

**Instituto Superior de Engenharia de Lisboa**  
**LEETC - Turma LT11N**  
**Álgebra Linear e Geometria Analítica ■ 1º MiniTeste ■ 2008 Abril 01, 20:00h**

Identifique a prova com o seu *nome completo, número de aluno e turma*.  
**Duração: 30 minutos**

**1 ■** Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- a ■** Mostre que  $A$  é invertível e determine  $A^{-1}$ .
- b ■** Indique o número de soluções do sistema  $A \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$  e resolva-o.

**2 ■** Determine a matriz  $X$  tal que

$$\left(\frac{1}{3}X\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

**3 ■** Sendo  $A, B, C$  e  $D$  matrizes invertíveis de ordem  $n$ , mostre que

$$(BC)^{-1}(BD^{-1})(A^{-1}D^{-1})^{-1}A^{-1} = C^{-1}$$

**4 ■** Seja  $A$  uma matriz complexa de ordem  $n$ . Mostre que:

- a ■** Se  $A$  é hermitiana e invertível, então  $A^{-1}$  é hermitiana.
- b ■** Se  $A$  e  $B$  são matrizes hermitianas permutáveis, então  $AB$  é hermitiana.
- c ■** Se  $A$  é hermitiana e invertível, então  $A^p$  é hermitiana, para todo o  $p \in \mathbb{Z}$ .

**FIM**

**Instituto Superior de Engenharia de Lisboa**  
**LEETC - Turma LT12D**  
**Álgebra Linear e Geometria Analítica ■ 1º MiniTeste ■ 2008 Abril 01, 15:30h**

Identifique a prova com o seu *nome completo, número de aluno e turma*.  
**Duração: 30 minutos**

- 1 ■** Usando o algoritmo de Gauss-Jordan uma única vez, resolva os dois sistemas de equações lineares seguintes

$$\begin{cases} x - y = -x \\ 2x - y + 1 = y - x \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$$

- 2 ■** Determine a matriz  $X$  tal que

$$\left(\frac{1}{2}X\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- 3 ■** Sendo  $A$ ,  $B$  e  $A - B$  matrizes invertíveis de ordem  $n$ , mostre que  $B^{-1} - A^{-1}$  é invertível e que

$$(B^{-1} - A^{-1})^{-1} = B(A - B)^{-1}A$$

- 4 ■** Uma matriz  $A$ , complexa de ordem  $n$ , diz-se *unitária* se e só se  $A^*A = I_n$ . Mostre que:

- a ■**  $A$  é unitária se e só se  $A^T \overline{A} = I_n$ .
- b ■** Se  $A$  é unitária, então  $A$  é invertível e  $A^{-1} = A^*$ .
- c ■** Se  $A$  é unitária,  $A^{-1}$  é unitária.
- d ■** Se  $A$  e  $B$  são unitárias, então  $AB$  é unitária.

**FIM**