

Instituto Superior de Engenharia de Lisboa
LEETC ■ LEIC ■ LERCM
Álgebra Linear e Geometria Analítica ■ Exame de 1ª Fase ■ 2009 Julho 04, 10:00h

Resolva cada um dos Grupos I, II, III e IV em folhas separadas.
Identifique cada folha com o seu **número de aluno, nome completo e turma**.
A inobservância destas normas pode conduzir ao anulamento do(s) Grupo(s) não identificado(s).
Duração: 2h 30m

GRUPO I

1 ■ Seja A uma matriz tal que $(3A - I_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- a ■ Determine a matriz A .
- b ■ Calcule a matriz X tal que

$$(3A - I_2)X = B.$$

- 2 ■ Considere o seguinte sistema de equações lineares, nas incógnitas reais (x, y, z) , onde a e b são parâmetros reais:

$$\begin{cases} x + ay + bz = 1 \\ a(b-1)y = a \\ x + ay + z = b^2 \end{cases}$$

- a ■ Discuta o sistema, em função dos valores dos parâmetros reais a e b .
- b ■ Considere agora $a = b = 2$ e, neste caso, calcule o determinante de A , sendo A a matriz dos coeficientes do sistema. Diga ainda se A é invertível e conclua sobre a natureza do sistema.
- c ■ Resolva o sistema para $a = 0$ e $b = 1$.

GRUPO II

- 1 ■ No espaço cartesiano real \mathbb{R}^3 , considere o subespaço

$$F = \{(x, y, z) : 3x + y = 0\}$$

e a sequência $s = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (2, -1, 1))$.

- a ■ Mostre que é possível escrever o vector $(1, -1, 0)$ de duas formas diferentes como combinação linear dos vectores de s .
- b ■ Determine uma base e a dimensão de F .
- c ■ Seja G o subespaço gerado por s . Indique uma base e a dimensão de G e caracterize os vectores $(x, y, z) \in G$ por meio de uma condição em x, y e z .
- d ■ Determine o subespaço $H = F \cap G$, indicando uma base e a dimensão de H .
- e ■ Será $F \cup G$ um subespaço de \mathbb{R}^3 ? Justifique a resposta.

GRUPO III

1 ■ Considere a função linear $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{cases} f(1, 0, 0) = (1, 0, -1) \\ f(0, 1, 0) = (0, -1, 2) \\ f(0, 0, 1) = (1, -1, 1) \end{cases}$$

- a ■ Determine $f(x, y, z)$, para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- b ■ Determine o núcleo e a imagem de f , indicando uma base para cada um destes subespaços de \mathbb{R}^3 . Determine ainda a nulidade e a característica de f .
- c ■ Determine a matriz de f em relação à base $((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ de \mathbb{R}^3 .
- d ■ Diga, justificando, se f é um automorfismo de \mathbb{R}^3 . Será $\lambda = 0$ um valor próprio de f ? Justifique adequadamente a resposta.

2 ■ Considere o endomorfismo $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$g(x, y) = (8x + 18y, -3x - 7y).$$

- a ■ Determine a matriz G_c de g na base canónica.
- b ■ Determine os valores próprios de g e os respectivos subespaços próprios.
- c ■ Diga, justificando, se g é diagonalizável e, em caso afirmativo, determine uma matriz diagonal D e uma matriz invertível T tais que $G_c = TDT^{-1}$.
- d ■ Determine a matriz G_e de g na base $e = ((0, 1), (1, 1))$ e verifique que G_c e G_e têm o mesmo determinante e o mesmo traço.

GRUPO IV

1 ■ Considere o espaço cartesiano real \mathbb{R}^3 dotado do produto interno canónico.

- a ■ Mostre que os vectores $\vec{u} = (1, -2, 2)$ e $\vec{v} = (2, 2, 1)$ são ortogonais e determine um vector $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ de modo que a sequência de vectores $s = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ seja ortogonal. Obtenha de s uma sequência ortonormada.
- b ■ Diga se o ângulo entre \vec{u} e $\vec{e} = (2, 2, -1)$ é agudo ou obtuso e determine a projecção ortogonal de \vec{u} sobre \vec{e} .

2 ■ Seja E um espaço vectorial real com produto interno e \vec{u} e \vec{v} vectores de E . Mostre que $\vec{u} + \vec{v} \perp \vec{u} - \vec{v}$ se e só se $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ e interprete geometricamente este resultado.

FIM

Cotações

	Grupo I		Grupo II	Grupo III		Grupo IV	
	Problema 1	Problema 2	Problema 1	Problema 1	Problema 2	Problema 1	Problema 2
a	0,5	1,0	1,0	0,5	0,5	1,5	1,0
b	0,5	0,7	0,5	1,5	1,5	1,0	
c		0,8	1,5	1,5	0,5		
d			1,0	1,0	1,0		
e			1,0				