

LICENCIATURA EM ENGENHARIA DE SISTEMAS
DE TELECOMUNICAÇÕES E ELECTRÓNICA

Apontamentos de Análise de Sinais



© Prof. José Amaral
Versão 3.0 • 18-06-2003
Secção de Comunicações e Processamento de Sinal
ISEL-CEDET, Gabinete C • jda@isel.pt

Módulo

10

Transformada Z

TÓPICOS

Transformada Z Bilateral

ROC

Transformada Z Unilateral

Propriedades

Transformada Z inversa

Representação de sistemas no domínio Z

Soluções das equações às diferenças

Neste Módulo é apresentada a Transformada Z (TZ) de um sinal discreto, que constitui uma importante ferramenta de análise de SLITs discretos, nomeadamente na determinação da sua resposta no tempo e na frequência. Após a apresentação da TZ na sua forma mais geral, TZ Bilateral, e do conceito de Região de Convergência da transformada, e sendo nosso objectivo apenas o do estudo de SLITs causais, é apresentada a TZ Unilateral, as suas propriedades, e a respectiva TZ Inversa.. É feita um a pequena introdução à representação de sistemas no domínio Z, sendo apresentado o conceito de Função de Transferência de um sistema, e à resolução das equações às diferenças de SLITs causais. A aplicação dos conceitos será desenvolvida nos Módulos 11 e 12. São apresentados diversos exemplos de aplicação, dando-se especial ênfase à utilização das funções disponíveis no ambiente *Matlab*.

Objectivos

No fim deste módulo o aluno deverá :

1. Saber calcular a TZ Unilateral de um sinal discreto.
2. Saber calcular a TZ inversa de um sinal causal.
3. Saber representar um sistema no domínio Z.
4. Saber determinar e interpretar a solução das equações às diferenças de um SLIT causal.



1. Transformada Z Bilateral

Vamos começar por definir a Transformada Z na sua forma mais geral, designada por Transformada Z Bilateral.

Define-se a **Transformada Z Bilateral (TZ_B)** de um sinal discreto $x[n]$ como

$$Z\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

com $z = re^{j\Omega}$. O conjunto de valores z para os quais $X(z)$ existe é designado por **região de convergência (ROC)**, sendo dada por

$$R_- < r < R_+$$

com R_- e R_+ reais positivos.

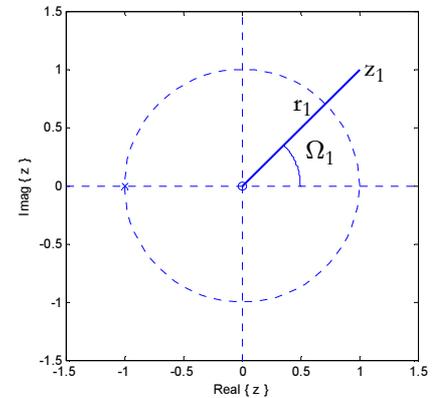


Figura M10.1

- A variável complexa $z = re^{j\Omega}$ é designada por **frequência complexa**, sendo representada num plano complexo designado por **plano-z**. Sendo $r = |z|$ a **atenuação** e $\Omega = \arg\{z\}$ a **frequência** (real), $z = re^{j\Omega}$ é representada no plano-z a uma distância r da origem e fazendo um ângulo Ω com o eixo dos reais. A figura M10.1 mostra um exemplo do posicionamento de um valor da variável complexa, $z_1 = r_1 e^{j\Omega_1}$, no plano-z.

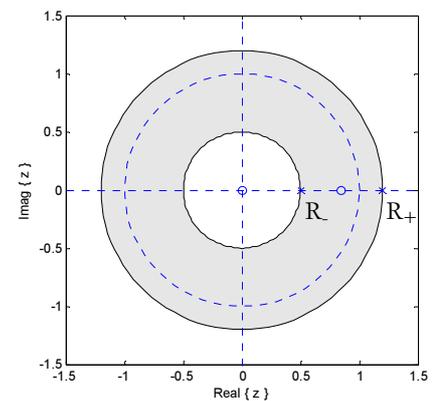


Figura M10.2

- Dado que a ROC é definida em função de r , a sua forma geral é a de uma coroa circular em torno da origem, como se mostra na figura M10.2. Note que poderá ser $R_- = 0$ e/ou $R_+ = \infty$. Se for $R_+ < R_-$ então a TZ_B não existe.
- Para $r = 1$ o conjunto de pontos da variável complexa, $z = e^{j\Omega}$ no plano-z corresponde a um círculo de raio unitário em torno da origem, designado por **círculo unitário**. Se a ROC contiver o círculo unitário, observe o exemplo que se mostra na figura M10.2, podemos calcular $X(z)$ neste círculo, resultando daí a TF do sinal $x[n]$

$$X(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = X(\Omega)$$

Ou seja, a TF de um sinal discreto, $X(\Omega)$, pode ser interpretada como um caso particular da sua TZ_B, $X(z)$, sendo possível, uma vez conhecida esta última, determinar se a primeira existe ou não, e qual a sua expressão analítica.



2. Exemplos de cálculo da TZ_B

Exemplo 1

Considere o sinal

$$x_1[n] = a^n u[n]$$

a sua TZ_B é

$$\begin{aligned} X_1(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n \end{aligned}$$

Tendo em atenção que para uma progressão geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1$$

resulta

$$X_1(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

Temos então uma ROC

$$ROC_1: \underbrace{|a|}_{R_-} < |z| < \underbrace{\infty}_{R_+}$$

Assim, a TZ_B do sinal

$$x_1[n] = a^n u[n]$$

é dada pela expressão algébrica e pela ROC

$$X_1(z) = \frac{z}{z-a}, \quad ROC_1: |a| < |z| < \infty$$

A figura M10.3 mostra o sinal $x_1[n]$ para $a = 0.5$ e a figura M10.4 mostra a ROC correspondente, representada no plano-z.

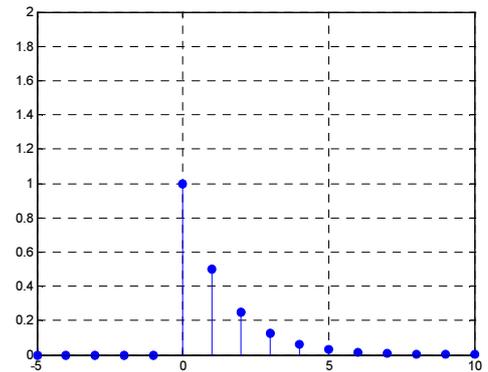


Figura M10.3

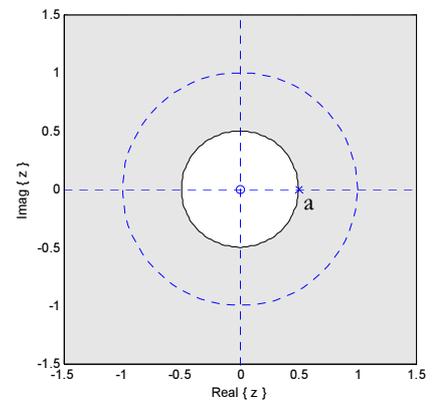


Figura M10.4

Exemplo 2

Considere o sinal

$$x_2[n] = -b^n u[-n-1]$$

a sua TZ_B é

$$\begin{aligned} X_2(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} \\ &= - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{b}{z}\right)^n \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{b}\right)^n \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{b}\right)^n \end{aligned}$$

e ainda

$$X_2(z) = 1 - \frac{1}{1 - z/b}$$

$$= \frac{1}{1 - bz^{-1}}, |z| < |b|$$

Temos então uma ROC

$$ROC_2 : \underbrace{0}_{R_-} < |z| < \underbrace{|b|}_{R_+}$$

Então a TZ_B do sinal

$$x_2[n] = -b^n u[-n - 1]$$

é dada pela expressão algébrica e pela ROC

$$X_2(z) = \frac{z}{z - b}, ROC_2 : 0 < |z| < |b|$$

A figura M10.5 mostra o sinal $x_2[n]$ para $b = 1.2$ e a figura M10.6 mostra a ROC correspondente, representada no plano- z .

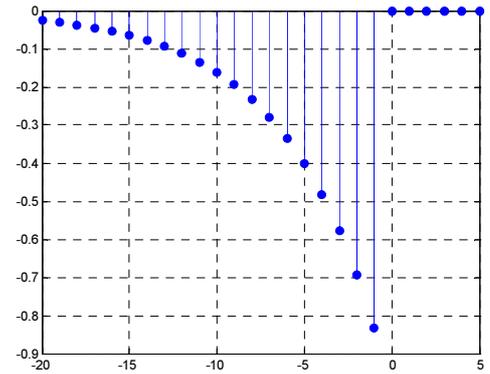


Figura M10.5

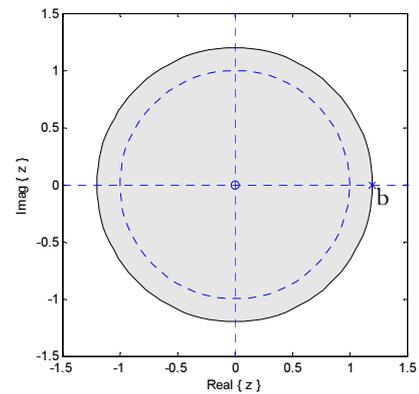


Figura M10.6

Exemplo 3

Considere o sinal

$$x_3[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

$$= a^n u[n] - b^n u[-n - 1]$$

a sua TZ_B é

$$X_3(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_3[n] z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n}$$

Atendendo aos dois exemplos anteriores resulta

$$X_3(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{1 - bz^{-1}}$$

com uma ROC

$$ROC_3 : ROC_1 \cap ROC_2$$

Então a TZ_B do sinal

$$x_3[n] = a^n u[n] - b^n u[-n - 1]$$

é dada pela expressão algébrica e pela ROC

$$X_3(z) = \frac{z}{z - a} + \frac{z}{z - b}, ROC_3 : |a| < |z| < |b|$$

A figura M10.7 mostra o sinal $x_3[n]$ para $a = 0.5$ e $b = 1.2$ e a figura M10.8 mostra a ROC correspondente.

