

**Instituto Superior de Engenharia de Lisboa**  
**LEETC ■ LEIC ■ LERCM**  
**Álgebra Linear e Geometria Analítica ■ Teste Final ■ 2009 Julho 04, 10:00h**

Resolva cada um dos Grupos I, II, III e IV em folhas separadas.  
Identifique cada folha com o seu **número de aluno, nome completo e turma**.  
A inobservância destas normas pode conduzir ao anulamento do(s) Grupo(s) não identificado(s).  
**Duração: 2h 30m**

**GRUPO I**

1 ■ Seja  $A$  uma matriz tal que  $(3A - I_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

- a ■ Determine a matriz  $A$ .
- b ■ Calcule a matriz  $X$  tal que

$$(3A - I_2)X = B.$$

- 2 ■ Considere o seguinte sistema de equações lineares, nas incógnitas reais  $(x, y, z)$ , onde  $a$  e  $b$  são parâmetros reais:

$$\begin{cases} x + ay + bz = 1 \\ a(b - 1)y = a \\ x + ay + z = b^2 \end{cases}$$

- a ■ Discuta o sistema, em função dos valores dos parâmetros reais  $a$  e  $b$ .
- b ■ Considere agora  $a = b = 2$  e, neste caso, calcule o determinante de  $A$ , sendo  $A$  a matriz dos coeficientes do sistema. Diga ainda se  $A$  é invertível e conclua sobre a natureza do sistema.
- c ■ Resolva o sistema para  $a = 0$  e  $b = 1$ .

**GRUPO II**

- 1 ■ No espaço cartesiano real  $\mathbb{R}^3$ , considere o subespaço

$$F = \{(x, y, z) : 3x + y = 0\}$$

e a sequência  $s = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (2, -1, 1))$ .

- a ■ Mostre que é possível escrever o vector  $(1, -1, 0)$  de duas formas diferentes como combinação linear dos vectores de  $s$ .
- b ■ Determine uma base e a dimensão de  $F$ .
- c ■ Seja  $G$  o subespaço gerado por  $s$ . Indique uma base e a dimensão de  $G$  e caracterize os vectores  $(x, y, z) \in G$  por meio de uma condição em  $x, y$  e  $z$ .
- d ■ Determine o subespaço  $H = F \cap G$ , indicando uma base e a dimensão de  $H$ .
- e ■ Será  $F \cup G$  um subespaço de  $\mathbb{R}^3$ ? Justifique a resposta.

### GRUPO III

1 ■ Considere a função linear  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$\begin{cases} f(1, 0, 0) = (1, 0, -1) \\ f(0, 1, 0) = (0, -1, 2) \\ f(0, 0, 1) = (1, -1, 1) \end{cases}$$

- a ■ Determine  $f(x, y, z)$ , para qualquer  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- b ■ Determine o núcleo e a imagem de  $f$ , indicando uma base para cada um destes subespaços de  $\mathbb{R}^3$ . Determine ainda a nulidade e a característica de  $f$ .
- c ■ Determine a matriz de  $f$  em relação à base  $((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$  de  $\mathbb{R}^3$ .
- d ■ Diga, justificando, se  $f$  é um automorfismo de  $\mathbb{R}^3$ . Será  $\lambda = 0$  um valor próprio de  $f$ ? Justifique adequadamente a resposta.

2 ■ Considere o endomorfismo  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido por

$$g(x, y) = (8x + 18y, -3x - 7y).$$

- a ■ Determine a matriz  $G_c$  de  $g$  na base canônica.
- b ■ Determine os valores próprios de  $g$  e os respectivos subespaços próprios.
- c ■ Diga, justificando, se  $g$  é diagonalizável e, em caso afirmativo, determine uma matriz diagonal  $D$  e uma matriz invertível  $T$  tais que  $G_c = TDT^{-1}$ .
- d ■ Determine a matriz  $G_e$  de  $g$  na base  $e = ((0, 1), (1, 1))$  e verifique que  $G_c$  e  $G_e$  têm o mesmo determinante e o mesmo traço.

### GRUPO IV

1 ■ Considere o espaço cartesiano real  $\mathbb{R}^3$  dotado do produto interno canônico.

- a ■ Mostre que os vectores  $\vec{u} = (1, -2, 2)$  e  $\vec{v} = (2, 2, 1)$  são ortogonais e determine um vector  $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$  de modo que a sequência de vectores  $s = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  seja ortogonal. Obtenha de  $s$  uma sequência ortonormada.
- b ■ Diga se o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{e} = (2, 2, -1)$  é agudo ou obtuso e determine a projecção ortogonal de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{e}$ .

2 ■ Seja  $E$  um espaço vectorial real com produto interno e  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vectores de  $E$ . Mostre que  $\vec{u} + \vec{v} \perp \vec{u} - \vec{v}$  se e só se  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$  e interprete geometricamente este resultado.

### FIM

### Cotações

	Grupo I		Grupo II	Grupo III		Grupo IV	
	Problema 1	Problema 2	Problema 1	Problema 1	Problema 2	Problema 1	Problema 2
a	0,4	0,7	0,7	0,4	0,4	1,0	0,7
b	0,4	0,5	0,4	1,0	1,0	0,7	
c		0,5	1,0	1,0	0,4		
d			0,7	0,7	0,7		
e			0,7				