tal que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  forme uma base ortogonal de  $\mathbb{R}^3$ .

### Resposta

**2a ■** Tratando-se de 3 vectores de  $\mathbb{R}^3$ , bastará provar que não é nulo o determinante desses vectores, o qual foi já calculado no problema **2**,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Em alternativa, poderíamos mostrar que a matriz cujas linhas são os vectores de  $u$  tem característica igual a 3 ou ainda usar directamente a definição de independência linear.

**2b ■** Como  $(\vec{u}_1, \vec{u}_3)$  é linearmente independente, um vector  $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  pertence a  $F$  sse  $(\vec{u}_1, \vec{u}_3, \vec{v})$  for linearmente dependente. A característica da matriz de linhas  $(\vec{u}_1, \vec{u}_3, \vec{v})$  deverá ser igual a 2:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & y-x & z-x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & y-x & 0 \end{bmatrix}$$

Para que a característica da matriz seja 2 deverá ser  $y - x = 0$ . Portanto,

$$F = \{(x, y, z): y - x = 0\}$$

Geometricamente,  $F$  é um plano passando pela origem.

**2c ■**  $F^\perp$  é formado pelos vectores ortogonais a todos os vectores de  $F$  e sabemos que um vector de  $\mathbb{R}^3$  é ortogonal a  $F$  sse for ortogonal a cada um dos vectores de uma qualquer base de  $F$ , a qual pode ser  $(\vec{u}_1, \vec{u}_3) = ((0, 0, 1), (1, 1, 1))$ . Então,

$$\begin{aligned} F^\perp &= \{(x, y, z): (0, 0, 1) \cdot (x, y, z) = 0 \wedge (1, 1, 1) \cdot (x, y, z) = 0\} \\ &= \{(x, y, z): z = 0 \wedge x + y + z = 0\} = \{(x, -x, 0): x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, -1, 0): x \in \mathbb{R}\} = L((1, -1, 0)) \end{aligned}$$

O vector  $(1, -1, 0)$  gera  $F^\perp$  e não é nulo, logo constitui uma base de  $F^\perp$  e será  $\dim(F^\perp) = 1$ . Geometricamente,  $F^\perp$  é uma recta perpendicular ao plano  $F$  e passando pela origem.



**2d ■** Temos  $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 1$ , pelo que a base  $(\vec{u}_1, \vec{u}_3)$  de  $F$  não é ortogonal. Para obtermos uma base ortogonal  $(\vec{u}, \vec{v})$  de  $F$ , bastará usar o método de Gram-Schmidt:

$$\vec{u} = \vec{u}_1 = (0, 0, 1)$$

$$\vec{v} = \vec{u}_3 - \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u} = (1, 1, 1) - \frac{(1, 1, 1) \cdot (0, 0, 1)}{(0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1)} (0, 0, 1) = (1, 1, 1) - \frac{1}{1} (0, 0, 1) = (1, 1, 0)$$

Assim, uma base ortogonal de  $F$  será  $(\vec{u}, \vec{v}) = ((0, 0, 1), (1, 1, 0))$ .

Quanto à projecção ortogonal de  $\vec{u}_2$  sobre  $F$  e atendendo a que a base  $(\vec{u}, \vec{v})$  determinada anteriormente é ortogonal, teremos

$$\text{proj}_F \vec{u}_2 = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{u}_2 + \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}_2 = \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u} + \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{1}{1} (0, 0, 1) + \frac{1}{2} (1, 1, 0) = \frac{1}{2} (1, 1, 2)$$

**2e ■** Como  $F = L(\vec{u}_1, \vec{u}_3) = L(\vec{u}, \vec{v})$  e  $(\vec{u}, \vec{v})$  já é ortogonal, bastará tomar qualquer vector  $\vec{w} \in F^\perp \setminus \{\vec{0}\}$  para que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  forme uma base ortogonal de  $\mathbb{R}^3$ . Assim,  $\vec{w}$  poderá ser o vector  $(1, -1, 0)$  da base de  $F^\perp$  apresentado em **4c**.