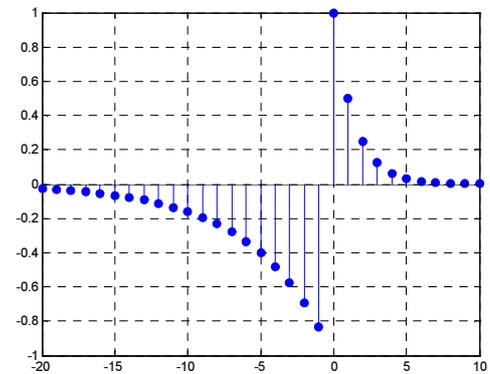


Figura M10.7

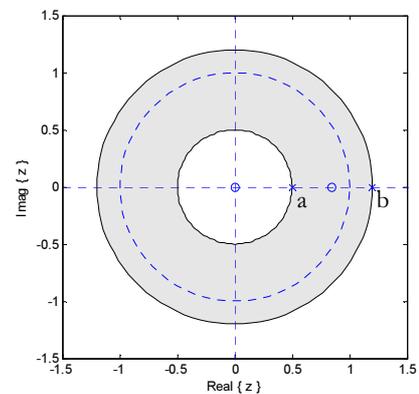


Figura M10.8



3. Propriedades da ROC

Com base nos exemplos 1 a 3 vamos estabelecer, sem demonstração, algumas propriedades importantes da ROC.

Note que a expressão algébrica da TZ_B de qualquer dos exemplos dados é uma **função racional**

As raízes do **polinómio do numerador**, $N(z)$, são designadas por **zeros** de $X(z)$ e as raízes do polinómio do denominador, $D(z)$, são designadas por **pólos** de $X(z)$.

Para caracterizar completamente a TZ_B de um sinal é necessário especificar a sua expressão algébrica e a sua ROC

A ROC é uma região contínua que não contém nenhum pólo da expressão algébrica de $X(z)$. Sendo $X(z)$ uma função racional, existe pelo menos um pólo na fronteira da ROC.

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

As TZ_B dos sinais do Exemplo 1 e 2:

$$X_1(z) = \frac{z}{z-a}; \quad X_2(z) = \frac{z}{z-b}$$

, têm um zero na origem, $z=0$, e apenas um pólo, respectivamente $z=a$ e $z=b$. Note que se admitirmos $a=b$ quer $x_1(t)$ quer $x_2(t)$ têm uma TZ_B dada pela mesma expressão algébrica, tendo no entanto diferentes regiões de convergência.

A TZ_B do Exemplo 3

$$\begin{aligned} X_3(z) &= \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b} \\ &= \frac{2z(z - \frac{a+b}{2})}{(z-a)(z-b)} \end{aligned}$$

Um sinal $x[n]$ diz-se um **sinal direito** se for nulo $\forall n < n_0$. Se $n_0 \geq 0$ o sinal direito é designado por **sinal causal**. A ROC de um sinal direito corresponde sempre ao exterior de uma circunferência de raio R_- .

tem dois zeros, $z=0$ e $z=(a+b)/2$, e dois pólos, $z=a$ e $z=b$.

Um sinal $x[n]$ diz-se um **sinal esquerdo** se for nulo $\forall n > n_0$. Se $n_0 \leq 0$ o sinal esquerdo é designado por **sinal anti-causal**. A ROC de um sinal esquerdo corresponde sempre ao interior de uma circunferência de raio R_+ .

Observe as figuras M10.4, M10.6 e M10.8. Os zeros e os pólos de cada uma das TZ_B , para os valores numéricos considerados, estão aí representados, respectivamente, pelo símbolo \circ e pelo símbolo \times .

Um sinal $x[n]$ diz-se um **sinal bilateral** se não for nulo $\forall n < n_0$ ou $\forall n > n_1$. A ROC de um sinal bilateral, se não for um espaço vazio, corresponde a uma coroa circular limitada pelas circunferências de raio R_+ e R_- .

Como se referiu, dado que a ROC é definida em função de $r=|z|$, a sua forma geral é a de uma coroa circular em torno da origem.

Um sinal $x[n]$ diz-se um **sinal de duração finita** se for nulo $\forall n < n_0$ e $\forall n > n_1$. A ROC de um sinal de duração finita é todo o plano- z , exceptuando, eventualmente, $z=0$ e/ou $|z|=\infty$. Se $n_0 < 0$ então $z=\infty$ não pertence à ROC e se $n_1 > 0$ então $z=0$ não pertence à ROC.

O sinal $x_1[n] = a^n u[n]$ do Exemplo 1 é um caso particular de um sinal direito. Observe a figura M10.4. Note como a ROC corresponde a todo o espaço- z exterior à circunferência que passa pelo pólo da expressão algébrica de $X_1(z)$.

O sinal $x_2[n] = -b^n u[-n-1]$ do Exemplo 2 é um caso particular de um sinal esquerdo. Observe a figura M10.6. Note como a ROC corresponde a todo o espaço- z interior à circunferência que passa pelo pólo da expressão algébrica de $X_2(z)$.

O sinal $x_3[n] = a^n u[n] - b^n u[-n-1]$ do Exemplo 3 é um caso particular de um sinal bilateral. Observe a figura M10.8. Note como a ROC corresponde à coroa circular delimitada pelas circunferências que contêm os pólos da expressão algébrica de $X_3(z)$.



4. Transformada Z Unilateral

Admitindo que um sinal $x[n]$ é causal, a sua TZ Bilateral é dada por

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \end{aligned}$$

Define-se a **Transformada Z Unilateral (TZ_U)** de um sinal discreto $x[n]$ como

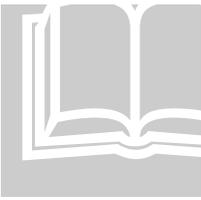
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

com $z = re^{j\Omega}$. A ROC da TZ unilateral corresponde sempre ao exterior de uma circunferência no plano- z .

, dado que o sinal é nulo $\forall n < 0$, sendo que a ROC, dado que se trata de um sinal direito, corresponde sempre ao exterior de uma circunferência de raio R_- . O somatório,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

, define a TZ Unilateral de um qualquer sinal discreto, sendo no caso de um sinal causal coincidente com a TZ Bilateral. Dado que o objectivo fundamental da apresentação aqui da TZ é o do estudo de SLITs causais, passaremos daqui em diante a considerar apenas o cálculo da TZ Unilateral, que passaremos a designar apenas por **TZ**.



5. Propriedades da Transformada Z Unilateral

Podem demonstrar-se as seguintes propriedades da TZ_U

Linearidade

$$\begin{aligned} Z\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} &= a_1X_1(z) + a_2X_2(z) \\ ROC &: ROC_1 \cap ROC_2 \end{aligned}$$

Mudança de escala

$$\begin{aligned} Z\{kx[n]\} &= X(z^{-k}) \\ ROC &: ROC_x^{-k} \end{aligned}$$

Convolução

$$\begin{aligned} Z\{x_1[n] * x_2[n]\} &= X_1(z)X_2(z) \\ ROC &: ROC_1 \cap ROC_2 \end{aligned}$$

Translação no tempo

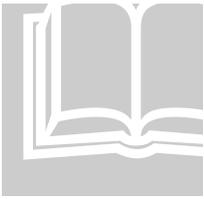
$$\begin{aligned} Z\{x[n-1]\} &= z^{-1}X(z) + x(-1) \\ Z\{x[n-n_0]\} &= x(-1)z^{1-n_0} + x(-2)z^{2-n_0} + \dots + x(-n_0) + z^{-n_0}X(z) \\ ROC &: ROC_x \end{aligned}$$

Translação na frequência

$$\begin{aligned} Z\{a^n x[n]\} &= X\left(\frac{z}{a}\right) \\ ROC &: |a| ROC_x \end{aligned}$$

Diferenciação no domínio Z

$$\begin{aligned} Z\{nx[n]\} &= -z \frac{dX(z)}{dz} \\ ROC &: ROC_x \end{aligned}$$



6. Exemplos de cálculo da TZ_U

Com base na definição da TZ Unilateral e nas propriedades enunciadas na secção anterior, vamos ver agora alguns exemplos de cálculo da TZ_U . Note que, para além da metodologia utilizada no cálculo da TZ_U , o objectivo é o da obtenção de um conjunto de transformadas dos sinais mais comuns, que nos permitem, baseados no seu conhecimento e na utilização das propriedades da TZ_U , calcular facilmente transformadas de sinais mais complexos. Note ainda que no cálculo da TZ_U não se põe o problema da determinação da ROC, que corresponde sempre a todo o plano- z exterior à circunferência que contém o pólo de maior módulo.

Para além do recurso às propriedades e a transformadas conhecidas podemos basear o cálculo da TZ_U na função **ztrans(x)**, pertencente à biblioteca simbólica do *Matlab*, como seguidamente se exemplifica.

