

LICENCIATURA EM ENGENHARIA DE SISTEMAS
DE TELECOMUNICAÇÕES E ELECTRÓNICA

Apontamentos de Análise de Sinais



© Prof. José Amaral
Versão 3.1 • 02-10-2003
Secção de Comunicações e Processamento de Sinal
ISEL-CEDET, Gabinete C • jda@isel.pt

Índice

OBJECTIVOS	2
1. SINAIS CONTÍNUOS E SINAIS DISCRETOS	3
SINAL CONTÍNUO	3
EXEMPLO 2.1	3
EXEMPLO 2.2	3
SINAL DISCRETO	3
EXEMPLO 2.3	3
EXEMPLO 2.4	4
SINAIS AMOSTRADOS	4
EXEMPLO 2.5	4
EXEMPLO 2.6	4
MATLAB 2.0	5
EXEMPLO 1	5
EXEMPLO 2	5
EXEMPLO 3	5
4. SINAIS PARES E SINAIS ÍMPARES	7
SINAL PAR	7
EXEMPLO 2.7	7
EXEMPLO 2.8	7
SINAL ÍMPAR	7
EXEMPLO 2.9	7
EXEMPLO 2.10	8
DECOMPOSIÇÃO PAR-ÍMPAR	8
EXERCÍCIO 2.1	9
MATLAB 2.1	11
5. SINAIS PERIÓDICOS E NÃO PERIÓDICOS	13
SINAIS CONTÍNUOS PERIÓDICOS	13
SINAIS DISCRETOS PERIÓDICOS	13
EXERCÍCIO 2.2	14
MATLAB 2.2	15
6. SINAIS DE ENERGIA E SINAIS DE POTÊNCIA	16
ENERGIA DE UM SINAL	16
POTÊNCIA DE UM SINAL	16
EXERCÍCIO 2.3	17
EXEMPLO 1	17
EXEMPLO 2	17
EXEMPLO 3	18
EXEMPLO 4	18
MATLAB 2.3	19
EXEMPLO 1	19
EXEMPLO 2	19
EXEMPLO 3	19
EXEMPLO 4	19
7. TRANSFORMAÇÕES LINEARES DA VARIÁVEL INDEPENDENTE .	20
INVERSÃO	20
EXEMPLO 2.11	20
EXEMPLO 2.12	20
COMPRESSÃO	21
EXEMPLO 2.13	21
EXEMPLO 2.14	21
EXPANSÃO	22
EXEMPLO 2.15	22
EXEMPLO 2.16	22
AVANÇO	23
EXEMPLO 2.17	23
EXEMPLO 2.18	23
ATRASO	24
EXEMPLO 2.19	24
EXEMPLO 2.20	24
EXERCÍCIO 2.4	25
EXEMPLO 1	25
EXEMPLO 2	26
MATLAB 2.4	28
DEMO 1: DECOMPOSIÇÃO PAR-ÍMPAR	29
9. EXERCÍCIOS M2	30
EXEMPLO 1	30
EXEMPLO 2	30
FICHA DE AVALIAÇÃO M2	31
GRUPO C	31
EXERCÍCIO 1	31
EXERCÍCIO 2	31
EXERCÍCIO 3	31
EXERCÍCIO 4	32
GRUPO B	32
EXERCÍCIO 5	32

Classificação de sinais

TÓPICOS

Sinais contínuos e discretos.

Sinais pares e sinais ímpares.

Decomposição par-ímpar.

Sinais periódicos e não periódicos.

Sinais de energia e sinais de potência.

Transformações lineares da variável independente

Define-se **sinal** como uma função de uma ou mais variáveis independentes, contendo informação sobre um determinado fenómeno físico.

A figura M2.1 mostra um segmento de um sinal de fala. Trata-se de um exemplo de um sinal unidimensional, isto é, função de apenas uma variável independente, no caso o tempo. A figura M2.2 mostra uma imagem médica. Trata-se de um exemplo de um sinal multidimensional, isto é, função de mais do que uma variável independente, no caso duas coordenadas do espaço.

Com base nas suas características os sinais podem ser classificados de diversos modos. Neste módulo são expostos os tipos de classificação relevantes para os temas que vamos desenvolver na cadeira de Análise de Sinais. Apenas serão estudados sinais unidimensionais. Durante a exposição a variável independente será sempre associada ao tempo, t , tal não implicando qualquer perda de generalidade dos conceitos expostos.



Figura M2.1



Figura M2.2

Objectivos

No fim deste módulo o aluno deverá :

1. Saber classificar um sinal como sendo um sinal contínuo ou um sinal discreto.
2. Dominar os conceitos de período de amostragem e frequência de amostragem.
3. Saber classificar um sinal como sendo um sinal par ou um sinal impar.
4. Saber decompor um qualquer sinal na suas componentes par e impar
5. Saber calcular a energia e a potência de um sinal.
6. Saber classificar um sinal como sendo um sinal de energia ou um sinal de potência.
7. Saber reconhecer, ou executar, operações de inversão, compressão, expansão, avanço, e atraso de um sinal.



1. Sinais contínuos e sinais discretos

Os sinais podem ser classificados com base no conjunto de valores assumidos pela variável independente.

Sinal contínuo

Um sinal diz-se um **sinal contínuo** quando a variável independente é contínua.

Exemplo 2.1

O sinal $x(t)$, definido por

$$x(t) = \cos(t) e^{-0.1t}$$

com $t \in \mathfrak{R}$, cuja evolução para $0 \leq t \leq 20$ se mostra na figura M2.3, é um sinal contínuo.

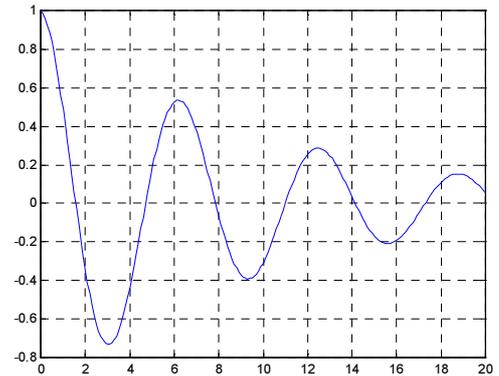


Figura M2.3

Exemplo 2.2

O sinal $x(t)$, definido por

$$x(t) = \begin{cases} 0 & , t < -2 \\ 2 & , -2 \leq t < 0 \\ 1 & , 0 \leq t < 2 \\ 0 & , t \geq 2 \end{cases}$$

com $t \in \mathfrak{R}$, cuja evolução para $-4 \leq t \leq 4$ se mostra na figura M2.4, é um sinal contínuo.

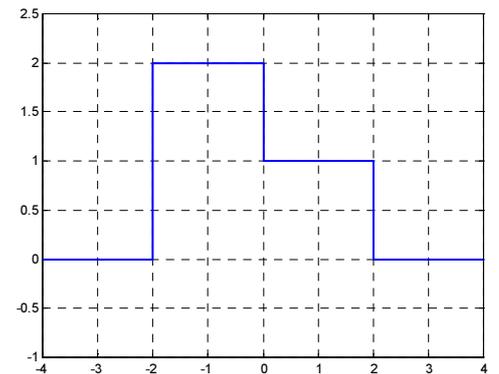


Figura M2.4

Sinal discreto

Um sinal diz-se um **sinal discreto** quando a variável independente é discreta.

Exemplo 2.3

O sinal $x[n]$, definido por

$$x[n] = \cos(n) e^{-0.1n}$$

com $n \in \mathfrak{N}$, cuja evolução para $0 \leq n \leq 20$ se mostra na figura M2.5, é um sinal discreto.

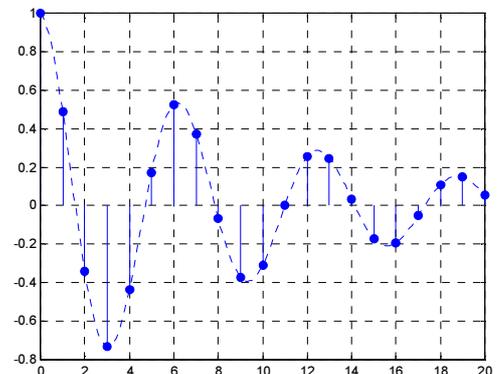


Figura M2.5

Exemplo 2.4

O sinal $x[n]$, definido por

$$x[n] = \begin{cases} 0 & n < -4 \\ n + 2 & -4 \leq n < 3 \\ 0 & n \geq 3 \end{cases}$$

com $n \in \mathbb{N}$, cuja evolução para $-6 \leq n \leq 6$ se mostra na figura M2.6, é um sinal discreto.

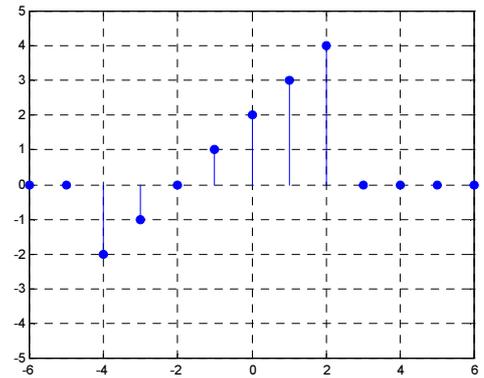


Figura M2.6

Sinais Amostrados

Muitos dos sinais que estamos interessados em analisar resultam da observação das características de sinais contínuos, nomeadamente a sua amplitude, em instantes de tempo uniformemente espaçados $t_n = nT_s$, em que T_s representa o **período de amostragem** e n é um número **inteiro**. Utilizaremos a notação

$$x[n] = x(nT_s), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

A grandeza inversa do período de amostragem é designada por **frequência de amostragem**

$$f_s = 1/T_s$$

, dizendo-se que o sinal contínuo está a ser **amostrado**, ou seja, que estão a ser recolhidas amostras, à frequência f_s .

Exemplo 2.5

O sinal discreto $x[n] = \cos(n) e^{-0.1n}$, referido no exemplo 2.4 e que se mostra na figura M2.5, é o sinal discreto resultante da amostragem do sinal contínuo $x(t) = \cos(t) e^{-0.1t}$, referido no exemplo 2.2 e que se mostra na figura M2.3, com um período de amostragem $T_s = 1$ s, ou seja, com uma frequência de amostragem $f_s = 1/T_s = 1$ Hz.

Exemplo 2.6

Da amostragem do sinal $x(t) = \cos(t) e^{-0.1t}$ com uma frequência de amostragem $f_s = 2$ Hz, ou seja, com um período de amostragem $T_s = 1/f_s = 0.5$ s, resulta o sinal discreto

$$x[n] = \cos(nT_s) e^{-0.1nT_s} = \cos(0.5n) e^{-0.05n}$$

cujas evolução para $0 \leq n \leq 40$ se mostra na figura M2.7.

