

1. Em \mathbb{R}^3 , com o produto interno usual, considere os vectores $\mathbf{u} = [-1 \ 1 \ 1]^T$ e $\mathbf{v} = [1 \ 1 \ -1]^T$. Determine:

- 1.0 valores a) O ângulo entre \mathbf{u} e \mathbf{v} .
- 1.0 valores b) A projecção ortogonal de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} .
- 0.5 valores c) $k \in \mathbb{R}$ tal que o vector $[0 \ k \ 1]^T$ seja ortogonal a \mathbf{u} .
- 0.5 valores d) Todos os vectores perpendiculares a \mathbf{v} .
- 1.0 valores e) Um vector unitário simultaneamente perpendicular aos vectores \mathbf{u} e \mathbf{v} .
- 1.0 valores f) Seja $\mathbb{W} = L(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Indique, justificando,
 - 1.0 valores f.1) Uma base ortonormada de \mathbb{W}^\perp .
 - 1.0 valores f.2) Uma base ortonormada de \mathbb{W} .
 - 1.0 valores f.3) Uma base ortonormada de \mathbb{R}^3 contendo a base indicada em f.2.

2. Considere a matriz real

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 1.5 valores a) Indique uma base para o espaço linha de \mathbf{A} , $\text{lin}(\mathbf{A})$, e uma base para o espaço nulo de \mathbf{A} , $\text{ker}(\mathbf{A})$.
- 1.5 valores b) Diga, justificadamente, qual é a dimensão de cada um dos 4 espaços fundamentais da matriz \mathbf{A} .

3. Dada a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que

$$T(1, 0, 0) = (1, 0, 0, 1)$$

$$T(0, 1, 0) = (-1, 0, 0, -1)$$

$$T(0, 0, 1) = (0, 1, -1, 1)$$

- 2.5 valores a) Determine a matriz que representa T em relação às bases canónicas dos dois espaços e ainda a matriz que representa T em relação à base canónica de \mathbb{R}^3 e à base de \mathbb{R}^4 $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, -1, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.
- 2.5 valores b) Justifique que cada uma seguintes afirmações é verdadeira:
 - b.1) $(1, 1, -1, 2) \in \text{Img}(T)$.
 - b.2) $(1, 1, 0) \in \text{ker}(T)$
 - b.3) $T(1, 1, 1) = (0, 1, -1, 1)$
 - b.4) T não é sobrejectiva nem injectiva.
 - b.5) $\dim(\text{Img}(T)) = 2$
- 2.0 valores c) Indique bases para $\text{ker}(T)$ e $\text{Img}(T)$.
- 2.0 valores d) Determine $T(x, y, z) \ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.