

Resolva cada um dos Grupos I, II, III e IV em folhas separadas.  
Identifique cada folha com o seu **número de aluno, nome completo e turma**.  
A inobservância destas normas pode conduzir ao anulamento do(s) Grupo(s) não identificado(s).  
**Duração: 2h 30m**

## GRUPO I

**1 ■** Considere as matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & a+1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ b-2 \end{bmatrix}.$$

- a ■** Discuta o sistema  $AX = B$  nas incógnitas reais  $x, y$  e  $z$ , em função dos valores dos parâmetros reais  $a$  e  $b$ .
- b ■** Nesta alínea, considere  $a = 0$  e  $b = 1$ . Calcule o determinante de  $A$  e, com base no resultado obtido, conclua sobre a natureza do sistema e resolva-o, em caso de possibilidade.
- c ■** Determine o(s) valor(es) de  $a \in \mathbb{R}$  que torna(m) a matriz  $A$  singular e, para esses valores de  $a$ , diga qual o número de soluções do sistema homogéneo associado  $AX = O$ . Justifique.

**2 ■** Indique o valor de verdade das proposições seguintes (envolvendo matrizes reais  $A$  e  $B$  de ordem  $n > 1$ ), demonstrando as verdadeiras e dando um contra-exemplo para as falsas:

- a ■**  $\forall_{A, B \in \mathbb{K}^{n,n}} (AB + BA = O_n \Rightarrow A^2B = BA^2)$
- b ■**  $\forall_{A, B \in \mathbb{K}^{n,n}} (A \text{ e } B \text{ são regulares} \Rightarrow A + B \text{ é regular}).$
- c ■**  $\forall_{A, B \in \mathbb{K}^{n,n}} (A \text{ e } B \text{ são singulares} \Rightarrow A + B \text{ é singular}).$

## GRUPO II

**1 ■** No espaço cartesiano real  $\mathbb{R}^3$ , considere a sequência de vectores

$$s = ((1, 1, 0), (0, 0, 2), (1, 1, -2))$$

e ainda o subespaço  $F$  definido por  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \wedge y = z\}$ .

- a ■** Determine uma base e a dimensão de  $F$ .
- b ■** Seja  $G$  o subespaço gerado por  $s$ . Indique uma base e a dimensão de  $G$  e caracterize os vectores  $(x, y, z) \in G$  por meio de uma condição em  $x, y$  e  $z$ .
- c ■** Determine o subespaço  $H = F \cap G$ , indicando uma base e a dimensão de  $H$ .
- d ■** Será  $F \cup G$  um subespaço de  $\mathbb{R}^3$ ? Justifique a resposta.

## GRUPO III

- 1 ■ Considere o espaço vectorial real  $\mathbb{R}^3$ , dotado do produto interno canónico, e a função linear  $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$p(x, y, z) = \frac{1}{3}(2x + y - z, x + 2y + z, -x + y + 2z).$$

- a ■ Determine o núcleo e a imagem de  $p$ , indicando uma base para cada um destes subespaços de  $\mathbb{R}^3$ . Determine ainda a nulidade e a característica de  $p$ .
- b ■ Diga, justificando, se  $p$  é um automorfismo de  $\mathbb{R}^3$ . Diga, justificadamente, se  $\lambda = 0$  um valor próprio de  $p$  e, em caso afirmativo, indique o respectivo subespaço próprio.
- c ■ Determine a matriz de  $p$  em relação à base canónica de  $\mathbb{R}^3$ .
- d ■ Mostre que  $p \circ p = p$ .
- e ■ Mostre que os vectores do núcleo de  $p$  são ortogonais a todos os vectores da imagem de  $p$ .
- f ■ Prove que  $(1, 2, 1)$  é um vector próprio de  $p$  e indique o respectivo valor próprio.

- 2 ■ Considere o endomorfismo  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$\begin{cases} h(1, 0) = (7, 6) \\ h(0, 1) = -(8, 7) \end{cases}$$

- a ■ Determine a matriz  $H_c$  de  $h$  na base canónica.
- b ■ Determine os valores próprios de  $h$  e os respectivos subespaços próprios.
- c ■ Diga, justificando, se  $h$  é diagonalizável e, em caso afirmativo, determine uma matriz diagonal  $D$  e uma matriz invertível  $T$  tais que  $D = T^{-1}H_cT$ .
- d ■ Determine a matriz  $H_e$  de  $h$  na base  $e = ((1, 1), (1, 0))$  e verifique que  $H_c$  e  $H_e$  têm o mesmo determinante e o mesmo traço.

## GRUPO IV

- 1 ■ Considere, no espaço cartesiano real  $\mathbb{R}^3$  dotado do produto interno canónico, o subespaço  $V$  gerado pelos vectores  $\vec{r} = (-1, 0, 1)$  e  $\vec{s} = (0, 1, 1)$ .
- a ■ Decomponha o vector  $(2, 2, 3)$  na soma de um vector pertencente a  $V$  com um vector ortogonal a todos os vectores de  $V$ .
  - b ■ Determine o vector  $\vec{p} = \text{proj}_{\vec{s}}(\vec{r})$  e mostre que  $\vec{r} - \vec{p}$  é ortogonal a  $\vec{s}$ .

- 2 ■ Seja  $E$  um espaço vectorial real com produto interno e  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vectores de  $E$ . Mostre que

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$$

e interprete geometricamente este resultado.

## FIM

## Cotações

	Grupo I		Grupo II	Grupo III		Grupo IV	
	Problema 1	Problema 2	Problema 1	Problema 1	Problema 2	Problema 1	Problema 2
a	1,0	0,5	0,5	1,5	0,5	1,5	1,0
b	0,7	0,5	1,5	1,0	1,5	1,0	
c	0,8	0,5	1,0	0,5	0,5		
d			1,0	0,5	1,0		
e				1,0			
f				0,5			