Exemplo 1

Considere o sinal

$$x[n] = a\delta[n]$$

a sua TZ_U é

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a\delta[n]z^{-n} \\ &= a, \forall z \end{aligned}$$

Exemplo 2

Considere o sinal

$$x[n] = u[n]$$

a sua TZ é

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}}, |z| > 1 \end{aligned}$$

Exemplo 3

Considere o sinal

$$x[n] = a^n u[n]$$

a sua TZ é

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n \\ &= \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a| \end{aligned}$$

Exemplo 4

Considere o sinal

$$x[n] = na^n u[n]$$

Atendendo à propriedade

$$Z\{nx[n]\} = -z \frac{dX(z)}{dz}$$

e ao resultado obtido no exemplo 3, a sua TZ é

$$\begin{aligned} Z\{na^n u[n]\} &= -z \frac{d\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right)}{dz} = -z \frac{-a}{(z-a)^2} \\ &= \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z| > |a| \end{aligned}$$

Exemplo 5

Considere o sinal

$$x[n] = a^n \text{sen}(\omega_0 n) u[n]$$

a sua TZ é

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \left(\frac{e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}}{2j} \right) z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{e^{j\omega_0 n}}{2j} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{e^{-j\omega_0 n}}{2j} z^{-n} \\ &= \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{ae^{j\omega_0}}{z} \right)^n - \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{ae^{-j\omega_0}}{z} \right)^n \\ &= \frac{1}{2j} \frac{1}{1-ae^{j\omega_0} z^{-1}} - \frac{1}{2j} \frac{1}{1-ae^{-j\omega_0} z^{-1}}, \quad |z| > |a| \end{aligned}$$

, ou ainda, após alguma manipulação analítica

$$X(z) = \frac{a \text{sen}(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2a \text{sen}(\omega_0) z^{-1} + a^2 z^{-2}}, \quad |z| > |a|$$

Exemplo 6

Considere o sinal

$$x[n] = a^n \text{cos}(\omega_0 n) u[n]$$

a sua TZ é

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \left(\frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2} \right) z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{e^{j\omega_0 n}}{2} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{e^{-j\omega_0 n}}{2} z^{-n} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{ae^{j\omega_0}}{z} \right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{ae^{-j\omega_0}}{z} \right)^n \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1-ae^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-ae^{-j\omega_0} z^{-1}}, \quad |z| > |a| \end{aligned}$$

, ou ainda, após alguma manipulação analítica

$$X(z) = \frac{1 - a \text{cos}(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2a \text{cos}(\omega_0) z^{-1} + a^2 z^{-2}}, \quad |z| > |a|$$

Exemplo 7

Poderíamos ter recorrido à função *ztrans* para calcular as TZ dos exemplos anteriores. Por exemplo para os Exemplos 4 e 6 bastaria fazer

```
pretty(ztrans(sym('n*a^n')))
```

$$\frac{z a}{(a - z)^2}$$

```
pretty(ztrans(sym('a^n*cos(w0*n)')))
```

$$\frac{(z/a - \cos(w_0)) z}{a \left| 1 - 2 \frac{z \cos(w_0)}{a} + \frac{z^2}{a^2} \right|}$$

Exemplo 8

Calcule a TZ do sinal

$$x[n] = (n - 4)0.5^{(n-4)} \cos\left[(n - 4)\frac{\pi}{3}\right]u[n - 4]$$

podemos ter em atenção que

$$x[n] = y[n - 4]$$

com

$$y[n] = n0.5^n \cos\left[n\frac{\pi}{3}\right]u[n]$$

e calcular a TZ tendo em atenção que $Y(z)$ é conhecida e ainda as propriedades da diferenciação no domínio Z e da translação no tempo.

Alternativamente, recorrendo à função *ztrans*, temos

```
syms a w0;
xz=(ztrans(sym('(n-4)*a^(n-4)*cos(w0*(n-4))*Heaviside(n-4)')));
xzg=subs(xz,w0,pi/3);
xzg=subs(xzg,a,0.5);
xzg=simplify(xzg);
pretty(xzg)
```

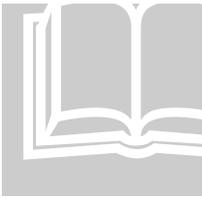
$$\frac{1 - 8z + 4z^2}{z^3(1 + 4z - 2z^2)^2}$$

Para determinar a região de convergência basta determinar os zeros do polinómio do denominador, por exemplo, recorrendo à função **roots**.

```
abs(roots([4 -2 1]))
ans =
    0.5000
    0.5000
```

Logo

$$X(z) = \frac{1 - 8z + 4z^2}{z^3(1 - 2z + 4z^2)^2}, |z| > 0.5$$



7. Transformada Z Inversa

Sendo conhecida a TZ de um sinal, $X(z)$, a determinação do sinal que lhe deu origem, $x[n]$, pode ser feita recorrendo ao cálculo da TZ inversa.

Define-se a **Transformada Z Inversa** de um sinal $x[n]$ como

$$Z^{-1}\{X(z)\} = x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz$$

em que o integral é calculado ao longo de um contorno circular fechado, C , de raio r , centrado na origem do plano- z , contido na ROC, e percorrido no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

Não abordaremos aqui a situação mais geral da determinação da TZ inversa para qualquer $X(z)$ a partir da definição, que resulta geralmente num processo analítico relativamente complicado.

Admitido que a expressão algébrica de $X(z)$ é uma função racional, a TZ inversa pode ser determinada a partir da expansão de $X(z)$ em fracções simples.

Expansão em fracções simples

Admitamos que $X(z)$ é uma função racional de z^{-1}

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}}$$

Se $X(z)$ não contiver pólos múltiplos pode ser expandida em fracções simples

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{i=1}^N \frac{r_i}{1 - p_i z^{-1}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{M-N} k_i z^{-i}}_{M \geq N} \\ &= \frac{r_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{r_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots + \frac{r_N}{1 - p_N z^{-1}} + k_1 + k_2 z^{-1} + \dots + k_{M-N+1} z^{-(M-N)} \end{aligned}$$

, em que os coeficientes p_i são os pólos de $X(z)$, r_i os **resíduos**, e k_i , se existirem, os **coeficientes directos** (ou polinomiais). Caso existam pólos múltiplos a expansão passará ter termos da forma

$$\frac{r_i}{1 - p_i z^{-1}} + \frac{r_{i+1}}{(1 - p_i z^{-1})^2} + \dots + \frac{r_{i+s-1}}{(1 - p_i z^{-1})^s}$$

, em que $p_i = \dots = p_{i+s-1}$ é um pólo de multiplicidade s .

[r, p, k] = residuez(b, a)

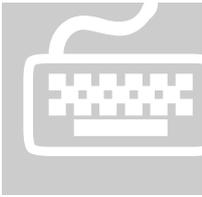
A função *Matlab* **[r, p, k] = residuez(b, a)**, em que b e a são os vectores dos coeficientes dos polinómios $B(z)$ e $A(z)$, ordenados por ordem crescente dos expoentes de z^{-i} , devolve 3 vectores coluna, o vector r dos resíduos, o vector p dos pólos respectivos, e o vector k dos coeficientes directos. Recorrendo a esta função, a expansão em fracções simples é uma tarefa quase imediata. Veja os exemplos de aplicação na secção seguinte.

[b, a] = residuez(r, p, k)

Note que a mesma função *residuez* quando utilizada com três parâmetros de entrada e dois de saída, **[b, a] = residuez(r, p, k)**, permite fazer a transformação inversa, da expansão em fracções simples para a forma polinomial $B(z)/A(z)$.

Transformação inversa a partir de fracções simples

Uma vez efectuada a expansão em fracções simples, o cálculo da TZ inversa é imediato, quer por recurso a uma tabela de TZ quer recorrendo ao núcleo de cálculo simbólico do *Matlab*. Veja os exemplos de aplicação na secção seguinte.



8. Exemplos de cálculo da TZ^{-1}

Vamos agora ver alguns exemplos de cálculo da TZ inversa. Como se disse na secção anterior, vamos admitir que $X(z)$ é uma função racional, pelo que o modo mais simples de calcular a TZ^{-1} consiste na decomposição da expressão da transformada em fracções simples, e o posterior recurso a uma tabela de transformadas conhecidas. Podemos ainda recorrer à função **iztrans(x)**, pertencente à biblioteca simbólica do *Matlab*.

Comecemos por ver alguns exemplos de cálculo por utilização imediata da função *iztrans*.

Exemplo 1

Dado

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

, temos a TZ^{-1}

```
iztrans(sym('1/(1-z^(-1))'))
ans =
    1
```

Note que pode optar por fazer

```
syms z
iztrans(1/(1-z^(-1)))
ans =
    1
```

Note ainda que a TZ definida na biblioteca simbólica do *Matlab* corresponde à TZ unilateral pelo que a expressão devolvida pela função corresponde sempre a um sinal causal. No presente caso a resposta deve ser interpretada como

$$x[n] = 1u[n] = u[n]$$

Exemplo 2

Dado

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

, temos a TZ^{-1}

```
iztrans(sym('1/(1-a*z^(-1))'))
ans =
    a^n
```

, ou seja

$$x[n] = a^n u[n]$$

Exemplo 3

Dado

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$$

, temos a TZ^{-1}

```
iztrans(sym('(a*z^(-1))/(1-a*z^(-1))^2'))
ans =
    a^n*n
```

, ou seja

$$x[n] = na^n u[n]$$

Exemplo 4

Dado

$$X(z) = \frac{z}{1 - 4z + 3z^2}$$

, temos a TZ⁻¹

```
iztrans(sym('z/(3*z^2-4*z+1)'))
ans =
    1/2-1/2*(1/3)^n
```

, ou seja

$$x[n] = \frac{1}{2}u[n] - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

Exemplo 5

Dado

$$X(z) = \frac{1}{(1 - 0.9z^{-1})^2 (1 + 0.9z^{-1})}$$

, temos a TZ⁻¹

```
iztrans(sym('1/((1-9/10*(1/z))^2*(1+9/10*(1/z)))'))
ans =
    3/4*(9/10)^n+1/2*(9/10)^(n+1)+1/4*(-9/10)^n
```

, ou seja

$$x[n] = 0.75(0.9)^n u[n] + 0.5n(0.9)^n u[n] + 0.25(-0.9)^n u[n]$$

Exemplo 6

A TZ do sinal

$$x[n] = u[n - 4]$$

é, recorrendo por exemplo à propriedade da translação no tempo,

$$Z\{x[n - n_0]\} = x(-1)z^{1-n_0} + x(-2)z^{2-n_0} + \dots + x(-n_0) + z^{-n_0}X(z)$$

, no caso presente, sendo $n_0 = 4$, temos

$$\begin{aligned} X(z) &= u[-1]z^{-3} + u[-2]z^{-2} + u[-3]z^{-1} + u[-4] + z^{-4}Z\{u[n]\} \\ &= \frac{z^{-4}}{1 - z^{-1}} \end{aligned}$$

Poderíamos ter recorrido função *ztrans*, resultando

```
simplify(ztrans(sym('Heaviside(n-4)')))
ans =
    1/(-1+z)/z^3
```

, confirmando assim o resultado obtido. Note que se pretendermos calcular a TZ inversa de

$$X(z) = \frac{z^{-3}}{z - 1}$$

recorrendo à função *iztrans*, resulta

```
iztrans(ans)
ans =
    1-charfcn[0](n)-charfcn[1](n)-charfcn[2](n)-charfcn[3](n)
```

, que deve ser interpretado como

$$x[n] = u[n] - \delta[n] - \delta[n - 1] - \delta[2] - \delta[n - 3]$$

ou seja

$$x[n] = u[n - 4]$$

Exemplo 7

A TZ do sinal

$$x[n] = u[n] - u[n - 4]$$

é, recorrendo à definição

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{k=0}^3 \delta[n - k] z^{-k} \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} \end{aligned}$$

ou, recorrendo ao conhecimento de $U(z)$ e ao resultado do exemplo 6

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - z^{-4} \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

ou ainda, recorrendo à função *ztrans*,

```
ztrans(sym('Heaviside(n)-Heaviside(n-4)'))
ans =
    1+1/z+1/z^2+1/z^3
```

Recorrendo à função *iztrans* para calcular a TZ⁻¹ resulta

```
iztrans(1+1/z+1/z^2+1/z^3)
ans =
    charfcn[0](n)+charfcn[1](n)+charfcn[2](n)+charfcn[3](n)
```

, que deve ser interpretado como

$$\begin{aligned} x[n] &= \delta[n] - \delta[n - 1] - \delta[2] - \delta[n - 3] \\ &= u[n] - u[n - 4] \end{aligned}$$

Transformação inversa a partir de fracções simples

Se as expressões forem demasiado complexas, a expressão resultante da função *iztrans* é excessivamente trabalhosa de simplificar, pelo que é preferível recorrer à expansão em fracções simples, recorrendo à função *residuez*.