**Grupo III**

**1 ■** Seja  $A$  uma matriz real do tipo  $6 \times 3$ , cujas colunas são linearmente independentes. Indique quais as dimensões dos 4 espaços fundamentais de  $A$ :  $\text{Lin}(A)$ ,  $\text{Col}(A)$ ,  $\text{Ker}(A)$  e  $\text{Ker}(A^T)$ .

**Resposta**

- Como as 3 colunas de  $A$  são linearmente independentes, teremos  $\dim(\text{Col}(A)) = 3$  (a característica  $r$  de  $A$ ).
- A dimensão de  $\text{Lin}(A)$  é sempre igual à de  $\text{Col}(A)$ , donde:  $r = \dim(\text{Lin}(A)) = 3$ .
- A dimensão de  $\text{Ker}(A)$  é o grau de indeterminação do sistema homogêneo  $AX = O$ , isto é, o número de colunas  $n$  de  $A$  menos a sua característica  $r$ :

$$\dim(\text{Ker}(A)) = n - r = 3 - 3 = 0$$

No caso presente, o sistema homogêneo  $AX = O$  é determinado e tem apenas a solução trivial  $X = O$ .

- A dimensão de  $\text{Ker}(A^T)$  será o número de colunas de  $A^T$  (ou de linhas de  $A$ ,  $m = 6$ ) menos a característica de  $A^T$  (igual à de  $A$ ,  $r = 3$ ):  $\dim(\text{Ker}(A^T)) = m - r = 6 - 3 = 3$ .

**2 ■** Considere a transformação linear  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que consiste numa rotação de um ângulo  $\theta = \pi$  em torno da origem, seguida de uma simetria relativamente ao eixo dos  $yy$ .

**a ■** Determine a imagem por  $f$  do quadrado  $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  de vértices  $V_1 = [0 \ 0]^T$ ,  $V_2 = [0 \ 1]^T$ ,  $V_3 = [1 \ 0]^T$  e  $V_4 = [1 \ 1]^T$ .

**b ■** Mostre que  $f$  coincide com a simetria em relação ao eixo dos  $xx$ .

**Resposta**

**2a ■** Sejam  $c = ((1, 0), (0, 1))$  a base canónica de  $\mathbb{R}^2$  e ainda  $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\sigma_y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  respectivamente a rotação e a simetria referidas no enunciado. Então:

$$\begin{cases} r(1, 0) = (-1, 0) \\ r(0, 1) = (0, -1) \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_y(1, 0) = (-1, 0) \\ \sigma_y(0, 1) = (0, 1) \end{cases}$$

As matrizes de  $r$  e de  $\sigma_y$  na base canónica de  $\mathbb{R}^2$  serão:

$$M_c(r) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I_2 \text{ e } M_c(\sigma_y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ora  $f = \sigma_y \circ r$  e, portanto

$$M_c(f) = M_c(\sigma_y)M_c(r) = -\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A imagem do quadrado  $Q = [V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4]$  por meio de  $f$  será

$$f(Q) = M_c(f)Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [W_1 \ W_2 \ W_3 \ W_4]$$

Trata-se de outro quadrado de vértices

$$W_1 = V_1 = [0 \ 0]^T, W_2 = -V_2 = [0 \ -1]^T, W_3 = V_3 = [1 \ 0]^T \text{ e } W_4 = [1 \ -1]^T$$

**2b ■** Seja  $\sigma_x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a simetria em relação ao eixo dos  $xx$ . Então

$$\begin{cases} \sigma_x(1, 0) = (1, 0) \\ \sigma_x(0, 1) = (0, -1) \end{cases}$$

Daqui se conclui que a matriz de  $\sigma_x$  na base canónica é  $M_c(\sigma_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ , a qual coincide com a matriz de  $f$  determinada na alínea anterior, o que mostra que  $\sigma_x = f$ .

