

Álgebra Linear e Geometria Analítica – LEIC – LERCM
Repetição do Teste Global – 26.07.2008 – Duração: 3.00 horas

Parte A

1. Sejam \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} matrizes reais quadradas de ordem n . Diga se cada uma das proposições que se seguem é verdadeira ou falsa, justificando:

a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$

b) $\mathbf{AB} + \mathbf{B} = (\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B}$

c) $(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$

d) $\mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{A}$

e) $\mathbf{AB} = \mathbf{AC} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C}$

2. Considere a matriz real de ordem 5

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -6 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule o determinante de \mathbf{B} .

3. Em \mathbb{R}^3 , considere os vectores $\mathbf{u}_1 = [2 \ 2 \ -1]^T$ e $\mathbf{u}_2 = [3 \ 1 \ 8]^T$. Prove que \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 são ortogonais e determine um vector $\mathbf{u}_3 = [x \ y \ z]^T$ tal que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ constitua uma base ortogonal de \mathbb{R}^3 .

Considere a matriz real

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Indique uma base para o espaço linha de \mathbf{A} , $\text{lin}(\mathbf{A})$, e uma base para o espaço nulo de \mathbf{A} , $\text{ker}(\mathbf{A})$.

5. Seja $\mathbb{F} = \text{lin}(\mathbf{A})$ (subespaço vectorial de \mathbb{R}^4). Sem efectuar quaisquer cálculos indique:

- $\dim(\mathbb{F}^\perp)$ e exiba uma sua base.
- $\dim(\text{col}(\mathbf{A}))$ e exiba uma sua base ($\text{col}(\mathbf{A})$ representa o espaço-coluna de \mathbf{A}).
- $\dim(\text{ker}(\mathbf{A}^T))$.

6. Resolva o sistema de equações lineares $\mathbf{Ax} = [2 \ 2 \ 0]^T$.

Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Calcule os valores próprios de \mathbf{A} .

8. Determine os subespaços próprios de \mathbf{A} .

9. Determine uma matriz diagonal \mathbf{D} e uma matriz ortogonal \mathbf{P} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^T$.

10. Indique uma matriz \mathbf{B} tal que $\mathbf{B}^4 = \mathbf{D}$ e, usando o resultado da alínea anterior, encontre \mathbf{C} tal que $\mathbf{C}^4 = \mathbf{A}$.

Parte B

Seja $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear onde T_1 é uma rotação de $\theta = 3\pi/2$, T_2 é uma projecção ortogonal sobre o eixo do xx , e T_3 é uma reflexão relativamente ao eixo dos yy .

11. Determine $T\left(\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T\right)$, $\forall \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$.

12. Diga, justificando, se T é uma isometria.

Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

13. Calcule $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ e conclua que as colunas de \mathbf{A} são ortogonais.

14. Determine a matriz de projecção no espaço-coluna de \mathbf{A} .

15. Calcule a projecção do vector $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ no espaço-coluna de \mathbf{A} e determine a distância de \mathbf{b} a esse subespaço.

16. Sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

determine a solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ que mais se aproxima de $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T$.

Considere o vector coluna de \mathbb{R}^4 $x[n] = \sin\left[n \frac{\pi}{2}\right] \sum_{i=0}^3 \delta[n-i]$, com n inteiro $\in [0, 3]$. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ com matriz associada $M = \begin{bmatrix} u_0[k] & u_1[k] & u_2[k] & u_3[k] \end{bmatrix}$, em que $u_n[k]$ são os vectores coluna $u_n[k] = e^{jk\frac{\pi}{2}} \sum_{i=0}^3 \delta[k-i]$, com k inteiro $\in [0, 3]$.

17. Represente graficamente $x[n]$.

18. Calcule a matriz complexa M .

19. Calcule o vector coluna de \mathbb{C}^4 , $X[k]$, correspondente à imagem de $x[n]$ pela transformação T , $X[k] = T(x[n])$.

20. Em $\mathcal{C}([-1, 1])$ com o produto interno definido por $f \cdot g = \int_{-1}^1 f(x)g^*(x)dx$, considere o subespaço \mathbb{G} gerado pelos vectores $\mathbf{u}_1 = 1$, $\mathbf{u}_2 = x$ e $\mathbf{u}_3 = x^2$. Determine, pelo método de Gram-Schmidt, uma base ortogonal para \mathbb{G} , $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.