

1. Sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

e \mathbf{B} uma matriz real de 4ª ordem com $\det(\mathbf{B}) = 1/8$:

- 2.5 valores a) Calcule $\det(\mathbf{A})$
- 2.5 valores b) Calcule $\det(2\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^{-2})$.

2. Considere o subespaço de \mathbb{R}^3 definido por

$$\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + y + z = 0\}$$

e o conjunto $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T \right\}$ de vectores de \mathbb{R}^3 , e seja ainda $\mathbb{G} = L(\mathcal{B})$ o subespaço gerado por \mathcal{B} .

- 3.5 valores a) Determine uma base e a dimensão de \mathbb{W} .
- 2.0 valores b) Diga, justificando, se os vectores $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}^T$ pertencem a \mathbb{W} e, em caso afirmativo, determine as suas coordenadas em relação à base de \mathbb{W} que indicou na alínea anterior.
- 1.0 valores c) Construa uma base de \mathbb{R}^3 que contenha a base de \mathbb{W} que indicou em a).
- 3.5 valores d) Indique uma base e a dimensão de \mathbb{G} e caracterize os vectores de \mathbb{G} por meio de uma condição nas suas coordenadas.
- 1.0 valores e) Será $\mathbb{G} \cup \mathbb{W}$ um subespaço de \mathbb{R}^3 ? Justifique a resposta.

- 4.0 valores 3. Em \mathbb{R}^3 , considere as bases $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, com $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ e $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, com $\mathbf{w}_1 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{w}_3 = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3$. Sendo $\mathbf{v} = -4\mathbf{w}_1 + 4\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3$ determine a representação de \mathbf{v} na base \mathcal{U} .