Exemplo 8

Retomemos o Exemplo 4. Dado

$$X(z) = \frac{z}{1 - 4z + 3z^2}$$

começamos por escrever os polinómios na forma de potências crescentes de z^{-1}

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0 + z^{-1}}{3 - 4z^{-1} + z^{-2}}$$

Assim, podemos definir os vectores dos coeficientes dos polinómios $B(z)$ e $A(z)$, b e a ,

```
b=[0, 1];
a=[3 -4 1];
```

, e calcular o vector r dos resíduos, o vector p dos pólos respectivos, e o vector k dos coeficientes directos

```
[r p k]=residuez(b,a)
r =
    0.5000
   -0.5000
```

```
p =
    1.0000
    0.3333
k =
    []
```

, pelo que a expansão em fracções simples resulta

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{r_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{r_2}{1 - p_2 z^{-1}} \\ &= \frac{0.5}{1 - z^{-1}} - \frac{0.5}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} \end{aligned}$$

De onde resulta de imediato, a partir das TZ conhecidas,

$$x[n] = 0.5u[n] - 0.5\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

Se desejarmos podemos recorrer neste passo final à função *iztrans*

```
iztrans(0.5*z/(z-1)-0.5*z/(z-1/3))
ans =
    1/2-1/2*(1/3)^n
```

Exemplo 9

Retomemos o Exemplo 5. Dado

$$X(z) = \frac{1}{(1 - 0.9z^{-1})^2 (1 + 0.9z^{-1})}$$

Dada a forma do denominador, a escrita sob a forma de um polinómio de potências crescentes de z^{-1} pode ser feita facilmente recorrendo à função **poly**

```
a=poly([0.9 0.9 -0.9])
a =
    1.0000    -0.9000   -0.8100    0.7290
```

, ficando assim definido de imediato o vector de coeficientes *a*

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1} - 0.81z^{-2} + 0.73z^{-3}}$$

Resta-nos definir o vector de coeficientes *b*

```
b=[1];
```

, e calcular o vector *r* dos resíduos, o vector *p* dos pólos respectivos, e o vector *k* dos coeficientes directos

```
[r p k]=residuez(b,a)
r =
    0.2500
    0.5000
    0.2500
p =
    0.9000
    0.9000
   -0.9000
k =
    []
```

, pelo que a expansão em fracções simples resulta, **tendo em atenção a existência de um pólo duplo**

$$X(z) = \frac{r_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{r_2}{(1 - p_2 z^{-1})^2} + \frac{r_3}{1 - p_3 z^{-1}}$$

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \frac{0.25}{1-0.9z^{-1}} - \frac{0.5}{(1-0.9z^{-1})^2} + \frac{0.25}{1-(-0.9)z^{-1}} \\
 &= \frac{0.25}{1-0.9z^{-1}} - \frac{0.5}{0.9} z \frac{0.9z^{-1}}{(1-0.9z^{-1})^2} + \frac{0.25}{1-(-0.9)z^{-1}}
 \end{aligned}$$

De onde resulta de imediato, a partir das TZ conhecidas, e da propriedade da translação no tempo

$$\begin{aligned}
 x[n] &= 0.25(0.9)^n u[n] + \frac{0.5}{0.9}(n+1)(0.9)^{n+1} u[n+1] + 0.25(-0.9)^n u[n] \\
 &= 0.75(0.9)^n u[n] + 0.5n(0.9)^n u[n] + 0.25(-0.9)^n u[n]
 \end{aligned}$$

, ou, recorrendo à função *iztrans*

```
iztrans(0.25/(1-0.9*z^-1)+0.5/(1-0.9*z^-1)^2+0.25/(1+0.9*z^-1))
ans =
      3/4*(9/10)^n+1/2*(9/10)^n*n+1/4*(-9/10)^n
```

Exemplo 10

Dada a TZ

$$X(z) = \frac{8 - 2z^{-1}}{8 - 4z^{-1} + 2z^{-2}}$$

Começamos por definir os vectores dos coeficientes dos polinómios $B(z)$ e $A(z)$, b e a ,

```
b=[8, -2];
a=[8 -4 2];
```

, e calcular o vector r dos resíduos, o vector p dos pólos respectivos, e o vector k dos coeficientes directos

```
[r p k]=residuez(b,a)
r =
    0.5000 - 0.0000i
    0.5000 + 0.0000i
p =
    0.2500 + 0.4330i
    0.2500 - 0.4330i
k =
     []
```

Note a existência de um pólo complexo conjugado. Em situações deste tipo é conveniente a escrita do pólo na forma polar

```
mp=abs(p)
mp =
    0.5000
    0.5000
ap=angle(p)/pi
ap =
    0.3333
   -0.3333
```

Podemos agora fazer a expansão em fracções simples

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \frac{r_1}{1-|p_1|e^{j\arg\{p_1\}}z^{-1}} + \frac{r_2}{1-|p_2|e^{j\arg\{p_2\}}z^{-1}} \\
 &= \frac{0.5}{1-0.5e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}} + \frac{0.5}{1-0.5e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}}
 \end{aligned}$$

De onde resulta de imediato, a partir das TZ conhecidas,

$$x[n] = 0.5(0.5)^n e^{jn\frac{\pi}{3}} u[n] + 0.5(0.5)^n e^{-jn\frac{\pi}{3}} u[n]$$

e ainda

$$\begin{aligned} x[n] &= (0.5)^n \frac{e^{jn\frac{\pi}{3}} + e^{-jn\frac{\pi}{3}}}{2} u[n] \\ &= (0.5)^n \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) u[n] \end{aligned}$$

Exemplo 11

Dada a TZ

$$X(z) = \frac{8z^2 - 2z + \sqrt{3}z}{4z^2 - 2z + 1}$$

começamos por escrever os polinómios na forma de potências crescentes de z^{-1}

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{8 + (-2 + \sqrt{3})z^{-1}}{4 - 2z^{-1} + z^{-2}}$$

Podemos agora definir os vectores dos coeficientes dos polinómios $B(z)$ e $A(z)$, b e a ,

```
b=[8 -2+3^0.5];
a=[4 -2 1];
```

, e calcular o vector r dos resíduos, o vector p dos pólos respectivos, e o vector k dos coeficientes directos

```
[r p k]=residuez(b,a)
r =
    1.0000 - 0.5000i
    1.0000 + 0.5000i
p =
    0.2500 + 0.4330i
    0.2500 - 0.4330i
k =
    []
```

Calculando o módulo e o argumento de cada um dos pólos complexos conjugados

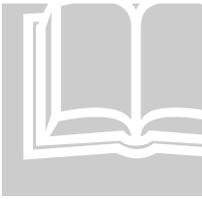
```
mp=abs(p)
mp =
    0.5000
    0.5000
>> ap=angle(p)/pi
ap =
    0.3333
   -0.3333
>>
```

Podemos agora fazer a expansão em fracções simples

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{r_1}{1 - |p_1| e^{j\arg\{p_1\}} z^{-1}} + \frac{r_2}{1 - |p_2| e^{j\arg\{p_2\}} z^{-1}} \\ &= \frac{1 - j0.5}{1 - 0.5e^{j\frac{\pi}{3}} z^{-1}} + \frac{1 + j0.5}{1 - 0.5e^{-j\frac{\pi}{3}} z^{-1}} \end{aligned}$$

De onde resulta de imediato, a partir das TZ conhecidas,

$$\begin{aligned} x[n] &= (1 - j0.5)(0.5)^n e^{jn\frac{\pi}{3}} u[n] + (1 + j0.5)(0.5)^n e^{-jn\frac{\pi}{3}} u[n] \\ &= 2(0.5)^n \frac{e^{jn\frac{\pi}{3}} + e^{-jn\frac{\pi}{3}}}{2} u[n] - j0.5 2j(0.5)^n \frac{e^{jn\frac{\pi}{3}} - e^{-jn\frac{\pi}{3}}}{2j} u[n] \\ &= (0.5)^n \left(2 \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{3}\right) \right) u[n] \end{aligned}$$



9. Representação de SLITs no domínio Z

Como se disse no Módulo 9, o modelo de um SLIT discreto causal, na sua forma mais geral, pode ser descrito analiticamente por uma equação às diferenças linear de coeficientes constantes

$$\sum_{i=0}^N a_i y[n-i] = \sum_{i=0}^M b_i x[n-i]$$

Admitamos condições iniciais nulas. Tendo em atenção a propriedade da translação no tempo da TZ Unilateral

$$Z\{x[n-n_0]\} = x(-1)z^{1-n_0} + x(-2)z^{2-n_0} + \dots + x(-n_0) + z^{-n_0} X(z)$$

, resulta para condições iniciais nulas, simplesmente

$$Z\{x[n-n_0]\} = z^{-n_0} X(z)$$

, pelo que, calculando a TZ de ambos os membros da equação do sistema, resulta

$$\sum_{i=0}^N a_i z^{-i} Y(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} X(z)$$

$$Y(z) \sum_{i=0}^N a_i z^{-i} = X(z) \sum_{i=0}^M b_i z^{-i}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}$$

Define-se a **função de transferência**, $H(z)$, de um SLIT causal como

$$H(z) = Z\{h[n]\} = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}$$

, considerando nulas as condições iniciais.