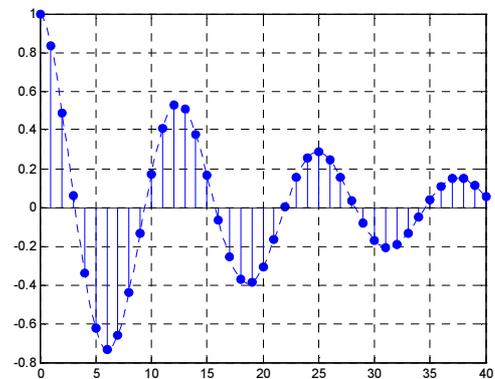
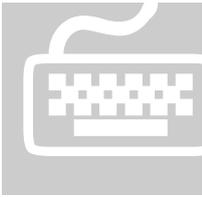


Figura M2.7



Matlab 2.0

Recorde o que foi dito no Módulo 1 referente à representação gráfica em *Matlab*.

Exemplo 1

Escreva um *script Matlab* que crie a figura M2.3.

O sinal $x(t)$ a representar é um sinal contínuo

$$x(t) = \cos(t) e^{-0.1t} \quad , 0 \leq t \leq 20$$

Dado que para proceder à representação gráfica do sinal é necessário criar um vector de valores da abcissa e um vector dos correspondentes valores da ordenada, ou seja, dado que em *Matlab* o sinal representado é sempre um sinal discreto, há que ter os devidos cuidados de modo a que o gráfico criado dê a ilusão de evoluir conforme o sinal contínuo que se deseja representar. Para tal “basta” escolher um intervalo, T_s , entre os valores da abcissa, de modo a que a curva resultante da união por segmentos de recta dos sucessivos pares ordenadas tenha uma evolução suficientemente suave. Não tem aqui cabimento a discussão, ou demonstração, de, para um sinal em particular, qual deve ser a dimensão mínima de T_s . Por tentativa e erro, juntando uma pitadinha de sensibilidade e bom senso, vai ver que não é difícil.

Consideremos por exemplo $T_s = 0.1$ s. O seguinte *script* dá origem à figura M2.3

```
ts = 0.1;
t = 0:ts:20;
xt = cos(t).*exp(-0.1*t);
figure(1);plot(t,xt)
grid on
```

Exemplo 2

Escreva um *script Matlab* que crie a figura M2.5.

O sinal $x[n]$ a representar é um sinal discreto

$$x[n] = \cos(n) e^{-0.1n} \quad , 0 \leq n \leq 20$$

, pelo que a representação gráfica em *Matlab* é imediata. O seguinte *script*, na sequência do acima descrito, dá origem à figura M2.5

```
n = 0:20;
xn = cos(n).*exp(-0.1*n);
figure(2);stem(n,xn,'filled')
hold on
plot(t,xt,':');
grid on
hold off
```

Exemplo 3

Escreva um *script Matlab* que crie a figura M2.4.

A representação formal do sinal

$$x(t) = \begin{cases} 0 & , t < -2 \\ 2 & , -2 \leq t < 0 \\ 1 & , 0 \leq t < 2 \\ 0 & , t \geq 2 \end{cases}$$

deveria ser conforme se mostra na figura M2.8, onde é claro se a função é definida à esquerda ou à direita nos pontos de descontinuidade, e poderia ser feita, por exemplo, através do *script*

```
t=[-4 -2 0 2;-2 0 2 4];
x=[ 0  2 1 0; 0 2 1 0];
plot(t,x,'-k','LineWidth', 3);
axis([-4 4 -1 2.5]);
grid on
hold on
op=[-2 0 2];
cp=[-2 0 2];
p1=[2 1 0];
p2=[0 2 1];
plot(op,p2,'ok');
stem(cp,p1,':k','filled')
hold off
```

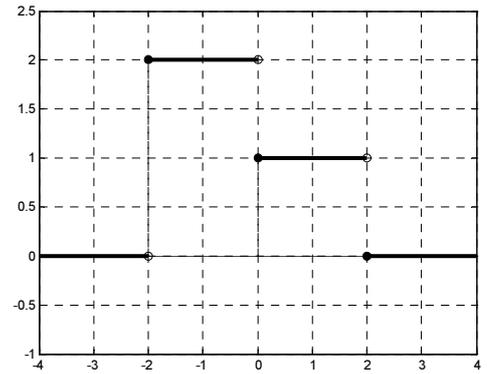


Figura M2.8

A figura M2.4 pode ser obtida através de um *script* bastante mais simples, aproveitando o facto de o *Matlab*, por defeito, unir os pares ordenados consecutivos com segmentos de recta

```
t=[-4 -2 -2 0 0 2 2 4];
x=[0 0 2 2 1 1 0 0];
plot(t,x);
axis([-4 4 -1 2.5]);
grid on
```

Evidentemente que a partir da figura M2.4 não é possível saber se, nos pontos de descontinuidade, o sinal é definido à esquerda ou à direita. Note que se fosse necessário recolher amostras do sinal com base nesta figura, seria necessário optar por uma das hipóteses, resultando, respectivamente, e utilizando um intervalo $T_s = 0.1 s$, os sinais discretos que se mostram nas figuras M2.9 e M2.10, que podem ser obtidos com o *script*

```
n=-4:3;
figure(1)
x=[0 0 2 2 1 1 0 0];
stem(n,x,'filled')
axis([-4 4 -1 2.5]);
grid on
figure(2)
n=-3:4;
x=[0 0 2 2 1 1 0 0];
stem(n,x,'filled')
axis([-4 4 -1 2.5]);
grid on
```

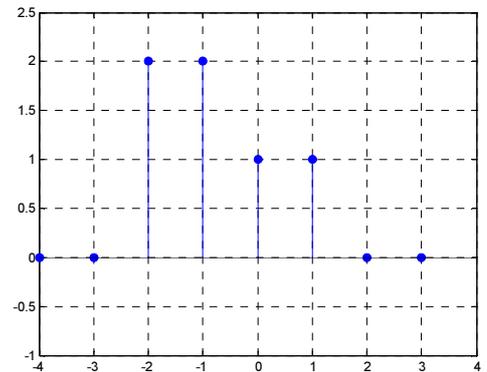


Figura M2.9

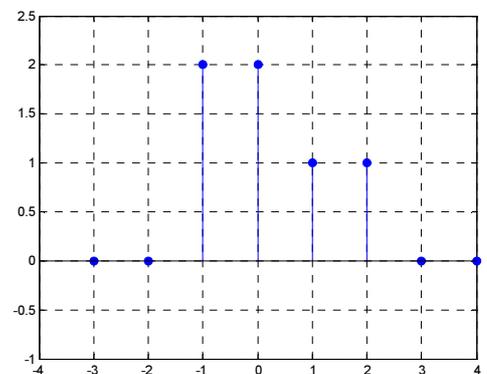
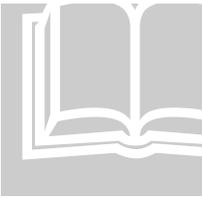


Figura M2.10

, sendo que apenas o sinal da figura M2.9 corresponde a um possível conjunto de amostras do sinal contínuo $x(t)$.



4. Sinais pares e sinais ímpares

Os sinais podem ser classificados com base em relações de simetria com os eixos coordenados.

Sinal par

Um sinal diz-se um **sinal par** quando é simétrico em relação ao eixo das ordenadas. No caso contínuo um sinal par satisfaz, por definição, a condição

$$x(t) = x(-t) \quad , \forall t$$

e no caso discreto, a condição

$$x[n] = x[-n] \quad , \forall n$$

Exemplo 2.7

O sinal contínuo $x(t)$, definido por

$$x(t) = \cos(t) e^{-0.1|t|}$$

, cuja evolução para $-10 \leq t \leq 10$ se mostra na figura M2.11, é um sinal par.

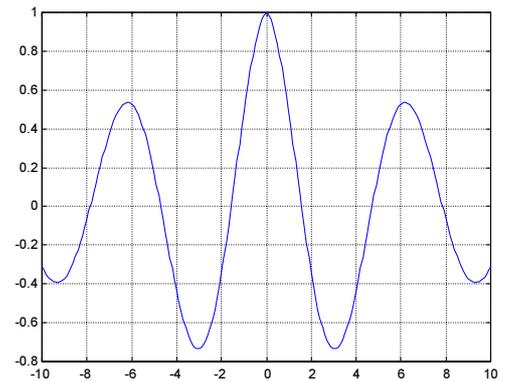


Figura M2.11

Exemplo 2.8

O sinal discreto $x[n]$, definido por

$$x[n] = \cos(n) e^{-0.1|n|}$$

cuja evolução para $-10 \leq n \leq 10$ se mostra na figura M2.12, é um sinal par.

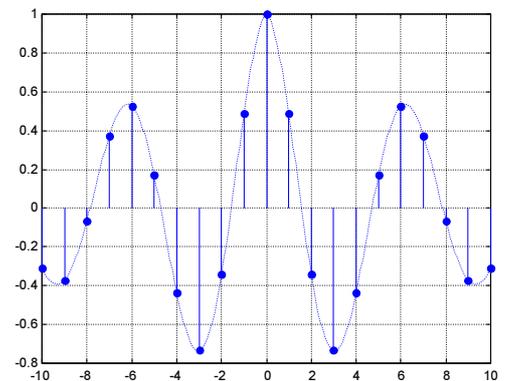


Figura M2.12

Sinal ímpar

Um sinal diz-se um **sinal ímpar** quando é anti-simétrico em relação ao eixo das ordenadas. No caso contínuo um sinal ímpar satisfaz, por definição, a condição

$$x(t) = -x(-t) \quad , \forall t$$

e no caso discreto, a condição

$$x[n] = -x[-n] \quad , \forall n$$

Exemplo 2.9

O sinal contínuo $x(t)$, definido por

$$x(t) = \sin(t) e^{-0.1|t|}$$

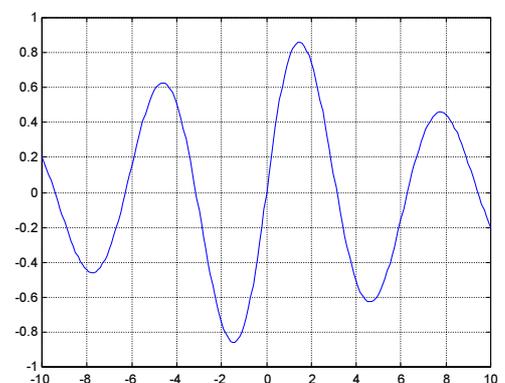


Figura M2.13

, cuja evolução para $-10 \leq t \leq 10$ se mostra na figura M2.13, é um sinal ímpar.