**3 ■** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**a ■** Determine os subespaços próprios de  $A$ .

**b ■** Determine uma matriz invertível  $T$  tal que  $T^{-1}AT$  seja uma matriz diagonal.

**c ■** Aproveite a alínea anterior para determinar  $A^8$ .

### Resposta

**3a ■** O polinómio característico de  $A$  é

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & -1 \\ -5 & 1-\lambda & -3 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda+2)(\lambda-1)^2 - 2(\lambda-1) = (\lambda-1)(-(\lambda+2)(\lambda-1) - 2) \\ &= -(\lambda-1)(\lambda+\lambda^2) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda+1) \end{aligned}$$

O espectro de  $A$  é, pois,  $\mathcal{E}(A) = \{-1, 1, 0\}$ . Como existem 3 valores próprios distintos e algebricamente simples, podemos concluir que as multiplicidades geométricas valem todas 1. Como a soma destas é igual a 3,  $A$  é diagonalizável (todavia não é invertível, visto que 0 é um valor próprio). Para determinar os vectores próprios de  $A$ , temos que resolver os sistemas simplesmente indeterminados  $(A - \lambda I_3)X = O$ , para  $\lambda \in \mathcal{E}(A)$ :

• Para  $\lambda = -1$ , temos

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Daqui se conclui que os vectores próprios são

$$(x, y, z) = (-z, -z, z) = z(-1, -1, 1); z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

O subespaço próprio de  $A$  associado a  $\lambda = -1$  é

$$E_{-1}(A) = L((-1, -1, 1))$$

- Para  $\lambda = 1$ , temos

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -5 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Daqui se conclui que os vectores próprios são

$$(x, y, z) = (0, y, 0) = y(0, 1, 0); y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

O subespaço próprio de  $A$  associado a  $\lambda = 1$  é

$$E_1(A) = L((0, 1, 0))$$

- Para  $\lambda = 0$ , temos

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Daqui se conclui que os vectores próprios são

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z, z\right) = \frac{1}{2}z(-1, 1, 2); z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

O subespaço próprio de  $A$  associado a  $\lambda = 0$  é

$$E_0(A) = L((-1, 1, 2))$$

**3b ■** A matriz  $T$  cujas colunas são os vectores próprios de  $A$  anteriormente determinados  $((-1, -1, 1), (0, 1, 0), (-1, 1, 2))$  diagonalizará  $A$  (esta matriz não é única), isto é, teremos  $T^{-1}AT = \text{diag}(-1, 1, 0)$ , como se pede no enunciado:

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**3c ■** Comecemos por observar que a potência de expoente natural  $m$  de uma matriz diagonal  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  é, como facilmente se reconhece,

$$D^m = \text{diag}(\lambda_1^m, \lambda_2^m, \dots, \lambda_n^m)$$

Seja então  $D = \text{diag}(-1, 1, 0)$ . Da relação  $D = T^{-1}AT$  deduzimos a relação

$$A = TDT^{-1}$$

Então,

$$A^8 = \underbrace{TDT^{-1}TDT^{-1} \dots TDT^{-1}}_{\substack{I_3 \\ 8 \text{ factores}}} = TD^8T^{-1}$$

No caso vertente, teremos  $D^8 = \text{diag}((-1)^8, 1^8, 0) = \text{diag}(1, 1, 0)$  e portanto:

$$\begin{aligned} A^8 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Apresentamos, de seguida, o cálculo da matriz  $T^{-1}$  usada em cima:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Grupo IV**

**1 ■** Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vectores não nulos de um espaço vectorial real com produto interno. Mostre que:

**a ■**  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$ . Interprete geometricamente.

**b ■** O vector  $\vec{w} = \frac{\|\vec{v}\|\vec{u} + \|\vec{u}\|\vec{v}}{\|\vec{u} + \vec{v}\|}$  divide ao meio o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

**Resposta**

**1a ■** Temos, atendendo às propriedades algébricas do produto interno e ao facto de se tratar de um espaço vectorial real (o que implica a *comutatividade* do produto interno):

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| &\Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \Leftrightarrow \\ &\vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \Leftrightarrow 4\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \end{aligned}$$

Geometricamente a equivalência anterior significa que “...as diagonais de um paralelogramo são iguais se e só se o paralelogramo for rectângulo”.