O quociente $H(z) = Y(z)/X(z)$ é designado por **função de transferência** do sistema, correspondendo à TZ da resposta impulsiva do sistema.

Factorizando o numerador e denominador de $H(z)$ podemos escrever

$$H(z) = \frac{b_0}{a_0} z^{N-M} \frac{\prod_{i=0}^M (z - z_i)}{\prod_{i=0}^N (z - p_i)}$$

em que z_i representa os **zeros do sistema** e p_i representa os **pólos do sistema**. Podemos assim descrever um sistema através da representação gráfica do posicionamento dos seus pólos e zeros no plano-z.

Exemplo 1

Consideremos o SLIT caracterizado pela equação às diferenças (veja a análise da pag. M9-15)

$$y[n] = 0.5y[n-1] + x[n]$$

, admitindo condições iniciais nulas. Calculando a TZ de ambos os membros da equação resulta

$$Y(z) = 0.5z^{-1}Y(z) + X(z)$$

$$Y(z)(1 - 0.5z^{-1}) = X(z)$$

, pelo que a função de transferência do sistema é

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}, \quad |z| > 0.5$$

A representação do sistema no plano- z é imediata. Definindo os vectores dos coeficientes b e a

```
b=[1];
a=[1 -0.5];
```

e recorrendo à função **zplane (b, a)**

```
zplane(b, a)
```

, obtemos a representação gráfica que se mostra na figura M10.9. Como vê o sistema tem um zero na origem e um pólo real em $z = 0.5$.

Apenas estamos interessados em fazer a análise de sistemas causais, pelo que a função de transferência, $H(z)$, é completamente caracterizada pela sua expressão algébrica, não sendo necessário especificar a sua ROC, que, como se disse, corresponde no casos de sinais causais ao plano exterior à circunferência que passa pelo pólo de maior módulo. Pode demonstrar-se que um SLIT é estável se e só se a ROC da sua função de transferência contiver o círculo unitário. No caso dos SLITs causais, e dado que a sua ROC corresponde sempre ao exterior da circunferência que passa pelo pólo de maior módulo, tal implica que todos os pólos do sistema estão contidos dentro do círculo unitário.

Um SLIT causal é estável se e só se todos os pólos do sistema estiverem, no plano- z , contidos dentro do círculo unitário

Se a ROC contiver o círculo unitário, podemos calcular a $H(z)$ sobre esse círculo, ou seja, a resposta em frequência do sistema

$$H(\Omega) = H(z)|_{z=e^{j\Omega n}} = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega n}}$$

Como se viu, podemos obter a representação gráfica da resposta em frequência do sistema recorrendo à função **freqz(b, a, w)**

```
w=0:pi/100:pi;
[H w]=freqz(b, a, w);
figure(2);plot(w, abs(H));grid on
axis([min(w) max(w) 0
      max(abs(H))])
figure(3);plot(w, angle(H));grid on
axis([min(w) max(w) -pi/2 pi/2])
```

A figura M10.10 mostra a resposta de amplitude e a resposta de fase.

Por último, note que a resposta impulsiva do sistema é imediata a partir da TZ^{-1} da função de transferência do sistema

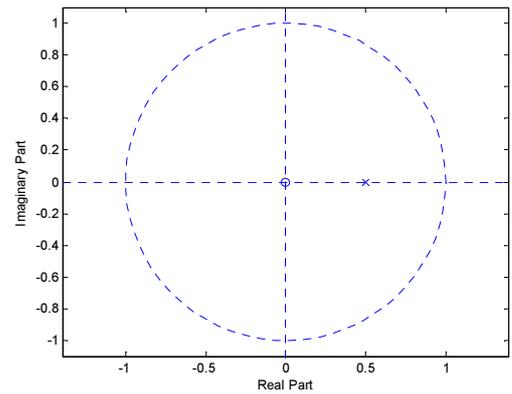


Figura M10.9

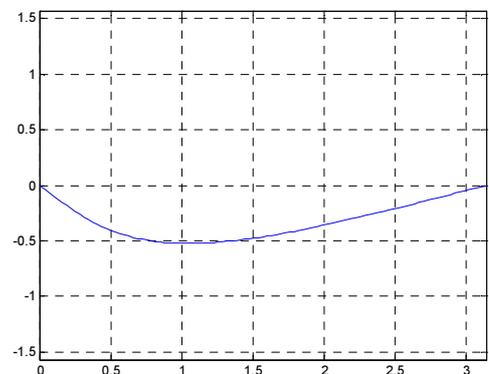
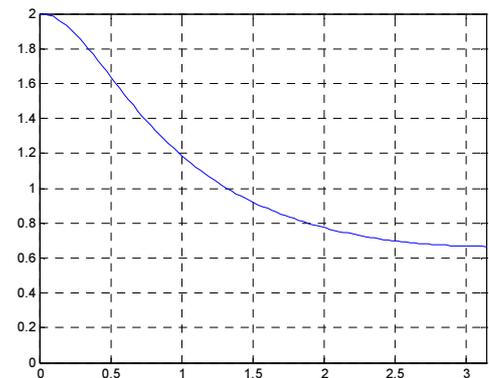


Figura M10.10

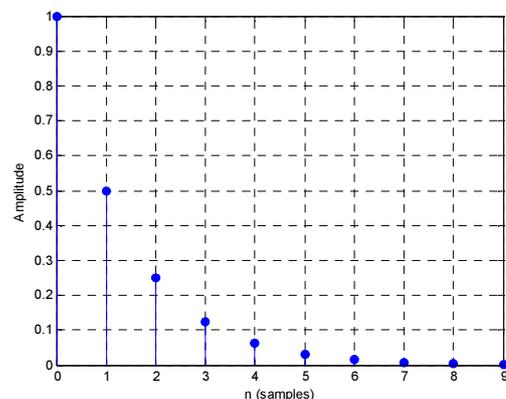


Figura M10.11

$$h[n] = Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} \right\} = 0.5^n u[n]$$

Recorde que a representação gráfica da resposta impulsiva pode ser obtida recorrendo à função **impz(b, a, n)**

```
impz(b, a, 10); grid on
```

A figura M10.11 mostra a resposta impulsiva do sistema. Relembre que qualquer das análises gráficas referidas acima, incluindo o diagrama de pólos e zeros, pode ser obtida recorrendo à função **fvtool(b, a)**.

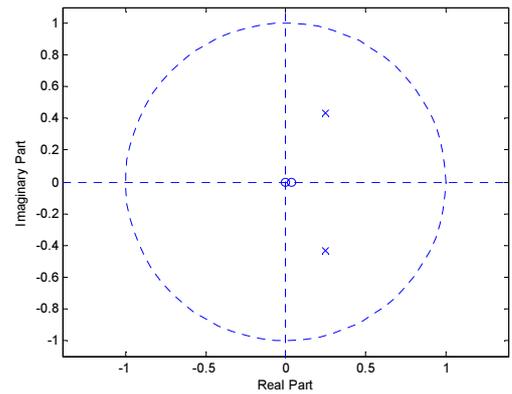


Figura M10.12

Exemplo 2

Retomemos o Exemplo 11 da pag. M10-17 e consideremos que a TZ dada corresponde à função de transferência de um sistema

$$H(z) = \frac{8z^2 - 2z + \sqrt{3}z}{4z^2 - 2z + 1} = \frac{8 + (-2 + \sqrt{3})z^{-1}}{4 - 2z^{-1} + z^{-2}}$$

Definindo os vectores dos coeficientes b e a

```
b=[8 -2+3^0.5];  
a=[4 -2 1]
```

podemos fazer a representação do sistema no plano- z recorrendo à função **zplane(b, a)**

```
zplane(b, a)
```

, obtemos a representação gráfica que se mostra na figura M10.12.

Podemos calcular os zeros e pólos do sistema recorrendo à função **roots(x)**

```
z=roots(b)  
z =  
    0.0335  
p=roots(a)  
p =  
    0.2500 + 0.4330i  
    0.2500 - 0.4330i  
mp=abs(p)  
mp =  
    0.5000  
    0.5000  
ap=angle(p)/pi  
ap =  
    0.3333  
   -0.3333
```

O que nos permite escrever a função de transferência na forma

$$H(z) = \frac{b_0}{a_0} z^{N-M} \frac{\prod_{i=1}^M (z - z_i)}{\prod_{i=1}^N (z - p_i)}$$

com $b_0 = 8$, $a_0 = 4$ e $z^{N-M} = z^{2-1} = z$, resulta

$$H(z) = \frac{2z(z - 0.0335)}{(z - 0.5e^{j\frac{\pi}{3}})(z - 0.5e^{-j\frac{\pi}{3}})}$$

A partir de $H(z)$ a equação às diferenças que define o sistema é imediata.. Sendo

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{8 + (-2 + \sqrt{3})z^{-1}}{4 - 2z^{-1} + z^{-2}}$$

, resulta

$$(4 - 2z^{-1} + z^{-2})Y(z) = (8 + (-2 + \sqrt{3})z^{-1})X(z)$$

pele que, calculando a TZ⁻¹ de ambos os membros, e atendendo às propriedades da TZ, resulta a equação do sistema

$$4y[n] - 2y[n-1] + y[n-2] = 8x[n] + (-2 + \sqrt{3})x[n-1]$$

$$y[n] = 0.5y[n-1] - 0.25y[n-2] + 2x[n] + \frac{(-2 + \sqrt{3})}{4}x[n-1]$$

Dado que a ROC contém o círculo unitário, podemos calcular a resposta em frequência do sistema, para o que podemos utilizar qualquer das expressões de $H(z)$ anteriormente vistas

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= H(z)|_{z=e^{j\Omega n}} \\ &= \frac{8e^{j2\Omega n} + (-2 + \sqrt{3})e^{j\Omega n}}{4e^{j2\Omega n} - 2e^{j\Omega n} + 1} \\ &= \frac{8 + (-2 + \sqrt{3})e^{-j\Omega n}}{4 - 2e^{-j\Omega n} + e^{-2j\Omega n}} \\ &= \frac{2e^{j\Omega n}(e^{j\Omega n} - 0.0335)}{(e^{j\Omega n} - 0.5e^{j\frac{\pi}{3}})(e^{j\Omega n} - 0.5e^{-j\frac{\pi}{3}})} \end{aligned}$$

A representação gráfica da resposta em frequência do sistema

```
w=0:pi/100:pi;
[H w]=freqz(b, a, w);
figure(2);plot(w, abs(H));grid on
axis([min(w) max(w) 0
      max(abs(H))])
figure(3);plot(w, angle(H));grid on
axis([min(w) max(w) -pi/2 pi/2])
```

, resulta conforme se mostra na figura M10.13.