Exemplo 2.10

O sinal discreto $x[n]$, definido por

$$x[n] = \text{sen}(n) e^{-0.1|n|}$$

cuja evolução para $-10 \leq n \leq 10$ se mostra na figura M2.14, é um sinal ímpar

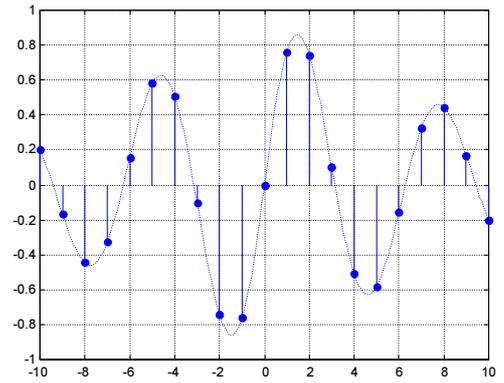


Figura M2.14

Decomposição par-ímpar

Qualquer sinal contínuo $x(t)$, pode ser decomposto nas suas componentes par e ímpar: $x(t) = x_p(t) + x_i(t)$

$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

$$x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

Para um sinal discreto, $x[n] = x_p[n] + x_i[n]$, as componentes par e ímpar são dadas pelas expressões

$$x_p[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2}$$

$$x_i[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{2}$$



Exercício 2.1

Considere o sinal definido por

$$x(t) = \begin{cases} 0 & , t < -2 \\ 2 & , -2 \leq t < 0 \\ 1 & , 0 \leq t < 2 \\ 0 & , t \geq 2 \end{cases}$$

Esboce o sinal. Calcule e esboce as suas componentes par e impar.

O modo mais fácil de resolver o problema é através de uma análise gráfica. Devemos começar por esboçar $x(-t)$, como se mostra na figura M2.16. Seguidamente, e atendendo à expressão que nos dá a componente par, somamos ponto a ponto as duas figuras e dividimos por dois, obtendo assim a figura M2.17. Para obter a componente impar subtraímos, ponto a ponto, a figura M2.16 à figura M2.15, obtendo assim figura M2.18

Note que nas figuras obtidas não está especificado o valor das componentes par e impar nos pontos de descontinuidade (o que não é difícil de obter a partir da soma ponto a ponto).

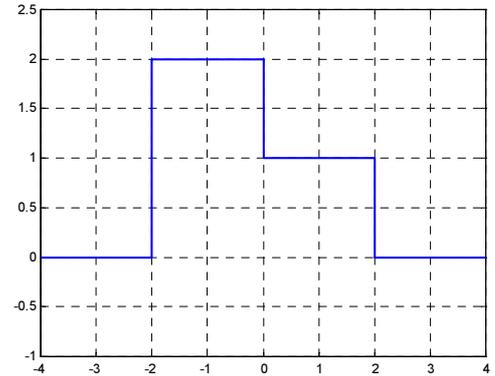


Figura M2.15

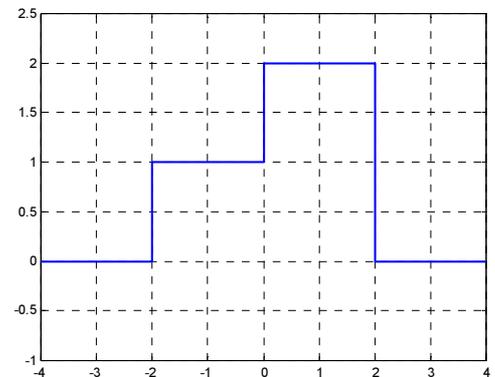


Figura M2.16

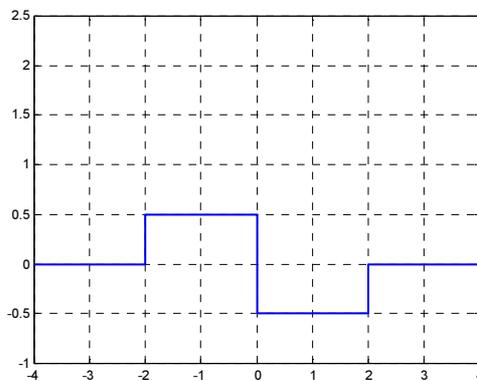


Figura M2.18

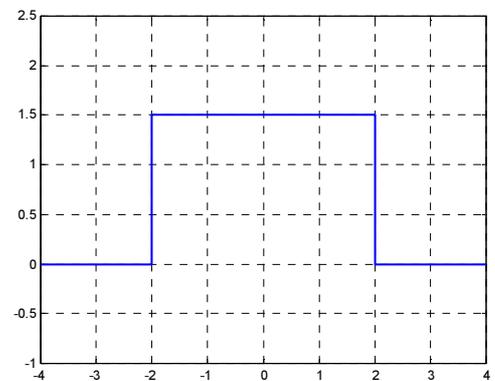


Figura M2.17

Resolvendo analiticamente o problema, temos, a partir da expressão analítica de $x(t)$, a expressão de $x(-t)$

$$x(-t) = \begin{cases} 0 & , t \leq -2 \\ 1 & , -2 < t \leq 0 \\ 2 & , 0 < t \leq 2 \\ 0 & , t > 2 \end{cases}$$

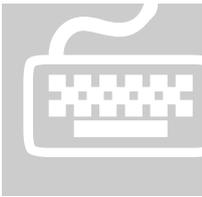
Recorrendo às expressões que permitem o cálculo da componente par e ímpar de um sinal, obtemos

$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} = \begin{cases} 0 & , t < -2 \\ 1 & , t = -2 \\ 1.5 & , -2 < t < 0 \\ 1 & , t = 0 \\ 1.5 & , 0 < t < 2 \\ 1 & , t = 2 \\ 0 & , t > 2 \end{cases}$$

e

$$x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} = \begin{cases} 0 & , t < -2 \\ 1 & , t = -2 \\ 0.5 & , -2 < t < 0 \\ 0 & , t = 0 \\ -0.5 & , 0 < t < 2 \\ -1 & , t = 2 \\ 0 & , t > 2 \end{cases}$$

Podemos confirmar a simetria e a anti-simetria relativamente ao eixo das ordenadas, respectivamente, das expressões obtidas para a componente par e ímpar do sinal.



Matlab 2.1

Recorrendo ao *Matlab*, resolva graficamente o exercício 2.1

Para um esboço rápido podemos escrever o *script* seguinte

```
xd=ones(1,100);
x=[0*xd 2*xd xd 0*xd];
ts=(8/length(x));
t=-4:ts:4-ts;

xp=(x+fliplr(x))/2;
figure(1);plot(t,xp)
axis([-4 4 -1 2.5]);
grid on
xi=(x-fliplr(x))/2;
figure(2);plot(t,xi)
axis([-4 4 -1 2.5]);
grid on
```

Obtendo assim rapidamente as figuras M2.17 e M2.18. Podemos verificar que, embora os esboços obtidos dêem uma boa ideia da evolução das componentes par e impar, o cálculo de $x_p(t)$ e $x_i(t)$ não estão feitos correctamente. Vamos refazer os gráficos com um menor número de pontos

```
xd=ones(1,10);
x=[0*xd 2*xd xd 0*xd];
ts=(8/length(x));
t=-4:ts:4-ts;
figure(3);plot(t,x,'-*')
axis([-4 4 -1 2.5]);
grid on
xp=(x+fliplr(x))/2;
figure(4);plot(t,xp,'-*')
axis([-4 4 -1 2.5]);
grid on
xi=(x-fliplr(x))/2;
figure(5);plot(t,xi,'-*')
axis([-4 4 -1 2.5]);
grid on
```

Observe as figuras M2.19 a M2.21. Note que embora o sinal $x(t)$ esteja bem definido (com amostragem à esquerda), $x_p(t)$ e $x_i(t)$ estão mal calculados. Basta notar que o gráfico da figura M2.20 não corresponde a um sinal par, e gráfico da figura M2.21 não corresponde a um sinal impar.

Para obter a componente par e impar do sinal o *script* tem de ser um pouco mais complexo

```
xd=ones(1,10);
x=[0*xd 2*xd xd 0*xd];
ts=(8/length(x));
t=-4:ts:4-ts;

tinv=-fliplr(t);
tinv1=min([t,tinv]);
tinv2=max([t,tinv]);
tinv=tinv1:ts:tinv2;

tm=t(1)-tinv(1);
tt=1:length(t);
x1=zeros(1,length(tinv));
```

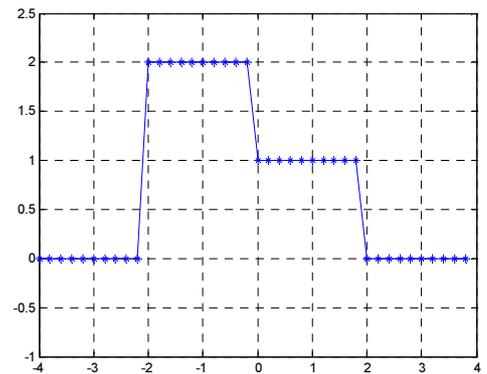


Figura M2.19

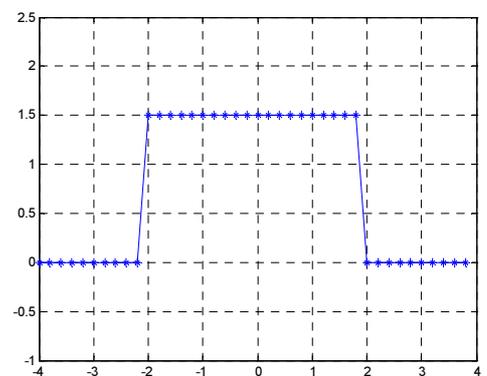


Figura M2.20

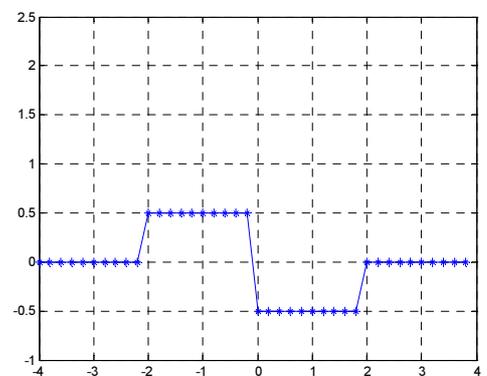


Figura M2.21

```

x1(tt+tm)=x;
x=x1;
xp=(x+fliplr(x))/2;
xi=(x-fliplr(x))/2;

figure(6);plot(tinv,xp,'-*')
axis([-4 4 -1 2.5]);
grid on
figure(7);plot(tinv,xi,'-*')
axis([-4 4 -1 2.5]);
grid on

```

Obtemos assim os gráficos das figuras M2.22 e M2.23

Compare com as expressões analíticas obtidas para $x_p(t)$ e $x_i(t)$ no Exercício 2.1, e verifique que agora os valores numéricos correspondentes às componentes par e ímpar estão correctos.

Verifique que, efectivamente, como teria que ser, a figura M2.22 representa um sinal par e a figura M2.23 representa um sinal ímpar.

