

**Ficha 4**

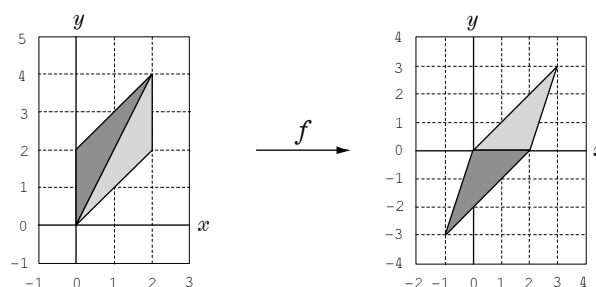
Prazo de entrega: até dia 12 Jan 2009

- 1 ■ Considere a função linear  $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$g(x, y, z, w) = (x + y - z, -y + 2z - w, 2x + y - w)$$

- a ■ Determine o núcleo, a imagem, a nulidade e a característica de  $g$ .
- b ■ Determine a representação matricial de  $g$  em relação à base canónica de  $\mathbb{R}^4$  e à base  $((1, -1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$  de  $\mathbb{R}^3$ .
- c ■ Verifique se o vector  $\vec{v} = (3, -2, 4)$  pertence à imagem de  $g$  e, em caso afirmativo, determine todos os vectores de  $\mathbb{R}^4$  cuja imagem por  $g$  é  $\vec{v}$ .

- 2 ■ Considere a aplicação linear  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que transforma o paralelogramo da esquerda no paralelogramo da direita, sendo cada triângulo aplicado por  $f$  no correspondente triângulo da mesma cor. Determine a matriz que representa  $f$  na base canónica de  $\mathbb{R}^2$ :



- 3 ■ Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  os valores próprios da matriz complexa  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ :

- a ■ Mostre que  $a + d = \lambda_1 + \lambda_2$  e que  $ad - bc = \lambda_1 \lambda_2$ .
- b ■ Suponha agora que  $a + c = b + d$ . Nestas condições, mostre que  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  é um vector próprio de  $A$  e determine os dois valores próprios de  $A$  em função de  $a, b, c$  e  $d$ . Nas condições indicadas, mostre ainda que  $\begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$  é também um vector próprio de  $A$ .

**Ficha 4**

Prazo de entrega: até dia 12 Jan 2009

- 4** ■ Seja  $E$  um espaço vectorial real e  $v = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  uma base de  $E$ . Considere ainda o endomorfismo  $h$  de  $E$  tal que

$$\begin{cases} h(\vec{v}_1) = 4\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 + 6\vec{v}_3 \\ h(\vec{v}_2) = \vec{v}_2 \\ h(\vec{v}_3) = -(3\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 + 5\vec{v}_3) \end{cases}$$

- a** ■ Determine a matriz  $H$  de  $h$  em relação à base  $v$  e ainda os valores próprios de  $h$  bem como os respectivos subespaços próprios. Indique também os graus de multiplicidade algébrica e geométrica de cada valor próprio obtido.
- b** ■ Averigue a existência de bases de  $E$  em relação às quais a matriz de  $h$  seja diagonal e indique uma dessas bases, se existir. Determine uma matriz invertível  $T$  e uma matriz diagonal  $D$  tais que  $H = TDT^{-1}$ .

- 5** ■ Seja  $E$  um espaço euclidiano e  $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  uma base ortonormada de  $E$ . Dados os vectores

$$\vec{u} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \text{ e } \vec{v} = -3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_3$$

- a** ■ Determine o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e ainda o versor de  $\vec{v}$ .
- b** ■ Determine a projecção ortogonal de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$ .
- c** ■ Mostre que o vector  $\vec{w} = \|\vec{v}\|\vec{u} + \|\vec{u}\|\vec{v}$  divide ao meio o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .