

Álgebra Linear e Geometria Analítica – LEIC – LERCM
Teste Global – 09.07.2008 – Duração: 3.00 horas

Parte A

Efectuando operações elementares sobre linhas, a matriz \mathbf{A} é transformada em \mathbf{R} , sua forma escalonada reduzida:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Resolva o sistema $\mathbf{Ax} = 0$.
2. Seja \mathbf{c}_i a coluna i de \mathbf{A} , $i = 1, 2, 3, 4$. Suponha que $\mathbf{b} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$. Determine a solução geral de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Seja \mathbf{B} uma matriz regular de ordem 3 tal que

$$\mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Calcule $\det(\mathbf{B})$.
4. Determine \mathbf{B} .

Considere os vectores de \mathbb{R}^3 , $\mathbf{u}_1 = [0 \ 0 \ 1]^T$, $\mathbf{u}_2 = [0 \ 1 \ 1]^T$ e $\mathbf{u}_3 = [1 \ 1 \ 1]^T$.

5. Prove que $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ é uma base de \mathbb{R}^3 .
6. Seja \mathbb{F} o subespaço gerado por \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_3 , $\mathbb{F} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3)$. Caracterize os vectores de \mathbb{F} por meio de uma condição nas suas coordenadas.
7. Determine uma base de \mathbb{F}^\perp .
8. Determine uma base ortogonal de \mathbb{F} , $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, e a projecção ortogonal de \mathbf{u}_2 sobre \mathbb{F} .
9. Indique um vector $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ forme uma base ortogonal de \mathbb{R}^3 .

Seja \mathbf{A} uma matriz real do tipo 6×3 cujas colunas são linearmente independentes.

10. Indique quais são as dimensões dos 4 espaços fundamentais de \mathbf{A} : $\text{lin}(\mathbf{A})$; $\text{col}(\mathbf{A})$; $\text{ker}(\mathbf{A})$; $\text{ker}(\mathbf{A}^T)$.

Parte B

Considere a transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que consiste numa rotação de $\theta = \pi$, seguida de uma reflexão relativamente ao eixo dos yy .

- 11.** Determine a imagem, por T , do quadrado Q de vértices $v_1 = [0 \ 0]^T$, $v_2 = [0 \ 1]^T$,

$$v_3 = [1 \ 0]^T \text{ e } v_4 = [1 \ 1]^T, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 12.** Prove que T é uma isometria.

Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- 13.** Determine os subespaços próprios de \mathbf{A} .
- 14.** Determine uma matriz ortogonal \mathbf{P} tal que $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$ é uma matriz diagonal.
- 15.** Calcule \mathbf{A}^6 .

Dado o vector $\mathbf{b} = [1 \ 2 \ 1]^T$ e a matriz

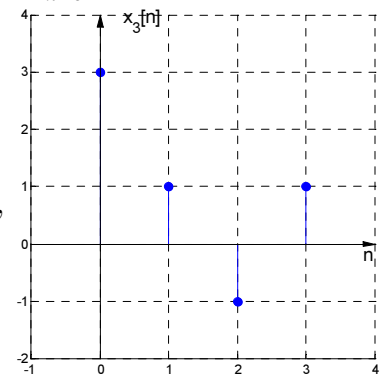
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 16.** Calcule a matriz pseudo-inversa da matriz \mathbf{A} .
- 17.** Determine a solução de mínimo erro quadrático do sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Considere os sinais discretos $x_1[n] = \sum_{k=0}^3 (|k-2| - a) \delta[n-k]$ e $x_2[n] = \sum_{k=0}^3 \delta[n-k]$ e o produto

interno em l^2 definido por $x_1 \cdot x_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] x_2^*[n]$.

- 18.** Calcule a tal que $x_1[n]$ e $x_2[n]$ sejam ortogonais.
- 19.** Considerando o valor de a calculado na alínea anterior, escreva o sinal $x_3[n]$, representado na figura, como combinação linear de $x_1[n]$ e $x_2[n]$ (Calcule os coeficientes da combinação linear. Caso não tenha calculado a na alínea anterior considere $a = 1$).



- 20.** Determine a melhor aproximação (no sentido da minimização do erro quadrático) ao sinal $f(x) = x^3$ no subespaço gerado pelo sinal $g(x) = x$ no intervalo $[-1, 1]$.