

Resolva cada um dos Grupos I, II, III, IV e V em folhas separadas.
Identifique cada folha com o seu **número de aluno, nome completo e turma**.
A inobservância destas normas pode conduzir ao anulamento do(s) Grupo(s) não identificado(s).
Duração: 2h 30m

GRUPO I

- 1 ■** Considere o seguinte sistema de equações lineares, nas incógnitas reais (x, y, z) , onde a e b são parâmetros reais:

$$\begin{cases} x + ay + bz = 1 \\ a(b-1)y = a \\ x + ay + z = b^2 \end{cases}$$

- a ■** Discuta o sistema, em função dos valores dos parâmetros reais a e b .
b ■ Considere agora $a = b = 2$: neste caso, mostre que a matriz A dos coeficientes do sistema é invertível e, usando a sua inversa, determine a solução do sistema.

GRUPO II

- 1 ■** No espaço cartesiano real \mathbb{R}^5 , considere o subespaço

$$F = \{(a, b, c, d, e) : b - c = 0 \wedge a = b + d\}$$

- a ■** Indique, caso exista, um vector $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ que não pertença a F e tal que $b = c$.
b ■ Determine uma sequência geradora de F que não seja base de F .
c ■ Indique a dimensão de F .

- 2 ■** Sendo $x, y, z \in \mathbb{R}$, mostre que

$$\begin{vmatrix} x - y - z & 2x & 2x \\ 2y & y - x - z & 2y \\ 2z & 2z & z - x - y \end{vmatrix} = (x + y + z)^3.$$

GRUPO III

1 ■ Considere a função linear $g: \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = x + w$$

- a ■ Determine o núcleo e a imagem de g , bem como uma base e a dimensão destes subespaços. Verifique o teorema que envolve estas dimensões.
- b ■ Escreva a matriz G de g em relação à base $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$ de $\mathbb{R}^{2,2}$ e à base canónica de \mathbb{R} .
- c ■ Usando a matriz calculada na alínea anterior, determine a imagem por g de $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

GRUPO IV

- 1 ■ Seja A uma matriz complexa quadrada de ordem $n > 1$:
 - a ■ Mostre que A e A^T têm o mesmo polinómio característico e, portanto, os mesmos valores próprios.
 - b ■ Considerando $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, mostre que os subespaços próprios de A e de A^T associados aos mesmos valores próprios não são iguais.
 - c ■ Averigue se a matriz A da alínea anterior é diagonalizável.

GRUPO V

- 1 ■ Considere o espaço cartesiano real \mathbb{R}^2 dotado do produto interno canónico:
 - a ■ Mostre que a sequência de vectores $(\vec{u}, \vec{v}) = ((1, 2), (3, -2))$ não é ortonormada.
 - b ■ Determine o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} e a projecção ortogonal de \vec{u} sobre \vec{v} .
- 2 ■ Seja E um espaço vectorial com produto interno e \vec{u} e \vec{v} vectores de E . Mostre que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ se e só se \vec{u} e \vec{v} são ortogonais e interprete geometricamente esta proposição.

FIM

Cotações

	Grupo I	Grupo II		Grupo III	Grupo IV	Grupo V	
	Problema 1	Problema 1	Problema 2	Problema 1	Problema 1	Problema 1	Problema 2
a	2,0	1,0	2,0	2,0	1,5	0,5	1,0
b	2,0	1,0		1,0	2,0	1,0	
c		1,0		1,5	0,5		