

Instituto Superior de Engenharia de Lisboa

LEETC ■ LEIC ■ LERCM

Álgebra Linear e Geometria Analítica ■ Exame de 2ª Fase ■ 2009 Fevereiro 05, 10:00h

Resolva cada um dos Grupos I, II, III, IV e V em folhas separadas.

Identifique cada folha com o seu **número de aluno, nome completo e turma**.

A inobservância destas normas pode conduzir ao anulamento do(s) Grupo(s) não identificado(s).

Duração: 2h 30m

GRUPO I

- 1 ■ Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas reais x, y e z , no qual a e b são parâmetros reais:

$$\begin{cases} x - ay + z = b^2 - b \\ ax + y - z = b^2 - 1 \\ 7x - 4y + z = 0 \end{cases}$$

- a ■ Determine b , por forma a que o sistema seja homogéneo.
- b ■ Para o(s) valor(es) de b obtido(s) na alínea anterior, determine a de modo que o sistema tenha uma solução não trivial.
- c ■ Resolva o sistema, para $a = 2$ e $b = 1$.

GRUPO II

- 1 ■ No espaço cartesiano real \mathbb{R}^4 , considere a sequência

$$s = ((1, 0, -1, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, -1))$$

- a ■ Sem efectuar cálculos e justificando, mostre que s é linearmente independente.
- b ■ Determine o escalar real k de modo que $(-2, 1, k, 1)$ pertença ao subespaço $F = L(s)$.
- c ■ Construa uma base de \mathbb{R}^4 contendo todos os vectores de s . Obtenha ainda uma sequência geradora de F , linearmente dependente, contendo igualmente todos os vectores de s .
- d ■ Mostre que

$$F = \left\{ (x, y, z, w) : \begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & y & 1 & 0 \\ -1 & z & 1 & 1 \\ 0 & w & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \right\}$$

GRUPO III

- 1 ■ Considere a função linear $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(x, y, z, w) = (x + w, z)$$

- a ■ Determine o núcleo e a imagem de g , bem como uma base e a dimensão destes subespaços. Verifique o teorema que envolve estas dimensões. Diga, justificando, se g é sobrejectiva.
- b ■ Escreva a matriz G de g em relação à base $((1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 0, 1))$ de \mathbb{R}^4 e à base canónica de \mathbb{R}^2 .
- c ■ Usando a matriz calculada na alínea anterior, determine a imagem por g de $(-1, 1, 3, 0)$.

GRUPO IV

1 ■ Considere o endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canónica é

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- a ■ Por observação da matriz F e sem efectuar cálculos, indique um valor próprio de f e um vector próprio associado a esse valor próprio.
- b ■ Determine os restantes valores próprios e todos os subespaços próprios de f .
- c ■ Atendendo ao espectro de f , mostre que f não é um automorfismo de \mathbb{R}^3 .
- d ■ Averigue se a função f é diagonalizável e, em caso afirmativo, determine uma base de \mathbb{R}^3 em relação à qual a representação matricial de f seja uma matriz diagonal D e indique a matriz D relativa à base que indicou.

GRUPO V

1 ■ Considere o espaço cartesiano real \mathbb{R}^2 dotado do produto interno canónico:

- a ■ Mostre que a sequência de vectores $(\vec{u}, \vec{v}) = \left((\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2), (-3/5, 4/5) \right)$ é normada mas não é ortogonal.
- b ■ Determine o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} e a projecção ortogonal de \vec{u} sobre \vec{v} .

2 ■ Seja E um espaço vectorial com produto interno e \vec{u} e \vec{v} vectores de E . Mostre que, se \vec{u} e \vec{v} são ortogonais, então $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$. Interprete geometricamente.

FIM

Cotações

	Grupo I	Grupo II	Grupo III	Grupo IV	Grupo V	
	Problema 1	Problema 1	Problema 1	Problema 1	Problema 1	Problema 2
a	1,0	0,5	2,0	1,0	1,0	1,0
b	1,5	1,5	1,0	2,0	1,0	
c	1,5	1,0	1,5	0,5		
d		1,0		1,0		