**1b ■** Equivale a mostrar que  $\text{ang}(\vec{u}, \vec{w}) = \text{ang}(\vec{w}, \vec{v})$  ou, equivalentemente,

$$\cos(\text{ang}(\vec{u}, \vec{w})) = \cos(\text{ang}(\vec{w}, \vec{v}))$$

Segue-se a demonstração:

$$\begin{aligned} \cos(\text{ang}(\vec{u}, \vec{w})) &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\| \|\vec{w}\|} = \frac{\vec{u} \cdot (\|\vec{v}\|\vec{u} + \|\vec{u}\|\vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{w}\|} = \frac{\|\vec{v}\|\vec{u} \cdot \vec{u} + \|\vec{u}\|\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{w}\|} \\ &= \frac{\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{u}\|\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{w}\|} = \frac{\|\vec{v}\|\|\vec{u}\| + \vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{w}\|} \\ \cos(\text{ang}(\vec{w}, \vec{v})) &= \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{w}\| \|\vec{v}\|} = \frac{(\|\vec{v}\|\vec{u} + \|\vec{u}\|\vec{v}) \cdot \vec{v}}{\|\vec{w}\| \|\vec{v}\|} = \frac{\|\vec{v}\|\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{u}\|\vec{v} \cdot \vec{v}}{\|\vec{w}\| \|\vec{v}\|} \\ &= \frac{\|\vec{v}\|\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|^2}{\|\vec{w}\| \|\vec{v}\|} = \frac{\|\vec{v}\|\|\vec{u}\| + \vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{w}\|} \end{aligned}$$

**2 ■** Considere o intervalo  $I = [-1, 1]$  e o espaço vectorial real  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  das funções reais definidas e contínuas no intervalo  $I$ , com o produto interno

$$f \cdot g = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt.$$

**a ■** Mostre que a sequência de funções  $v = (1, t, t^2)$  é linearmente independente.

**b ■** Obtenha de  $v$  uma sequência ortogonal.

### Resposta

**2a ■** Determinemos o Wronskiano de  $v$

$$W_v(t) = \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ 1' & t' & (t^2)' \\ 1'' & t'' & (t^2)'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Como o Wronskiano não é idênticamente nulo em  $I$ , a lista  $v$  é linearmente independente.

**2b ■** Usamos o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para transformar a lista de funções dada  $v = (v_1, v_2, v_3)$  numa lista  $w = (w_1, w_2, w_3)$  ortogonal:

$$\begin{cases} w_1(t) = v_1(t) = 1 \\ w_2(t) = v_2(t) - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1(t) = t - 0 = t \\ w_3(t) = v_3(t) - \frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1(t) - \frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2(t) = t^2 - \frac{2/3}{2} 1 - 0 = t^2 - \frac{1}{3} \end{cases}$$

Segue-se o cálculo dos produtos internos necessários:

$$\begin{aligned} v_2 \cdot w_1 &= \int_{-1}^1 t dt = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^1 = 0 & (v_1 \perp v_2) \\ w_1 \cdot w_1 &= \int_{-1}^1 1 dt = [t]_{-1}^1 = 2 \\ v_3 \cdot w_1 &= \int_{-1}^1 t^2 dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} \\ v_3 \cdot w_2 &= \int_{-1}^1 t^3 dt = \left[ \frac{t^4}{4} \right]_{-1}^1 = 0 & (v_2 \perp v_3) \\ w_2 \cdot w_2 &= \int_{-1}^1 t^2 dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

A sequência ortogonal resultante é, pois,  $w = (1, t, t^2 - \frac{1}{3})$ .