

Resolva cada um dos Grupos I, II, III, IV e V em folhas separadas.
Identifique cada folha com o seu **número de aluno, nome completo e turma**.
A não observância destas normas pode conduzir ao anulamento do(s) Grupo(s) não identificado(s).
Duração: 1h 00m

GRUPO I

- 1 ■** Calcule o determinante da seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 2 ■** Sejam A e B matrizes reais quadradas de 3ª ordem invertíveis e tais que

$$\det(2A^{-1}) = \det(A^2(B^T)^{-1}) = 4$$

Calcule $\det(A)$ e $\det(B)$.

GRUPO II

- 1 ■** Considere o subespaço de \mathbb{R}^3 definido por

$$F = \{(a + b, -a - c, 2a + b + c) : a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

- a ■** Indique uma base e a dimensão de F .
b ■ Diga, justificando, se os vectores $\vec{u} = (2, 1, 1)$ e $\vec{v} = (1, -1, 3)$ pertencem a F e, em caso afirmativo, determine as suas *coordenadas* em relação à base de F que indicou na alínea anterior.

GRUPO III

- 1 ■** Considere, no espaço vectorial real \mathbb{R}^4 , a sequência de vectores

$$e = ((1, 1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 2, 3, -2), (0, 0, 1, -1))$$

- a ■** Mostre que e não é uma base de \mathbb{R}^4 . Obtenha uma base de \mathbb{R}^4 contendo o maior número possível de vectores de e .
b ■ Determine uma base e a dimensão do subespaço $E \subset \mathbb{R}^4$ gerado por e e caracterize os vectores $(x, y, z, w) \in E$ por meio de uma condição nas suas componentes x, y, z e w .

GRUPO IV

- 1 ■** Duas matrizes reais quadradas de ordem n dizem-se *semelhantes* se e só se existir uma matriz real T invertível de ordem n tal que $B = T^{-1}AT$.
- a ■** Se A e B são semelhantes, mostre que $\det(B) = \det(A)$. Justifique.
- b ■** Mais geralmente, mostre que, se A e B são semelhantes, para qualquer escalar real λ tem-se $\det(B - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n)$. Justifique.

GRUPO V

- 1 ■** Para cada um dos conjuntos seguintes, averigue se são *subespaços* dos espaços vectoriais reais indicados. Em caso afirmativo, determine uma *base* e a *dimensão* desses subespaços:
- a ■** $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 3\} \subset \mathbb{R}^2$.
- b ■** $B = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y - 2z = 0 \wedge 2x + z - 2w = 0\} \subset \mathbb{R}^4$.
- 2 ■** Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz real quadrada de ordem n , λ um escalar real e $E_\lambda(A)$ o subconjunto de \mathbb{R}^n definido por

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathbb{R}^n : AX = \lambda X\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Mostre que $E_\lambda(A)$ é um *subespaço* de \mathbb{R}^n e que $E_\lambda(A) \neq \{O\}$ se e só se o escalar λ satisfizer a igualdade $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Justifique devidamente.

FIM

Cotações

| | Grupo I | | Grupo II | Grupo III | Grupo IV | Grupo V | |
|---|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| | Problema 1 | Problema 2 | Problema 1 | Problema 1 | Problema 1 | Problema 1 | Problema 2 |
| a | 2,0 | 2,0 | 1,5 | 2,0 | 1,5 | 1,5 | 1,5 |
| b | | | 2,5 | 2,0 | 2,0 | 1,5 | |