

Instituto Superior de Engenharia de Lisboa
LEETC ■ LEIC ■ LERCM
Álgebra Linear e Geometria Analítica ■ 3º Teste ■ 2009 Janeiro 08, 18:30h

Resolva cada um dos Grupos I, II, III, IV e V em folhas separadas.
Identifique cada folha com o seu **número de aluno, nome completo e turma**.
A não observância destas normas pode conduzir ao anulamento do(s) Grupo(s) não identificado(s).
Duração: 1h 00m

PROBLEMA I

Indique, justificando as suas respostas, se são lineares as funções h e h' seguintes entre os espaços lineares indicados:

- a ■** $h: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y, z, w) \mapsto (x + 2z - w, x + y)$.
b ■ $h': \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto (x, |y|)$.

PROBLEMA II

Considere a função linear $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3; (x, y, z, w) \mapsto (x - y + w, y + z, x + z + w)$:

- a ■** Determine o núcleo, a imagem, a nulidade e a característica de g . Será g bijectiva? Justifique a resposta.
b ■ Determine a representação matricial de g relativamente à base canónica de \mathbb{R}^3 e à base $((1, 0, -1, 0), (0, 1, 1, -1), (0, 0, -1, 1), (0, 0, 0, 1))$ de \mathbb{R}^4 .
c ■ Recorrendo à matriz anterior, determine a imagem do vector $(2, -1, 0, 1)$ por meio de g .

PROBLEMA III

Considere a transformação linear que, tomando um vector de \mathbb{R}^3 , o roda de $\pi/2$ no sentido directo em torno do semieixo positivo dos yy , seguidamente o projecta ortogonalmente sobre o plano yOz e, finalmente, o reflecte relativamente ao plano xOz . Indique a matriz que representa esta transformação em relação à base canónica de \mathbb{R}^3 .

PROBLEMA IV

Seja E um espaço vectorial real e $u = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ uma base de E . Considere ainda o endomorfismo p de E tal que

$$\begin{cases} p(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 \\ p(\vec{u}_2) = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \end{cases}$$

- a ■ Determine a matriz P de p em relação à base u e ainda os valores próprios de p bem como os respectivos subespaços próprios. Indique também os graus de multiplicidade algébrica e geométrica de cada valor próprio obtido.
- b ■ Averigue a existência de bases de E em relação às quais a matriz de p seja diagonal e indique uma dessas bases, se existir, determinando então uma matriz invertível T e uma matriz diagonal D tais que $D = T^{-1}PT$.

PROBLEMA V

Seja A uma matriz real, quadrada de ordem 4, que possui os valores próprios 1, -3 e 2. Sabendo que os espaços nulos das matrizes $A - \lambda I_4$, $A + 3\lambda I_4$ e $A - 2\lambda I_4$ têm respectivamente as dimensões 2, 1 e 1, poderemos garantir que existe uma matriz diagonal D semelhante a A ? Justifique a sua resposta.

FIM

Cotações

	Problema I	Problema II	Problema III	Problema IV	Problema V
a	2,5	2,5	2,0	3,5	2,0
b	2,0	1,5		2,0	
c		2,0			