Para uma representação mais conducente com o carácter contínuo do sinal podemos agora fazer uma representação com um maior número de pontos

```

xd=ones(1,100);
x=[0*xd 2*xd xd 0*xd];
ts=(8/length(x));
t=-4:ts:4-ts;

tinv=-fliplr(t);
tinv1=min([t,tinv]);
tinv2=max([t,tinv]);
tinv=tinv1:ts:tinv2;

tm=t(1)-tinv(1);
tt=1:length(t);
x1=zeros(1,length(tinv));
x1(tt+tm)=x;
x=x1;
xp=(x+fliplr(x))/2;
xi=(x-fliplr(x))/2;

figure(8);plot(tinv,xp,'.')
axis([-4 4 -1 2.5]);
figure(9);plot(tinv,xi,'.')
axis([-4 4 -1 2.5]);

```

Observe as figuras M2.24 e M2.25.

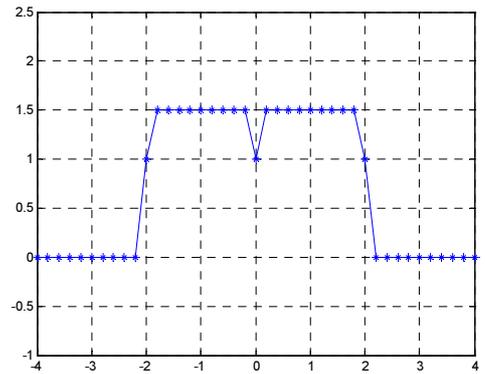


Figura M2.22

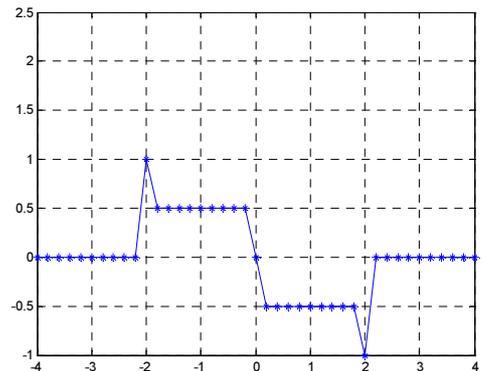


Figura M2.23

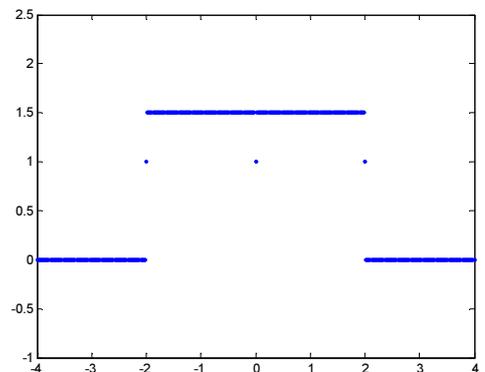


Figura M2.24

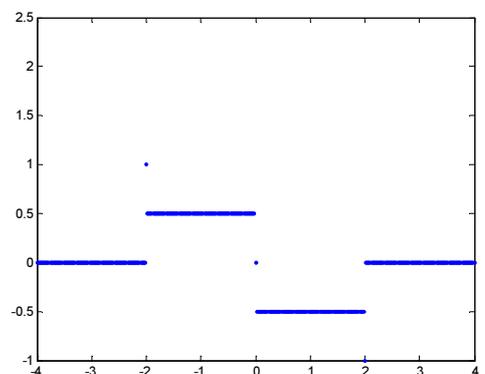


Figura M2.25



5. Sinais Periódicos e não Periódicos

Os sinais podem ser classificados com base nos padrões de comportamento dos valores que assumem ao longo do tempo.

Sinais Contínuos Periódicos

Um sinal contínuo, $x(t)$, diz-se um **sinal periódico** se satisfaz a condição

$$x(t) = x(t + T_0) \quad , \forall t$$

em que T_0 é uma constante positiva.

O menor valor positivo de T_0 que satisfaz a condição é designado por **período fundamental** do sinal, vulgarmente designado apenas por **período** do sinal. O inverso do período é designado por **frequência** do sinal

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

, e o correspondente valor angular é designado por **frequência angular** do sinal

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Um sinal para o qual não exista nenhum valor T_0 tal que $x(t) = x(t + T_0), \forall t$, diz-se um **sinal não periódico** ou **sinal aperiódico**.

Sinais Discretos Periódicos

Um sinal discreto, $x[n]$, diz-se um **sinal periódico** se satisfaz a condição

$$x[n] = x[n + N] \quad , \forall n \text{ inteiro}$$

em que N é um inteiro positivo.

O menor valor de N que satisfaz a condição é designado por **período fundamental** do sinal. No caso discreto a frequência angular é representada pelo carácter maiúsculo

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Caso o sinal discreto resulte da amostragem de um sinal contínuo, temos $T_0 = NT_s$

ou seja

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = 2\pi \frac{T_s}{T_0} = \omega_0 T_s = 2\pi \frac{f_0}{f_s}$$



Exercício 2.2

Considere o sinal contínuo

$$x(t) = \cos(10\pi t)$$

Calcule a sua frequência angular, frequência e período fundamental. Escreva a expressão do sinal discreto resultante da amostragem do sinal $x(t)$ com uma frequência de amostragem $f_{s_k} = kf_0$ e calcule a sua frequência angular e período. Particularize a expressão obtida para $k = 2, 4, 6, 8$ e 10 . Para cada um dos valores de k calcule a frequência angular e o período dos sinais discretos.

Sabemos que o cosseno pode ser escrito genericamente na forma $\cos(\omega_0 t + \theta_0)$, sendo ω_0 a frequência angular e θ_0 a fase na origem. Para o sinal particular temos

$$\begin{aligned}\omega_0 &= 10\pi \text{ rad s}^{-1} \\ f_0 &= \frac{\omega_0}{2\pi} = 5 \text{ Hz} \\ T_0 &= \frac{1}{f_0} = 0.2 \text{ s}\end{aligned}$$

Amostrando o sinal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ com uma frequência de amostragem $f_{s_k} = kf_0$ resulta o sinal discreto

$$\begin{aligned}x[n] &= x(nT_s) \\ &= \cos[2\pi f_0 nT_s] \\ &= \cos\left[2\pi \frac{f_0}{f_s} n\right] \\ &= \cos\left[\frac{2\pi}{k} n\right]\end{aligned}$$

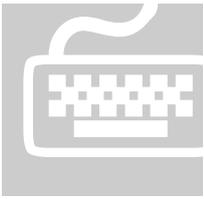
Sendo a frequência angular e período dados por

$$\Omega_0 = 2\pi \frac{f_0}{f_s} = \frac{2\pi}{k}, \quad N = \frac{2\pi}{\Omega_0} = k$$

Note que no caso discreto o co-seno (de fase nula na origem) pode ser escrito genericamente na forma $\cos[\Omega_0 n]$.

Para $k = 2, 4, 6, 8$ e 10 temos em particular

$$\begin{aligned}x[n] &= \cos[n\pi], \quad \Omega_0 = \pi, \quad N = 2 \\ x[n] &= \cos\left[n \frac{\pi}{2}\right], \quad \Omega_0 = \frac{\pi}{2}, \quad N = 4 \\ x[n] &= \cos\left[n \frac{\pi}{3}\right], \quad \Omega_0 = \frac{\pi}{3}, \quad N = 6 \\ x[n] &= \cos\left[n \frac{\pi}{4}\right], \quad \Omega_0 = \frac{\pi}{4}, \quad N = 8 \\ x[n] &= \cos\left[n \frac{\pi}{5}\right], \quad \Omega_0 = \frac{\pi}{5}, \quad N = 10\end{aligned}$$



Matlab 2.2

Recorra ao *Matlab* para esboçar os sinais definidos no Exercício 2.2, no intervalo $[0 \pi/5]$.

Escrevendo o *script*

```
f0=5;
t=0:0.01:pi/5;
xt=cos(2*pi*f0*t);
subplot(3,2,1)
plot(t,xt);
grid on
axis([min(t) max(t) min(xt)
      max(xt)])

for k=2:2:10
    fs=k*f0;
    ts=1/fs;
    tn=0:ts:pi/5;
    xn=cos(2*pi*f0*tn);
    subplot(3,2,1+k/2)
    stem(tn,xn,'filled');
    axis([min(tn) max(tn)
          min(xn) max(xn)])
    hold on
    plot(t,xt,'r:');
    hold off
end
```

obtemos os gráficos da figura M2.26. Note que os sinais amostrados, sendo sinais discretos, devem ser indexados a n , e não explicitamente aos instantes de tempo em que as amostras foram obtidas.

```
...
for k=2:2:10
    N=k;
    om0=2*pi/N;
    n=0:4*N;
    xn=cos(om0*n);
    subplot(3,2,1+k/2)
    stem(n,xn,'filled');
    axis([min(n) max(n)
          min(xn) max(xn)])
end
```

Observe a figura M2.27. Confirme a periodicidade N para cada um dos sinais resultantes das diversas frequências de amostragem. Note que cada um dos sinais discretos pode ser referido independentemente da expressão analítica que lhe dá origem, fazendo-se referência apenas à sequência de valores, nos presentes casos periódica, que os constituem

$$\cos[n\pi] \equiv [1 - 1]_2$$

$$\cos\left[n \frac{\pi}{2}\right] \equiv [1 0 - 1 0]_4 \quad \text{etc.}$$

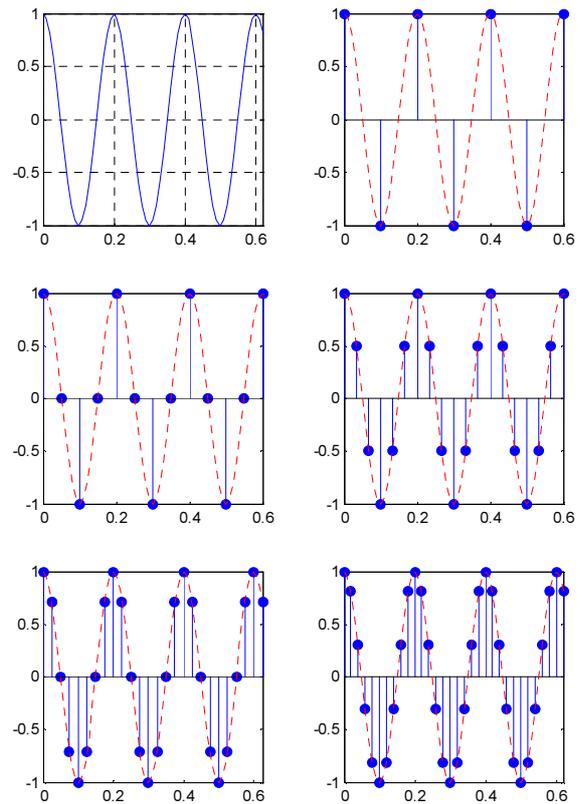


Figura M2.26

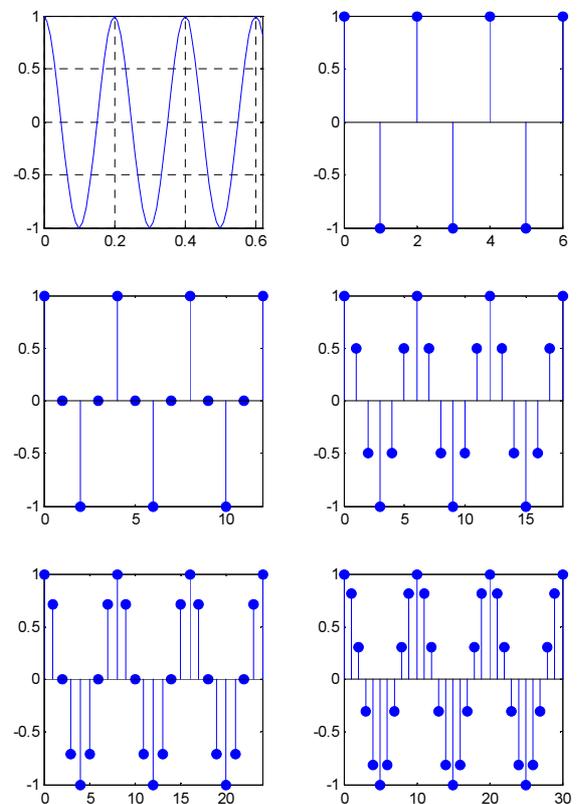


Figura M2.27



6. Sinais de energia e sinais de potência

Os sinais podem ser classificados quanto às suas características de energia e potência.