Sendo a resposta impulsiva, conforme se viu no Exemplo 11 da pag. M10-17,

$$x[n] = (0.5)^n \left(2 \cos\left(n \frac{\pi}{3}\right) + \text{sen}\left(n \frac{\pi}{3}\right) \right) u[n]$$

, a sua representação gráfica

```
impz(b, a, 10); grid on
```

resulta conforme se mostra na figura M10.14

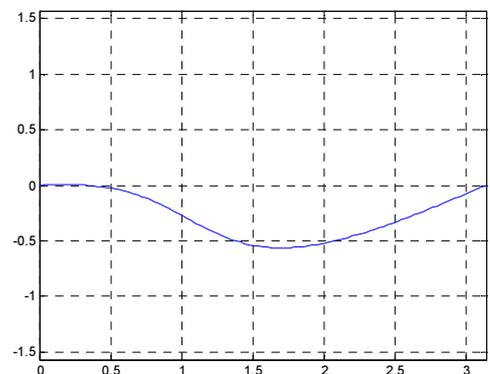
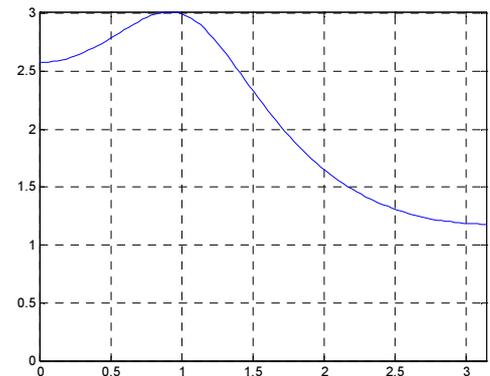


Figura M10.13

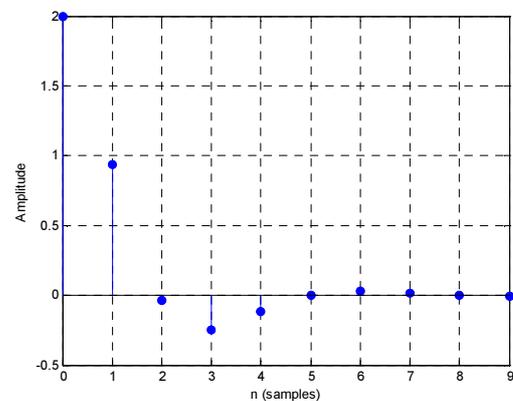


Figura M10.14



10. Soluções das equações às diferenças

Vamos agora ver como a TZ pode ser utilizada na determinação da resposta no tempo de SLITs causais. Como vimos, o modelo de um SLIT discreto causal pode ser descrito analiticamente por uma equação às diferenças linear de coeficientes constantes

$$\sum_{i=0}^N a_i y[n-i] = \sum_{i=0}^M b_i x[n-i]$$

Na abordagem até aqui feita, temos considerado que os sistemas em análise apresentavam condições iniciais nulas. Vamos agora admitir que assim não seja. Neste caso o cálculo da resposta do sistema implica que para além da equação às diferenças que o define sejam ainda conhecidos os conjuntos de condições iniciais

$$\{y(i) \quad , i = -1, \dots, -N\}$$

$$\{x(i) \quad , i = -1, \dots, -M\}$$

Sem perda de generalidade, e de modo a tornar a exposição mais intuitiva, vamos ver o modo como as soluções podem ser interpretadas através de um exemplo particular.

Consideremos o SLIT causal caracterizado pela equação às diferenças

$$y[n] - 1.5y[n-1] + 0.5y[n-2] = x[n]$$

e condições iniciais $y(-1) = 4$ e $y(-2) = 10$. Vamos determinar a resposta do sistema quando à entrada é apresentado o sinal

$$x[n] = 0.25^n u(n)$$

Calculando a TZ de ambos os membros da equação resulta

$$Y(z) - 1.5(y(-1) + z^{-1}Y(z)) + 0.5(y(-2) + z^{-1}y(-1) + z^{-2}Y(z)) = X(z)$$

Substituindo as condições iniciais e a TZ do sinal de entrada resulta

$$Y(z)(1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}) - (1 - 2z^{-1}) = \frac{1}{1 - 0.25z^{-1}}$$

$$Y(z)(1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}) = \frac{1}{1 - 0.25z^{-1}} + (1 - 2z^{-1})$$

e ainda

$$Y(z) = \frac{1}{(1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2})} + \frac{(1 - 2z^{-1})}{(1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2})}$$

Note que na equação acima a segunda a fracção do segundo membro resulta do facto de as condições iniciais não serem nulas. Caso as condições iniciais fossem nulas a TZ da resposta do sistema seria apenas

$$Y(z) = \frac{1}{(1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2})}$$

Note que o denominador da primeira fracção do segundo membro corresponde à TZ do sinal de entrada. Admitido condições iniciais nulas e um impulso unitário na entrada do sistema ($Z\{\delta[n]\} = 1$) teríamos a TZ da resposta impulsiva, o seja, a função de transferência do sistema

$$Y(z) = H(z) = \frac{1}{(1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2})}$$

Note ainda que a TZ da resposta do sistema com condições iniciais não nulas pode ser interpretada como a sobreposição da resposta do sistema a dois sinais, admitindo condições iniciais nulas

$$Y(z) = \underbrace{\frac{1}{(1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2})}}_{Y_x(z)} + \underbrace{\frac{(1 - 2z^{-1})}{(1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2})}}_{Y_{x_{CI}}(z)}$$

, ou seja, podemos considerar na entrada do sistema um sinal, $x_{CI}[n]$, no caso

$$x_{CI}[n] = Z^{-1}\{1 - 2z^{-1}\} = \delta[n] - 2\delta[n - 1]$$

do qual resulta uma resposta equivalente à existência de condições iniciais não nulas.

Retomemos a determinação da resposta do sistema às condições do problema. Manipulando analiticamente a expressão

$$Y(z) = \frac{1}{(1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2})} + \frac{(1 - 2z^{-1})}{(1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2})}$$

podemos escrever

$$Y(z) = \frac{2 - 2.25z^{-1} + 0.5z^{-2}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - z^{-1})(1 - 0.25z^{-1})}$$

, de onde resulta uma expansão em frações simples (recorrendo por exemplo à função **[r, p, k] = residuez (b, a)**, tal como explicado anteriormente)

$$Y(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{\frac{2}{3}}{1 - z^{-1}} + \frac{\frac{1}{3}}{1 - 0.25z^{-1}}$$

, pelo que a resposta do sistema no tempo é

$$y[n] = \left(0.5^n + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} 0.25^n \right) u[n]$$

Esta é a chamada **resposta completa** do sistema. Para ela contribuíram as características físicas do sistema, o sinal de entrada que em particular foi colocado na sua entrada, e as condições iniciais que se considerou existirem. Podemos decompor a resposta completa tendo em atenção os diversos contributos.

Resposta às condições iniciais e resposta com condições iniciais nulas

Determinando em separado a resposta a cada uma das componentes de $Y(z)$ na expressão vista

$$y[n] = Z^{-1} \left\{ \frac{1}{(1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2})} \right\} + Z^{-1} \left\{ \frac{(1 - 2z^{-1})}{(1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2})} \right\}$$

concluiríamos que a resposta do sistema pode ser escrita na forma

$$y[n] = \underbrace{\left(\frac{1}{3} 0.25^n - 2(0.5)^n + \frac{8}{3}\right)u[n]}_{\text{Condições iniciais nulas}} + \underbrace{\left(3(0.5)^n - 2\right)u[n]}_{\text{Condições iniciais}}$$

, em que se evidencia que a resposta completa do sistema pode ser decomposta em duas componentes: uma correspondente à resposta do sistema ao sinal de entrada admitindo condições iniciais nulas, designada por **resposta para condições iniciais nulas**; e outra correspondente à resposta do sistema resultante das condições iniciais, designada por **resposta às condições iniciais**, que é independente da primeira, e pode ser interpretada, como se disse, como a resposta equivalente a um sinal $x_{CI}[n]$ colocada à entrada do sistema com condições iniciais nulas.

Resposta homogénea e resposta particular

Note que na expressão

$$Y(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{\frac{2}{3}}{1 - z^{-1}} + \frac{\frac{1}{3}}{1 - 0.25z^{-1}}$$

o pólo $z = 0.25$ resultou do sinal de entrada considerado

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0.25z^{-1}}$$

enquanto que os pólos $z = 0.5$ e $z = 1$ são determinados pelo sistema independentemente do sinal de entrada

$$H(z) = \frac{1}{(1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2})} = \frac{1}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

A resposta do sistema pode ser escrita na forma

$$y[n] = \underbrace{\left(0.5^n + \frac{2}{3}\right)u[n]}_{\text{Homogénea}} + \underbrace{\frac{1}{3} 0.25^n u[n]}_{\text{Particular}}$$

, em que se evidencia que a resposta completa do sistema pode ser decomposta em duas componentes: uma associada aos pólos do sistema, designada por **resposta homogénea**; e outra associada aos pólos do sinal de entrada, designada por **resposta particular**.

