

1. Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a função linear tal que

$$\begin{cases} T(1, 0, 0) = (3, 0, 0) \\ T(0, 1, 0) = (0, 3, -2) \\ T(0, 0, 1) = (0, -2, 0) \end{cases}$$

- |             |   |
|-------------|---|
| 1.0 valores | a) Mostre que $(0, -1, -2)$ é vector próprio de $T$ e determine o correspondente valor próprio.   |
| 5.0 valores | b) Determine os restantes valores próprios e todos os subespaços próprios de $T$ .  |
| 2.0 valores | c) Determine uma matriz diagonal $\mathbf{D}$ e uma matriz ortogonal $\mathbf{Q}$ tais que $\mathbf{T} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$ (em que $\mathbf{T}$ é a representação de $T$ em relação à base canónica). |
| 2.0 valores | d) Determine a projecção do vector $\mathbf{u} = [0 \ 0 \ 2]^T$ sobre o subespaço próprio do maior valor próprio de $\mathbf{T}$ .  |

2. Dado o vector  $\mathbf{b} = [0 \ 2 \ 2]^T$  e a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine:

- |             |  |
|-------------|--|
| 1.5 valores | a) A solução de mínimo erro quadrático do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . |
| 1.5 valores | b) A matriz pseudo-inversa da matriz $\mathbf{A}$ .                            |
| 1.5 valores | c) A matriz de projecção ortogonal no espaço coluna de $\mathbf{A}$ .          |
| 1.5 valores | d) O vector do espaço coluna de $\mathbf{A}$ mais próximo de $\mathbf{b}$ .    |
- 4.0 valores 3. Determine a equação da recta que melhor se adapta ao conjunto de pontos de  $\mathbb{R}^2$   $(-2, 0)$ ,  $(0, 2)$  e  $(2, 2)$ , segundo um critério de minimização do erro quadrático cometido. Represente graficamente os pontos dados e a recta obtida.