Energia de um sinal

Dado um sinal contínuo $x(t)$, define-se a **energia** do sinal, E , como

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Dado um sinal discreto $x[n]$, a energia do sinal é definida por

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Potência de um sinal

Dado um sinal contínuo $x(t)$, define-se a **potência média** do sinal, P , como

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Se o sinal for periódico, de período T_0 , resulta simplesmente

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt$$

Dado um sinal discreto $x[n]$, a potência média do sinal é definida por

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N-1} |x[n]|^2$$

sendo no caso de um sinal discreto periódico, de período N ,

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

Dizemos que um sinal é um **sinal de energia** se a sua energia for finita não nula, $0 < E < \infty$.
Resulta das definições anteriores que **um sinal de energia tem potência média nula**.

Dizemos que um sinal é um **sinal de potência** se a sua potência for finita não nula, $0 < P < \infty$,
Resulta das definições anteriores que **um sinal de potência tem energia infinita**.



Exercício 2.3

Exemplo 1

Calcule a energia do sinal contínuo definido por

$$x(t) = \begin{cases} t^2 & , 0 \leq t \leq 4 \\ 0 & , t \notin [0, 4] \end{cases}$$

Sendo a energia de um sinal contínuo $x(t)$ definida por

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

, temos em particular

$$\begin{aligned} E &= \int_0^4 t^4 dt \\ &= \left. \frac{t^5}{5} \right|_0^4 \\ &= \frac{4^5}{5} \\ &= 204.8 \end{aligned}$$

Exemplo 2

Calcule a potência do sinal contínuo definido por

$$x(t) = 4 \cos(10\pi t)$$

Sendo a potência de um sinal contínuo periódico $x(t)$ definida por

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt$$

, temos em particular

$$\omega_0 t = 10\pi t \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} t = 10\pi t \Rightarrow T_0 = \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} P &= 5 \int_{-1/10}^{1/10} 4^2 \cos^2(10\pi t) dt \\ &= 4^2 \left(\frac{1}{4\pi} \cos(10\pi t) \sin(10\pi t) + \frac{5t}{2} \right) \Big|_{-1/10}^{1/10} \\ &= \frac{4^2}{2} = 8 \end{aligned}$$

, o que não constitui novidade, já sabia (?), certamente, que a potência do sinal $x(t) = A \cos(\omega_0 t)$ é igual a $A^2/2$.

Exemplo 3

Calcule a energia do sinal discreto $x[n]$ definido por

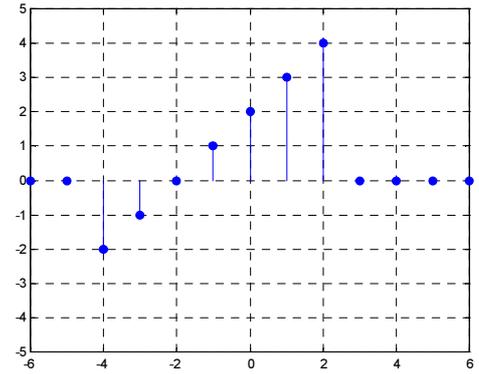
$$x[n] = \begin{cases} 0 & n < -4 \\ n + 2 & -4 \leq n < 3 \\ 0 & n \geq 3 \end{cases}$$

Sendo a energia de um sinal discreto $x[n]$ definida por

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

, temos em particular

$$E = (-2)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 = 35$$

**Exemplo 4**

Calcule a potência dos sinais discretos $x_1[n]$ e $x_2[n]$ definidos por

$$x_1[n] = \cos\left[n \frac{\pi}{3}\right]$$

$$x_2[n] = \cos\left[n \frac{\pi}{5}\right]$$

Sendo a potência de um sinal discreto periódico $x[n]$ definida por

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

, temos em particular

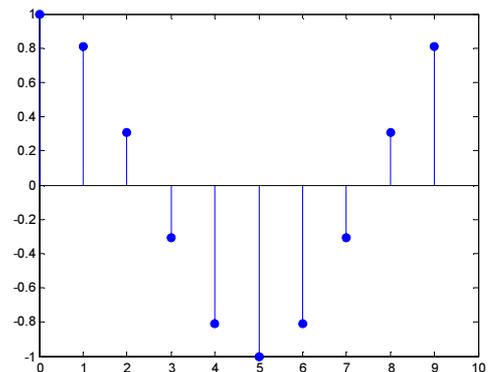
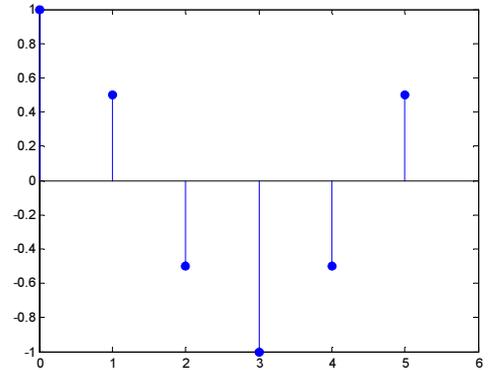
$$\Omega_0 n = \frac{\pi}{3} n \Rightarrow \frac{2\pi}{N} n = \frac{\pi}{3} n$$

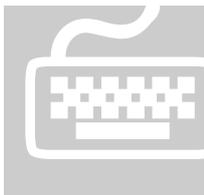
$$\Rightarrow N = 6$$

$$P_1 = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 \cos^2\left[n \frac{\pi}{3}\right] = \frac{1}{6} \left((1)^2 + (0.5)^2 + (-0.5)^2 + (-1)^2 + (-0.5)^2 + (0.5)^2 \right) = 0.5$$

Para o segundo sinal temos $N = 10$, pelo que

$$P_2 = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^9 \cos^2\left[n \frac{\pi}{5}\right] = 0.5$$





Matlab 2.3

Recorra ao *Matlab* para resolver os exemplos de Exercício 2.3.

Exemplo 1

Tratando-se de um sinal contínuo, podemos convenientemente recorrer à *Symbolic Math Toolbox*

```
>> syms t;
>> x=t.^2;
>> E=int(x.^2,0,4)
E =
    1024/5
>> 1024/5
ans = 204.8000
>>
```

Exemplo 2

Recorrendo à *Symbolic Math Toolbox*

```
>> t0=1/5;
>> syms t;
>> x=4*cos(10*pi*t);
>> P=(1/t0)*int(x.^2,-t0/2,t0/2)
P =
    8
>>
```

Exemplo 3

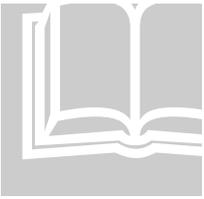
Tratando-se de um sinal discreto temos facilmente

```
>> n=-4:2;
>> x=n+2;
>> E=sum(x.^2)
E =
    35
>>
```

Exemplo 4

Tratando-se de sinais discretos temos facilmente

```
>> N=6;
>> n=0:N-1;
>> x=cos(2*pi*n/N);
>> P=(1/N)*sum(x.^2)
P =
    0.5000
>>
>>
>> N=10;
>> n=0:N-1;
>> x=cos(2*pi*n/N);
>> P=(1/N)*sum(x.^2)
P =
    0.5000
>>
```



7. Transformações lineares da variável independente

Vamos agora interpretar as relações entre um sinal original e o sinal resultante de uma transformação linear operada sobre a variável independente

$$x(t) \Rightarrow x(at - b)$$

, sendo a e b constantes reais.

Inversão

Uma transformação do tipo $x(t) \Rightarrow x(at - b)$ com $a = -1$, $b = 0$, ou seja

$$x(t) \Rightarrow x(-t)$$

é designada por **inversão**.

O sinal resultante é uma versão do sinal original reflectida em relação ao eixo das ordenadas.

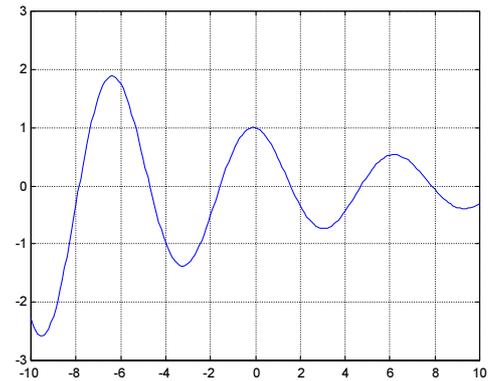


Figura M2.28

Exemplo 2.11

Da inversão do sinal $x(t) = \cos(t) e^{-0.1t}$, cuja evolução para $-10 \leq t \leq 10$ se mostra na figura M2.28, resulta o sinal $y(t) = x(-t) = \cos(-t) e^{0.1t}$, cuja evolução para $-10 \leq t \leq 10$ se mostra na figura M2.29.

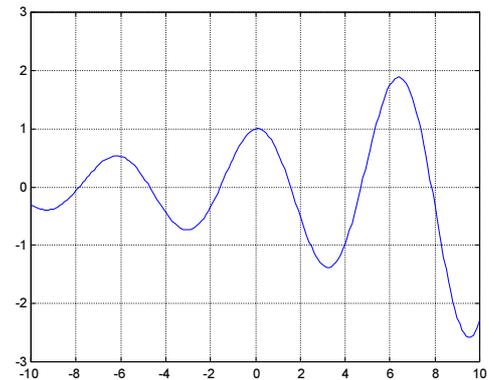


Figura M2.29

Exemplo 2.12

Da inversão do sinal $x[n] = \cos(n) e^{-0.1n}$, cuja evolução para $-10 \leq n \leq 10$ se mostra na figura M2.31, resulta o sinal $y[n] = x[-n] = \cos(-n) e^{0.1n}$, cuja evolução para $-10 \leq n \leq 10$ se mostra na figura M2.30.