Resposta transitória e resposta estacionária

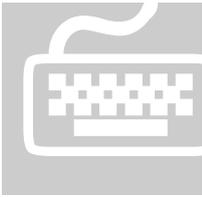
Podemos reescrever $Y(z)$ por ordem crescente do módulo dos pólos

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{3}}{1 - 0.25z^{-1}} + \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{\frac{2}{3}}{1 - z^{-1}}$$

, de onde resulta de imediato a resposta do sistema na forma

$$y[n] = \underbrace{\left(\frac{1}{3} 0.25^n + 0.5^n\right)u[n]}_{\text{Transitória}} + \underbrace{\frac{2}{3}u[n]}_{\text{Estacionária}}$$

, em que se evidencia que a resposta completa do sistema pode ser decomposta em duas componentes: uma resultante dos pólos existentes dentro do círculo unitário, designada por **resposta transitória**; e outra resultante dos pólos existentes sobre o círculo unitário, designada por **resposta estacionária**.



11. Matlab 10.1

Exemplo 1

Consideremos o SLIT causal caracterizado pela equação às diferenças

$$y[n] - y[n-1] + 0.25y[n-2] = x[n]$$

, condições iniciais $y(-1) = 1$ e $y(-2) = 1$, e sinal de entrada $x[n] = (1 - 0.25^n)u(n)$.

a) Determine a expressão da função de transferência do sistema.

A função de transferência do sistema é determinada independentemente do sinal de entrada e das condições iniciais. Aplicando a TZ a ambos os membros da equação às diferenças que caracteriza o sistema temos

$$\begin{aligned} Y(z) - z^{-1}Y(z) + 0.25z^{-2}Y(z) &= X(z) \\ Y(z)(1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}) &= X(z) \\ \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{1}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}} \end{aligned}$$

Obtemos assim a função de transferência

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}}$$

b) Represente o sistema no plano-z. Verifique se o sistema é estável.

A partir da função de transferência definimos facilmente os vectores dos coeficientes b e a

```
b=[1];
a=[1 -1 0.25]
```

Podemos fazer a representação do sistema no plano-z recorrendo à função `zplane(b, a)`

```
zplane(b, a)
```

, conforme se mostra na figura 10.15. O sistema é estável dado que todos os pólos do sistema estão contidos dentro do círculo unitário.

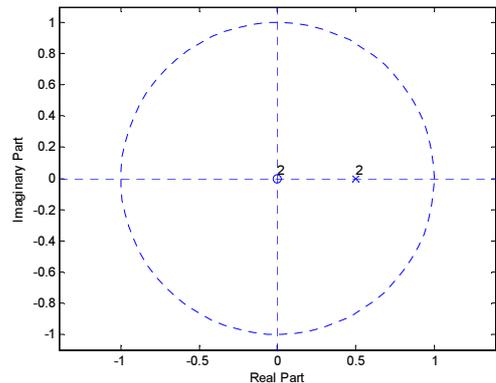


Figura M10.15

c) Determine a expressão da resposta impulsiva do sistema.

Calculando o vector r dos resíduos, o vector p dos pólos respectivos, e o vector k dos coeficientes directos

```
[r p k]=residuez(b, a)
r =
    0
    1
p =
    0.5000
    0.5000
k =
```

Pelo que a expansão em fracções simples resulta, tendo em atenção a existência de um pólo duplo

$$H(z) = \frac{r_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{r_2}{(1 - p_2 z^{-1})^2}$$

$$= \frac{1}{(1 - 0.5z^{-1})^2}$$

Recorrendo à função *iztrans*

```
syms z
iztrans(1/(1-0.5*z^-1)^2)
ans =
(1/2)^n + (1/2)^n * n
```

obtemos de imediato a resposta impulsiva

$$h[n] = (n + 1)0.5^n u[n]$$

d) Represente a resposta impulsiva do sistema.

Podemos fazer a representação da resposta impulsiva recorrendo à função *impz(b, a, n)*

```
impz(b, a, 20)
```

, conforme se mostra na figura 10.16

e) Determine a expressão da resposta em frequência do sistema.

A expressão da resposta em frequência do sistema é imediata a partir do conhecimento da função de transferência.

$$H(\Omega) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega} + 0.25e^{-2j\Omega}}$$

f) Represente graficamente a resposta em frequência do sistema.

Podemos fazer a representação da resposta em frequência recorrendo à função *freqz(b, a, w)*

```
w=0:pi/100:pi;
[H w]=freqz(b, a, w);
figure(3);plot(w, abs(H));grid on
axis([min(w) max(w) 0
max(abs(H))])
figure(4);plot(w, angle(H));grid on
axis([min(w) max(w) -pi/2 pi/2])
```

, obtendo assim a resposta de amplitude e de fase que se mostra na figura M.17.

g) Represente o sinal de entrada $x[n] = (1 - 0.25^n)$.

Fazendo

```
n=0:20;
x=(1-0.25.^n);
figure(5);stem(n, x, 'filled')
grid on;pause
```

, obtemos o gráfico da figura M10.18.

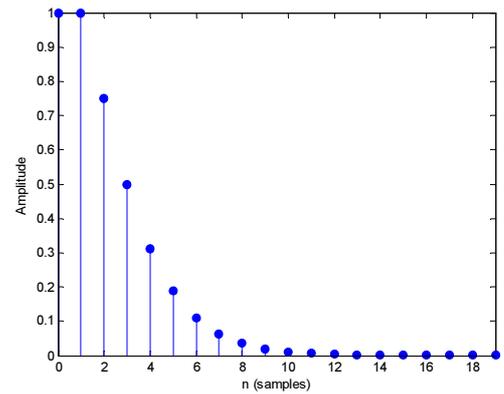


Figura M10.16

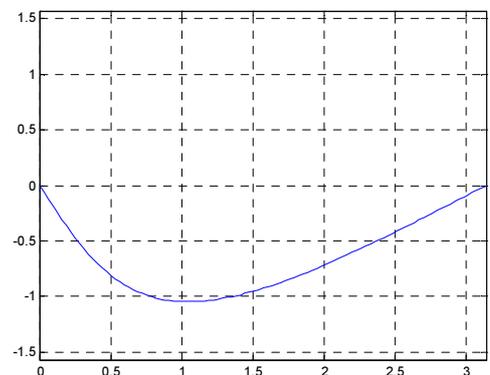
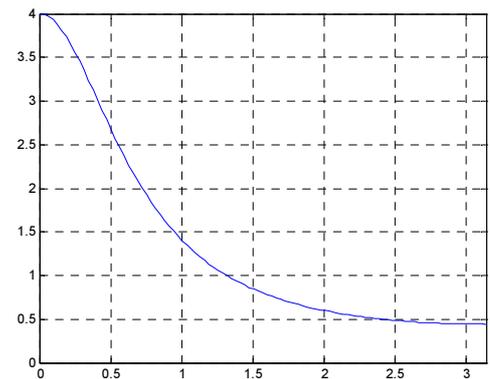


Figura M10.17

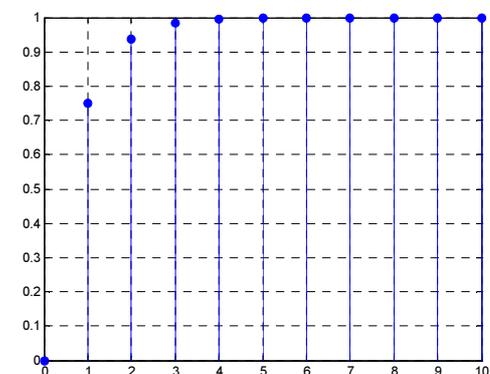


Figura M10.18

h) Calcule a TZ do sinal de entrada

Podemos calcular a TZ do sinal recorrendo à função `ztrans`

```
syms n
X= simplify(ztrans(1-0.25^n))
X =
    3*z/(z-1)/(4*z-1)
```

Obtemos assim

$$X(z) = \frac{3z}{(z-1)(4z-1)}$$

$$= \frac{0.75z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.25z^{-1})}$$

i) Represente o sinal de entrada no plano-z

Definindo os vectores dos coeficientes b e a

```
b=[0 0.75];
a=poly([1 0.25]);
```

Podemos fazer a representação do sistema no plano-z recorrendo à função `zplane(b, a)`

```
zplane(b, a)
```

, conforme se mostra na figura 10.19.

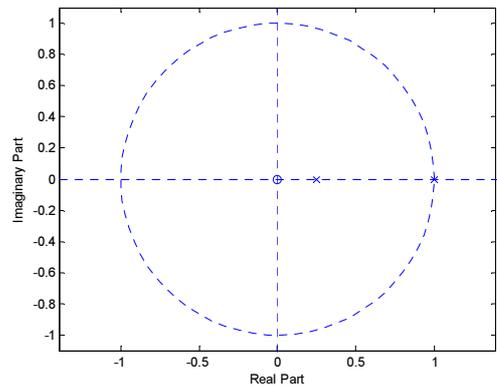


Figura M10.19

j) Determine a TZ da resposta do sistema ao sinal de entrada $x[n] = 1 - 0.25^n$, admitido condições iniciais nulas. Represente-a no plano-z

Com condições iniciais nulas resulta, a partir das alíneas anteriores

$$Y(z) = \frac{X(z)}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}}$$

$$= \frac{0.75z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})^2(1 - z^{-1})(1 - 0.25z^{-1})}$$

Definindo os vectores dos coeficientes b e a , recorrendo à função `poly`,

```
b=[0 0.75];
a=poly([0.5 0.5 1 0.25]);
```

, e fazendo a representação no plano-z recorrendo à função `zplane(b, a)`

```
zplane(b, a)
```

, obtemos a figura 10.20.

k) Determine a expressão da resposta do sistema ao sinal de entrada.

