

Instituto Superior de Engenharia de Lisboa
LEETC ■ LEIC ■ LERCM
Álgebra Linear e Geometria Analítica ■ Repetição do 3º Teste ■ 2009 Janeiro 21, 19:00h

Resolva cada um dos Problemas I, II, III e IV em folhas separadas.
Identifique cada folha com o seu **número de aluno, nome completo e turma**.
A inobservância destas normas pode conduzir ao anulamento do(s) Problema(s) não identificado(s).
Duração: 1h 30m

PROBLEMA I

Indique, justificando as suas respostas, se são lineares as funções f e g_A seguintes entre os espaços lineares reais indicados:

- a ■** $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; f(x, y, z) = (2y, z + 1)$.
b ■ $g_A: \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}; g_A(X) \mapsto AX - XA$, onde $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ é uma matriz constante e $n \in \mathbb{N}$.

PROBLEMA II

Considere a função linear $g: \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = x + w$$

- a ■** Determine o núcleo e a imagem de g , bem como uma base e a dimensão destes subespaços. Verifique o teorema que envolve estas dimensões.
b ■ Escreva a matriz G de g em relação à base $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$ de $\mathbb{R}^{2,2}$ e à base canónica de \mathbb{R} .
c ■ Usando a matriz calculada na alínea anterior, determine a imagem por g de $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

PROBLEMA III

Seja A uma matriz complexa quadrada de ordem $n > 1$:

- a ■** Mostre que A e A^T têm o mesmo polinómio característico e, portanto, os mesmos valores próprios.
b ■ Considerando $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, mostre que os subespaços próprios de A e de A^T associados aos mesmos valores próprios não são iguais.
c ■ Averigue se a matriz A da alínea anterior é diagonalizável.

PROBLEMA IV

Considere as matrizes reais $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$. Sem efectuar quaisquer cálculos, justifique que A e B são ambas diagonalizáveis e indique matrizes diagonais D_A e D_B semelhantes a A e B respectivamente.

FIM

Cotações

	Problema I	Problema II	Problema III	Problema IV
a	2,5	3,0	2,0	3,0
b	2,5	1,5	2,5	
c		1,5	1,5	