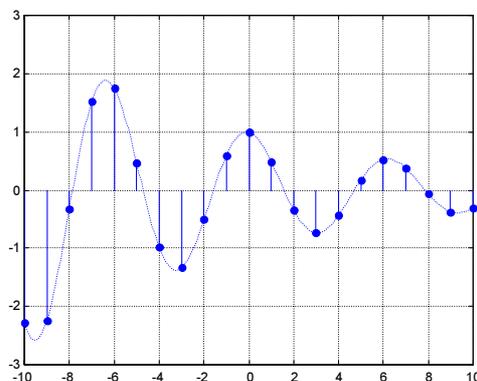


Figura M2.30

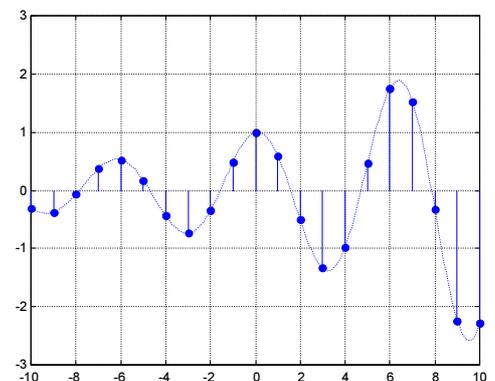


Figura M2.31

Compressão

Uma transformação do tipo $x(t) \Rightarrow x(at - b)$ com $a > 1$, $b = 0$, ou seja

$$x(t) \Rightarrow x(at) \quad , a > 1$$

é designada por **compressão**.

O sinal resultante é uma versão do sinal original comprimida segundo o eixo das abcissas (em ambos os sentidos em direcção à origem).

Exemplo 2.13

Da compressão com um factor $a = 2$ do sinal $x(t) = \text{sen}(t) e^{-0.1|t|}$, cuja evolução para $-10 \leq t \leq 10$ se mostra na figura M2.32, resulta o sinal $y(y) = x(2t) = \text{sen}(2t) e^{-0.1|2t|}$, cuja evolução para $-10 \leq t \leq 10$ se mostra na figura M2.33.

Exemplo 2.14

Da compressão com um factor $a = 2$ do sinal $x[n] = \text{sen}(n) e^{-0.1|n|}$, cuja evolução para $-10 \leq n \leq 10$ se mostra na figura M2.34, resulta o sinal $y[n] = x[2n] = \text{sen}(2n) e^{-0.1|2n|}$, cuja evolução para $-10 \leq n \leq 10$ se mostra na figura M2.35.

Note que no caso de uma compressão efectuada sobre um sinal discreto, $x[n] \Rightarrow x[an]$ em que an é obrigatoriamente um inteiro positivo, **há amostras do sinal que se perdem**.

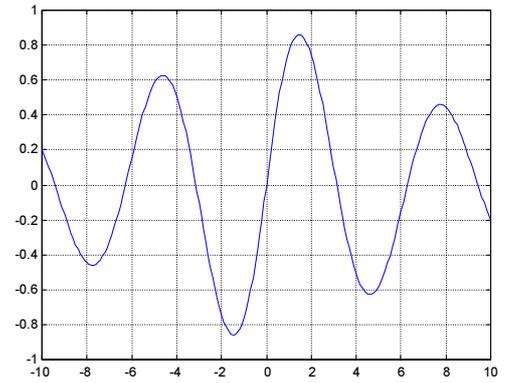


Figura M2.32

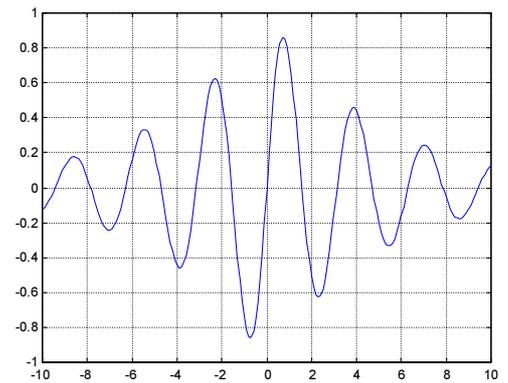


Figura M2.33

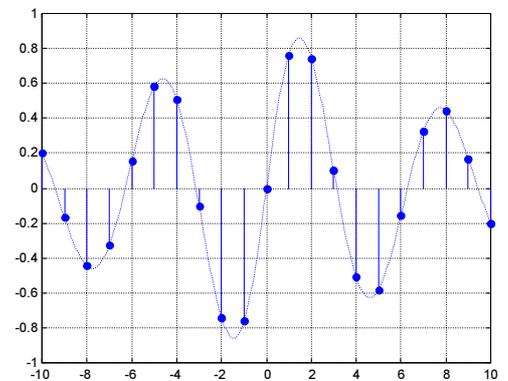


Figura M2.34

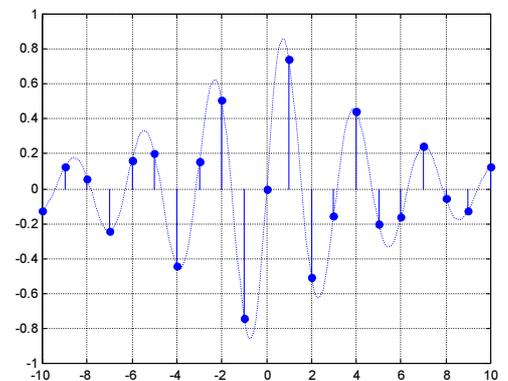


Figura M2.35

Expansão

Uma transformação do tipo $x(t) \Rightarrow x(at - b)$ com $0 < a < 1$, $b = 0$, ou seja

$$x(t) \Rightarrow x(at) \quad , 0 < a < 1$$

é designada por **expansão**.

O sinal resultante é uma versão do sinal original expandida segundo o eixo das abcissas (a partir da origem e em ambos os sentidos).

Exemplo 2.15

Da expansão com um factor $a = 0.5$ do sinal $x(t) = \text{sen}(t) e^{-0.1|t|}$, cuja evolução para $-10 \leq t \leq 10$ se mostra na figura M2.36, resulta o sinal $x(0.5t) = \text{sen}(0.5t) e^{-0.1|0.5t|}$, cuja evolução para $-10 \leq t \leq 10$ se mostra na figura M2.37.

Exemplo 2.16

Da expansão com um factor $a = 0.5$ do sinal $x[n] = \text{sen}(n) e^{-0.1|n|}$, cuja evolução para $-10 \leq n \leq 10$ se mostra na figura M2.38, resulta o sinal $y[n] = x[0.5n] = \text{sen}(0.5n) e^{-0.1|0.5n|}$, cuja evolução para $-10 \leq n \leq 10$ se mostra na figura M2.39.

Note que no caso de uma expansão efectuada sobre um sinal discreto, **há amostras do novo sinal que devem ser estimadas**. Não tendo aqui cabimento a discussão do problema da estimação, **atribuímos o valor zero às novas amostras**.

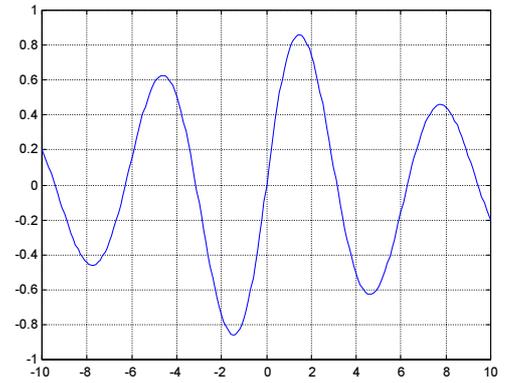


Figura M2.36

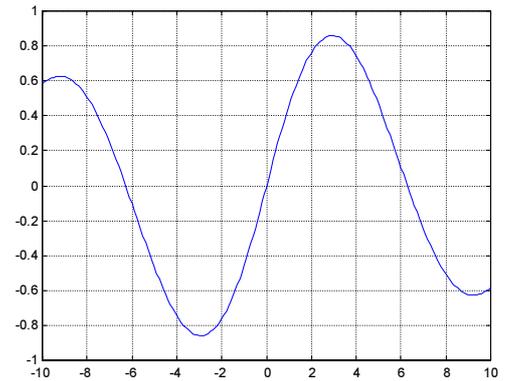


Figura M2.37

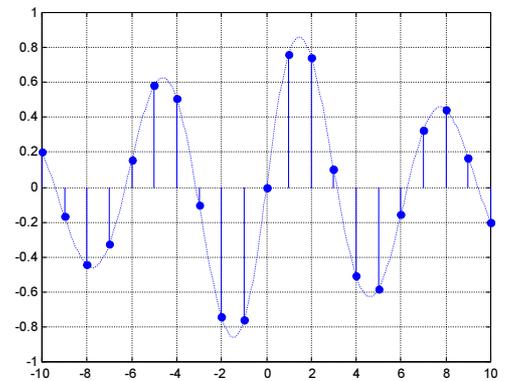


Figura M2.38

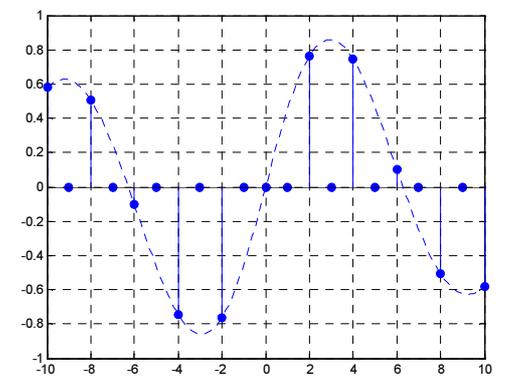


Figura M2.39

Avanço

De uma transformação do tipo $x(t) \Rightarrow x(at - b)$ com $a = 1$, $b < 0$, ou seja

$$x(t) \Rightarrow x(t + |b|)$$

resulta um sinal que está em **avanço** relativamente ao sinal original.

A forma do sinal mantém-se intacta, registando-se um translação segundo o sentido decrescente do eixo das abcissas.

Exemplo 2.17

A figura M2.40 mostra a evolução para $-10 \leq t \leq 10$ do sinal $x(t) = \text{sen}(t) e^{-0.1|t|}$. O sinal $y(t) = x(t + 4) = \text{sen}(t + 4) e^{-0.1|t+4|}$, cuja evolução para $-10 \leq t \leq 10$ se mostra na figura M2.41, está em avanço relativamente a $x(t)$

Exemplo 2.18

A figura M2.42 mostra a evolução para $-10 \leq n \leq 10$ do sinal $x[n] = \text{sen}(n) e^{-0.1|n|}$. O sinal $y[n] = x[n + 4] = \text{sen}(n + 4) e^{-0.1|n+4|}$, cuja evolução para $-10 \leq n \leq 10$ se mostra na figura M2.43, está em avanço relativamente a $x[n]$.

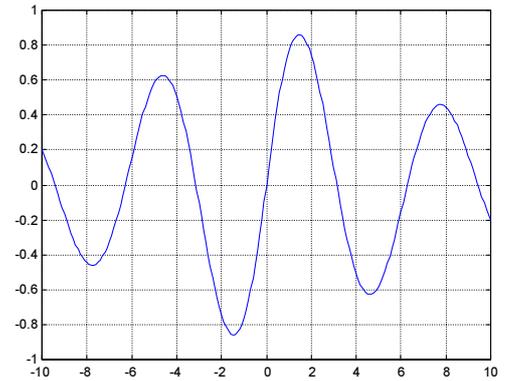


Figura M2.40

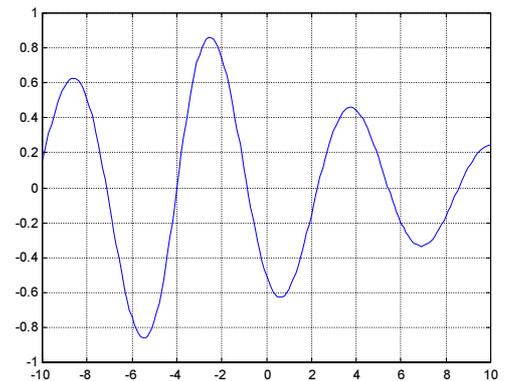


Figura M2.41

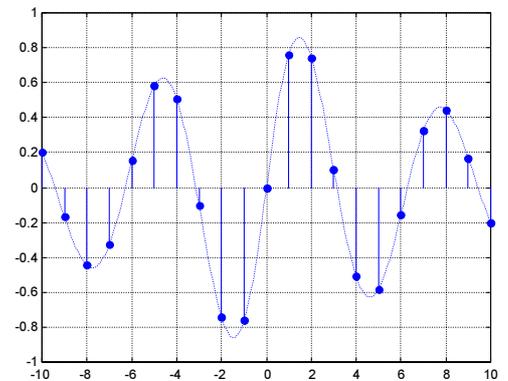


Figura M2.42

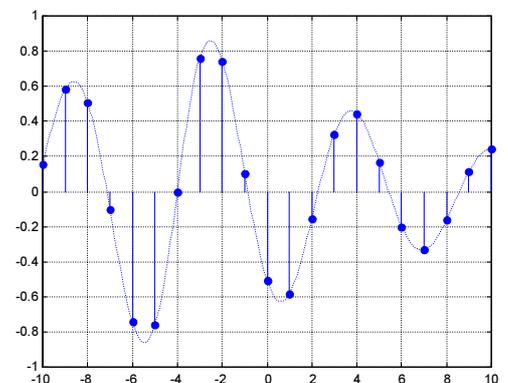


Figura M2.43

Atraso

De uma transformação do tipo $x(t) \Rightarrow x(at - b)$ com $a = 1$, $b > 0$, ou seja

$$x(t) \Rightarrow x(t - |b|)$$

resulta um sinal que está em **atraso** relativamente ao sinal original.

A forma do sinal mantém-se intacta, registando-se um translação segundo o sentido crescente do eixo das abcissas.

Exemplo 2.19

A figura M2.44 mostra a evolução para $-10 \leq t \leq 10$ do sinal $x(t) = \text{sen}(t) e^{-0.1|t|}$. O sinal $y(t) = x(t - 4) = \text{sen}(t - 4) e^{-0.1|t - 4|}$, cuja evolução para $-10 \leq t \leq 10$ se mostra na figura M2.45, está em atraso relativamente a $x(t)$.

Exemplo 2.20

A figura M2.46 mostra a evolução para $-10 \leq n \leq 10$ do sinal $x[n] = \text{sen}(n) e^{-0.1|n|}$. O sinal $y[n] = x[n - 4] = \text{sen}(n - 4) e^{-0.1|n - 4|}$, cuja evolução para $-10 \leq n \leq 10$ se mostra na figura M2.47, está em atraso relativamente a $x[n]$.

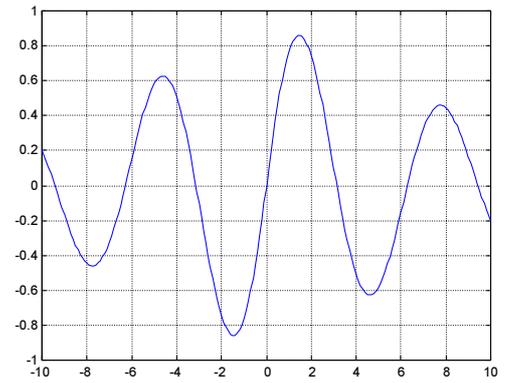


Figura M2.44

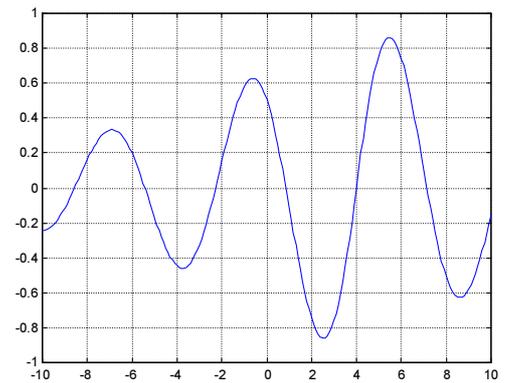


Figura M2.45

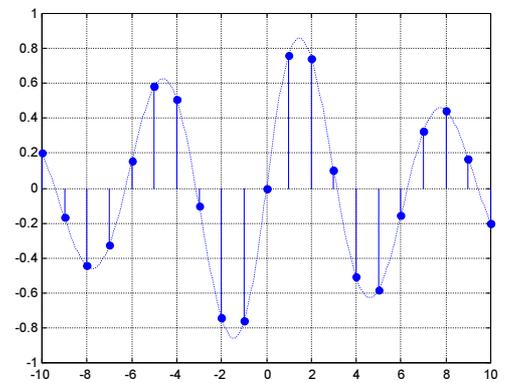


Figura M2.46

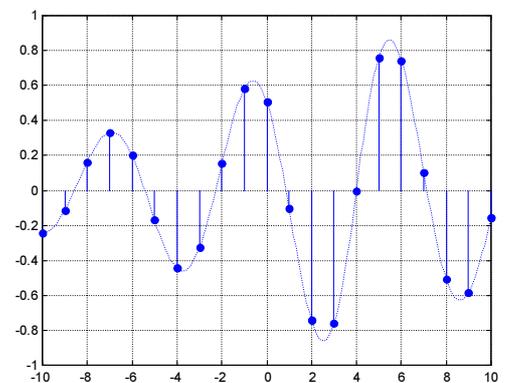


Figura M2.47



Exercício 2.4

Exemplo 1

Dado o sinal discreto $x[n]$ representado na figura M2.48, esboce o sinal $y[n] = x[2n - 4]$.

O sinal $y[n]$ resulta de um atraso e de uma compressão do sinal $x[n]$. A questão que se nos coloca é a de saber se, para esboçar $x[2n - 4]$, devemos primeiro proceder à translação e depois à compressão ou vice versa. Vejamos o sinal que resulta de cada uma das opções.

Se procedermos primeiro à compressão obtemos o sinal $y_1[n] = x[2n]$ e seguidamente a translação dá origem ao sinal $y_2[n] = y_1[n - 4]$. Mostram-se os esboços dos dois sinais nas figuras M2.49 e M2.50.

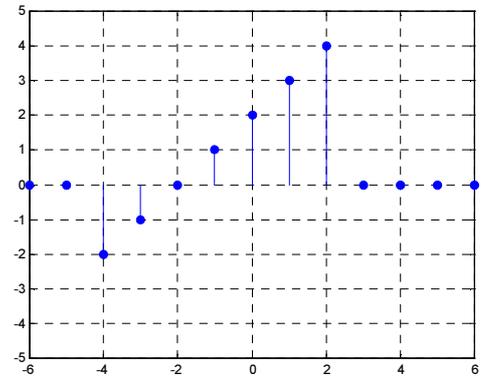


Figura M2.48

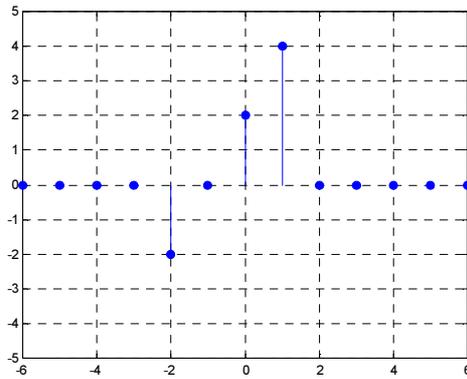


Figura M2.50

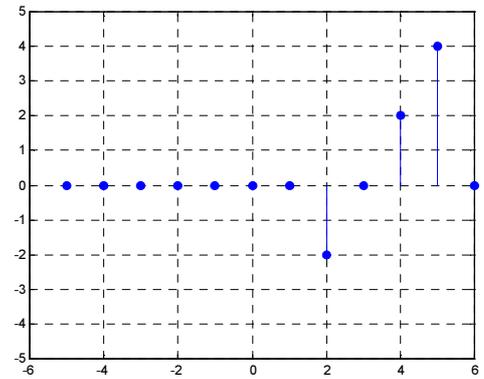


Figura M2.49

Se procedermos primeiro à translação obtemos o sinal $y_3[n] = x[n - 4]$ e seguidamente a compressão dá origem ao sinal $y_4[n] = y_3[2n]$. Mostram-se os esboços dos dois sinais nas figuras M2.51 e M2.52.

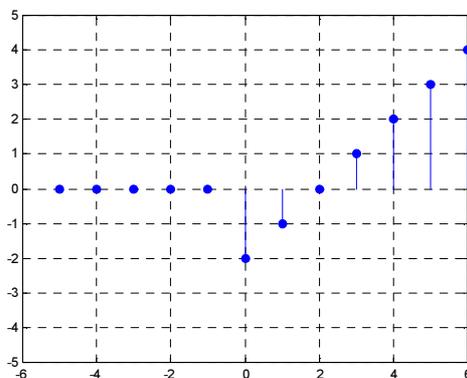


Figura M2.51

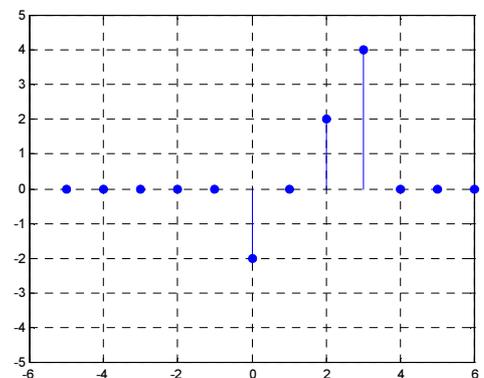


Figura M2.52

Qual dos procedimentos é o correcto? Note que $y[n] = x[2n - 4]$ implica que $y[0] = x[-4]$ e $x[0] = y[2]$

Por inspecção das figuras concluímos que $y_4[n]$ é o sinal desejado.