Calculando o vector r dos resíduos, o vector p dos pólos respectivos, e o vector k dos coeficientes directos

```
[r p k]=residuez(b, a)
pause
r =
    4.0000
   -0.0000
   -3.0000
```

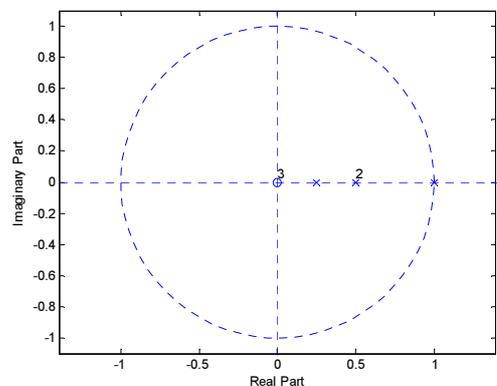


Figura M10.20

```

-1.0000
p =
  1.0000
  0.5000
  0.5000
  0.2500
k =
  []

```

, resulta a expansão em fracções simples

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= \frac{r_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{r_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \frac{r_3}{(1 - p_3 z^{-1})^2} + \frac{r_4}{1 - p_4 z^{-1}} \\
 &= \frac{4}{1 - z^{-1}} + \frac{-3}{(1 - 0.5z^{-1})^2} + \frac{-1}{1 - 0.25z^{-1}}
 \end{aligned}$$

Recorrendo à função *iztrans*

```

syms z
iztrans(4/(1-z^-1)-3/(1-0.5*z^-1)^2-1/(1-0.25*z^-1))
ans =
  4-3*(1/2)^n-3*(1/2)^n*n-(1/4)^n

```

obtemos de imediato a resposta do sistema

$$y[n] = 4u[n] - 3(n+1)0.5^n u[n] - 0.25^n u[n]$$

l) Identifique a componente homogénea e a componente particular na expressão da resposta do sistema.

Estando a resposta homogénea associada aos pólos do sistema e a resposta particular associada, aos pólos do sinal de entrada temos

$$y[n] = \underbrace{-3(n+1)0.5^n u[n]}_{\text{Homogénea}} + \underbrace{(4 - 0.25^n)u[n]}_{\text{Particular}}$$

m) Identifique a componente transitória e a componente estacionária na expressão da resposta do sistema.

A componente transitória está associada aos pólos existentes dentro do círculo unitário, e a componente estacionária está associada aos pólos existentes sobre o círculo unitário (Observe a figura 10.20)

$$y[n] = \underbrace{(-3(n+1)0.5^n - 0.25^n)u[n]}_{\text{Transitória}} + \underbrace{4u[n]}_{\text{Estacionária}}$$

n) Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada

Fazendo

```

n=0:10;
x=4-3*(n+1).*0.5.^n.-0.25.^n
figure(8);stem(n,x,'filled')
grid on;

```

, obtemos o gráfico da figura M10.21.

o) Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada utilizando a função *filter(b, a, x)*

Se não estivermos interessados em conhecer a expressão analítica da resposta do sistema, e apenas nos interessar obter um esboço da

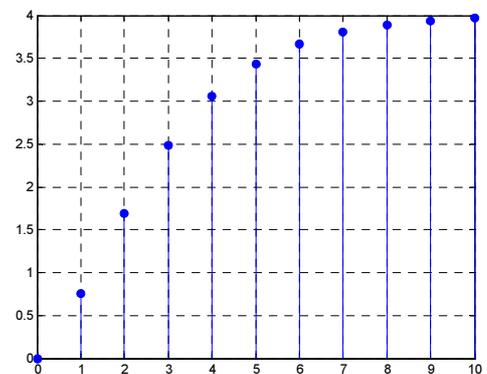


Figura M10.21

resposta do sistema ao um dado sinal de entrada, podemos recorrer de imediato à função $\text{filter}(b, a, x)$. No presente exemplo, fazendo

```
n=0:10;
x=1-0.25.^(n);
b=[1];
a=[1 -1 0.25];
y=filter(b,a,x)
figure(9);stem(n,y,'filled')
grid on;
```

, obtemos um gráfico idêntico ao que se mostra na figura M10.21.

p) Admita agora as condições iniciais não nulas. Determine o sinal $x_{CI}[n]$ que, colocado na entrada do sistema com condições iniciais nulas, provoca uma resposta equivalente à existência das condições iniciais.

Admitindo as condições iniciais e calculando a TZ de ambos os membros da equação às diferenças resulta

$$Y(z) - (y(-1) + z^{-1}Y(z)) + 0.25((y(-2) + z^{-1}y(-1) + z^{-2}Y(z)) = X(z)$$

ou seja

$$\begin{aligned} Y(z)(1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}) &= X(z) + y(-1) - 0.25y(-2) - 0.25z^{-1}y(-1) \\ Y(z) &= \frac{X(z)}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}} + \frac{1 - 0.25 - 0.25z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}} \\ &= \frac{X(z)}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}} + \frac{0.75 - 0.25z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}} \end{aligned}$$

pelo que

$$X_{CI}(z) = 0.75 - 0.25z^{-1}$$

logo

$$x_{CI}[n] = 0.75\delta[n] - 0.25\delta[n-1]$$

xic = filtic(b, a, y, x)

O sinal $x_{CI}[n]$ pode ser determinado recorrendo à função **filtic(b, a, y, x)**, em que y e x correspondem aos vectores de condições iniciais $\{y(i), i = -1, \dots, -N\}$, $\{x(i), i = -1, \dots, -M\}$. No nosso caso

```
y=[1 1];
xic=filtic(b,a,y)
xic =
    0.7500   -0.2500
```

, verificando a dedução feita anteriormente.

q) Determine e TZ da resposta do sistema às condições iniciais

Imediatamente a partir das expressões acima

$$Y_{x_{CI}}(z) = \frac{0.75 - 0.25z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}}$$

r) Determine a expressão da resposta do sistema às condições iniciais.

Definindo os vectores dos coeficientes b e a ,

```
b=[0.75 -0.25];
a=[1 -1 0.25];
```

Calculando o vector r dos resíduos, o vector p dos pólos respectivos, e o vector k dos coeficientes directos

```
[r p k]=residuez(b,a)
r =
    0.5000
    0.2500
p =
    0.5000
    0.5000
k =
    []
```

Pelo que a expansão em fracções simples resulta, atendendo à existência de um pólo duplo,

$$Y(z) = \frac{r_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{r_2}{(1 - p_2 z^{-1})^2} = \frac{0.5}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{0.25}{(1 - 0.5z^{-1})^2}$$

Recorrendo à função *iztrans*

```
syms z
iztrans(0.5/(1-0.5*z^-1)+0.25/(1-0.5*z^-1)^2)
ans =
    3/4*(1/2)^(n+1)+1/4*(1/2)^n
```

obtemos de imediato a resposta do sistema para as condições iniciais

$$y[n] = (0.75 + 0.25n)0.5^n u[n]$$

s) Determine a resposta completa do sistema admitindo condições iniciais não nulas.

Atendendo aos resultados das alíneas k) e r) temos

$$y[n] = \underbrace{4u[n] - 3(n+1)0.5^n u[n] - 0.25^n u[n]}_{\text{Condições iniciais nulas}} + \underbrace{(0.75 + 0.25n)0.5^n u[n]}_{\text{Condições iniciais}}$$

, pelo que a resposta completa resulta

$$y[n] = 4u[n] - (2.75n + 2.25)0.5^n u[n] - 0.25^n u[n]$$

t) Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada, admitindo condições iniciais não nulas.

Fazendo

```
n=0:10;
x=4-(2.75*n+2.25).*0.5.^n-0.25.^n
figure(1);stem(n,x,'filled')
grid on;
```

, obtemos o gráfico da figura M10.22.

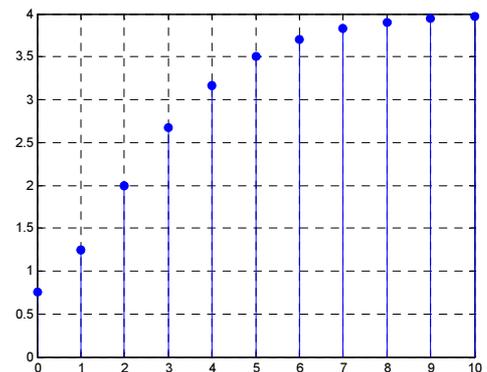


Figura M10.22

u) Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada utilizando a função *filter(b, a, x, xic)*

y = filter(b, a, x, xic)

A resposta de um sistema a um sinal de entrada

dadas condições iniciais não nulas pode ser determinado utilizando a função **filter(b, a, x, xic)**, em que *xic* (determinado na alínea p)) é o sinal de entrada equivalente às condições iniciais. Fazendo

```
n=0:10; x=1-0.25.^(n);
b=[1];
a=[1 -1 0.25];
y=filter(b,a,x,xic);
figure(12);stem(n,y,'filled'); grid on;
```

, obtemos um gráfico idêntico ao que se mostra na figura M10.22.



Ficha de Avaliação M10

N: Nome: Turma:

Data limite de entrega 30-06-2003

(A ficha deve ser colocada, até à data limite, no recipiente apropriado existente junto ao Gabinete C –CEDET)

Grupo C

Exercício 1

Consideremos o SLIT causal caracterizado pela equação às diferenças

$$y[n] - 0.5y[n-1] - 0.25y[n-2] = x[n] + 0.5x[n-1]$$

, condições iniciais $x(-1) = 0$ $y(-1) = 1$ e $y(-2) = -1$, e sinal de entrada $x[n] = (1 - 0.9^n)u(n)$.

- Determine a expressão da função de transferência do sistema.
- Represente o sistema no plano-z. Verifique se o sistema é estável.
- Determine a expressão da resposta impulsiva do sistema.
- Represente a resposta impulsiva do sistema.
- Determine a expressão da resposta em frequência do sistema.
- Represente graficamente a resposta em frequência do sistema.
- Represente o sinal de entrada.
- Calcule a TZ do sinal de entrada.
- Represente o sinal de entrada no plano-z.
- Determine a TZ da resposta do sistema ao sinal de entrada, admitido condições iniciais nulas. Represente-a no plano-z
- Determine a expressão da resposta do sistema ao sinal de entrada.
- Identifique a componente homogénea e a componente particular na expressão da resposta do sistema.
- Identifique a componente transitória e a componente estacionária na expressão da resposta do sistema.
- Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada
- Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada utilizando a função $filter(b, a, x)$
- Admita agora as condições iniciais não nulas. Determine o sinal $x_{CI}[n]$ que, colocado na entrada do sistema com condições iniciais nulas, provoca uma resposta equivalente à existência das condições iniciais.
- Determine a TZ da resposta do sistema às condições iniciais.
- Determine a expressão da resposta do sistema às condições iniciais.
- Determine a resposta completa do sistema admitindo condições iniciais não nulas.
- Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada, admitindo condições iniciais não nulas.
- Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada utilizando a função $filter(b, a, x, xic)$.