Para obtermos um sinal resultante duma operação de translação e escalamento sobre a variável independente de um sinal original, devemos primeiro proceder à operação de translação e seguidamente à operação de escalamento.

Note que é fácil verificar analiticamente qual dos sinais obtidos, $y_2[n]$ ou $y_4[n]$, corresponde ao sinal $y[n]$ desejado.

Na verdade, sendo $y_4[n] = y_3[2n]$ e $y_3[v] = x[v - 4]$, então, fazendo $v = 2n$, resulta

$$y_3[2n] = x[2n - 4]$$

pelo que

$$y_4[n] = y_3[2n] = x[2n - 4] = y[n]$$

No entanto, sendo

$$y_2[n] = y_1[n - 4]$$

e

$$y_1[v] = x[2v]$$

, então, fazendo $v = n - 4$, resulta

$$y_1[n - 4] = x[2(n - 4)] = x[2n - 8]$$

pelo que

$$y_2[n] = y_1[n - 4] = x[2n - 8] \neq y[n]$$

Exemplo 2

Determine as relações entre o sinal $x(t)$ e os sinais $y_1(t)$ e $y_2(t)$ representados nas figura M2.53 a M2.55.

Ignorando a possibilidade de existência de uma inversão do sinal, que, dado que o sinal original é par, não é possível de distinguir, resulta da figura

$$y_1(-3) = x(-2)$$

$$y_1(-1) = x(2)$$

$$y_2(0) = x(-2)$$

$$y_2(2) = x(2)$$

Estando os sinais relacionados genericamente por

$$y(t) = x(at - b)$$

resulta facilmente para y_1

$$y_1(-3) = x(-3a - b) = x(-2)$$

$$y_1(-1) = x(-a - b) = x(2)$$

logo

$$\begin{cases} -3a - b = -2 \\ -a - b = 2 \end{cases}$$

logo

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}$$

pelo que

$$y_1(t) = x(2t + 4)$$

Resultando para y_2 que

$$\begin{cases} -2 = -b \\ 2 = 2a - b \end{cases}$$

logo

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$$

pelo que

$$y_2(t) = x(2t - 2)$$

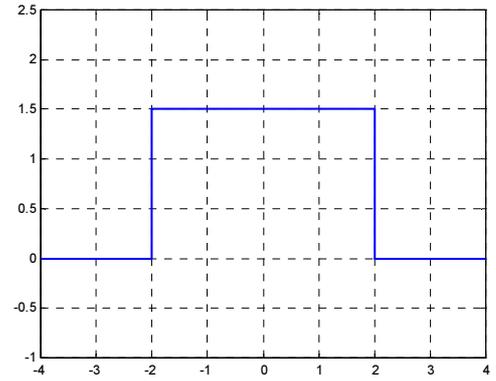


Figura M2.53

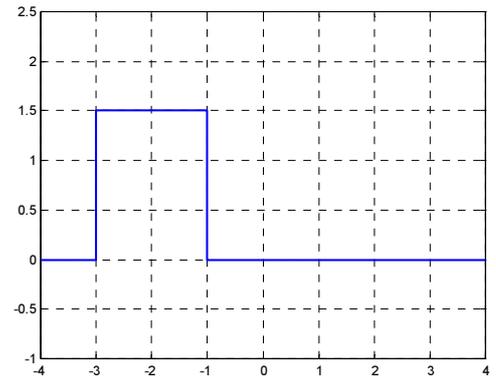


Figura M2.54

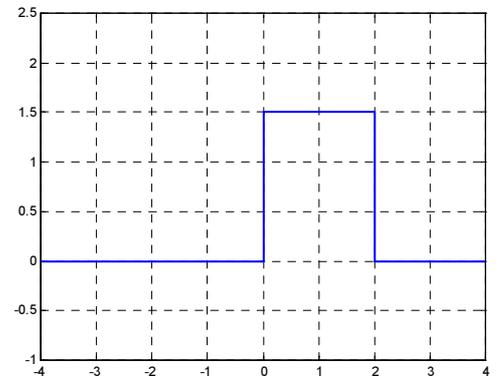
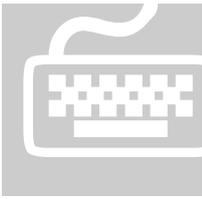


Figura M2.55



Matlab 2.4

Recorra ao *Matlab* para resolver o Exercício 2.4 Exemplo1.

Começamos por definir $x[n]$ no intervalo $[-6, 6]$

```
>> n=-6:6;
>> x=(n>=-4)&(n<=2).*(n+2);
>> figure(1);stem(n,x,'filled')
>> grid on
>> axis([-6 6 -5 5])
>>
```

Seguidamente calculamos os novos valores da variável independente

```
>> m=(n+4)/2
m =
   -1.0000   -0.5000         0
    0.5000    1.0000    1.5000    2.0000    2.5000    3.0000    3.5000
    4.0000    4.5000    5.0000
>>
>>
```

Atendendo a que a variável independente não pode assumir valores não inteiros, seleccionamos os valores inteiros da variável m criada, atribuindo-os a uma nova variável, m_1

```
>>>> m1=m(mod(m,1)==0)
m1 =
   -1     0     1     2     3     4     5
>>
```

Por fim criamos um novo sinal reposicionando os valores do sinal original

```
>> x1=x(mod(m,1)==0)
x1 =
     0    -2     0     2     4     0     0
>>
```

, e procedemos ao esboço do sinal resultante da transformação

```
>> figure(2);stem(m1,x1,'filled')
>> axis([-6 6 -5 5])
>> grid on
>>
```

O *script* poderia ser completado de modo a preencher com zeros as restantes posições do sinal.

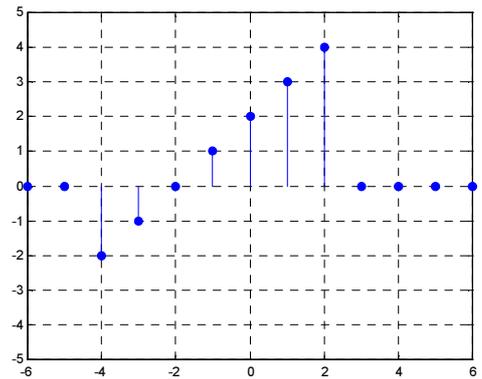


Figura M2.56

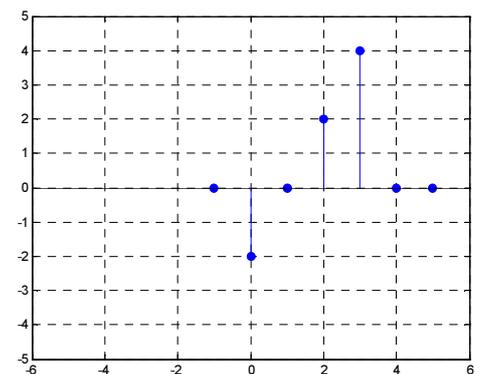


Figura M2.57



Demo 1: Decomposição par-ímpar

As relações que nos permitem decompor um sinal nas suas componentes par e ímpar são facilmente reduzíveis. Seja um sinal contínuo $x(t)$. Podemos em qualquer caso decompô-lo na soma de dois sinais

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (1)$$

Admitamos agora que $x_1(t)$ é um sinal par, e $x_2(t)$ é um sinal ímpar. Assim sendo, verificam-se as relações

$$x_1(t) = x_1(-t)$$

e

$$x_2(t) = -x_2(-t)$$

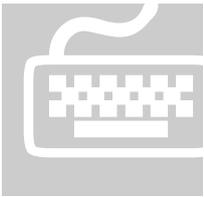
Podemos então, por substituição das relações anteriores em (1), escrever

$$x(t) = x_1(-t) - x_2(-t) \quad (2)$$

Resolvendo o sistema constituído pelas equações (1) e (2)

$$\begin{cases} x(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x(t) = x_1(-t) - x_2(-t) \end{cases}$$

,em ordem a $x_1(t)$ e $x_2(t)$, obtemos facilmente a expressão das componentes par e ímpar do sinal $x(t)$



9. Exercícios M2

Exemplo 1

Escreva uma função *Matlab* que, recebendo como parâmetros uma *string* com a expressão analítica de um sinal $x(t)$, o intervalo em que o sinal está definido, e a frequência de amostragem, devolve os pares ordenados correspondentes às amostras do sinal

```
function [t,x] = amostras_de(sinal, tmin, tmax, fs)
```

Podemos executar uma *string* passada como parâmetro de uma função recorrendo à **função eval**. Assim, criando a função

```
function [t,x] = amostras_de(sinal, tmin, tmax, fs)
    ts=1/fs;
    t=tmin:ts:tmax-ts;
    x=eval(sinal,t);
```

Podemos agora executar a função na consola

```
>> [t,x]=amostras_de('cos(t).*
    sin(2*t).^2',-pi,pi,80/pi);
>> plot(t,x)
>>
```

Note que a função definida na *string* 'sinal' deve ter o mesmo parâmetro do argumento da função *eval*. Note ainda que a *string* pode ser predefinida. Por exemplo

```
>> u='cos(t).*sin(2*t).^2';
>> [t,x]=amostras_de(u,
    -pi,pi,80/pi);
>> plot(t,x)
>>
```

Exemplo 2

Escreva uma função *Matlab* que, recebendo como argumentos um sinal discreto $x[n]$, o conjunto de valores n em que está definido, e as constantes reais a e b , devolva o sinal resultante da transformação linear $y[n] = x[an - b]$, e o conjunto de valores em que está definido

```
function [m,y] = transf_n(n,x,a,b)
```

Reescrevendo o *script* da página M2-28 temos

```
function [m,y] = transf_n(n,x,a,b)
    mt=(n+b)/a;
    x1=x(mod(mt,1)==0);
    m1=mt(mod(mt,1)==0);
    m=min(m1):max(m1);
    y(m1-min(m1)+1)=x1;
```

Podemos verificar o código da função

```
>> n=-6:6;
>> x=((n>=-4)&(n<=2)).*(n+2);
>> figure(1);stem(n,x,'filled')
>> [m2,x2] = transf_n(n,x,0.5,4);
>> figure(2);stem(m2,x2,'filled')
```

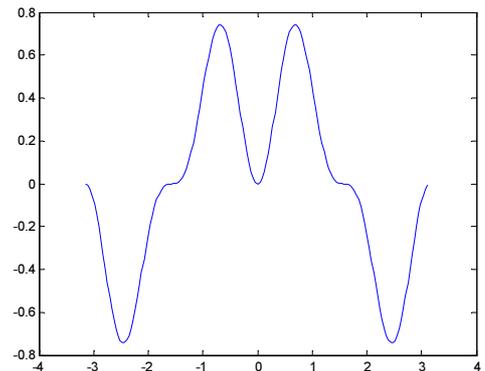


Figura M2.58

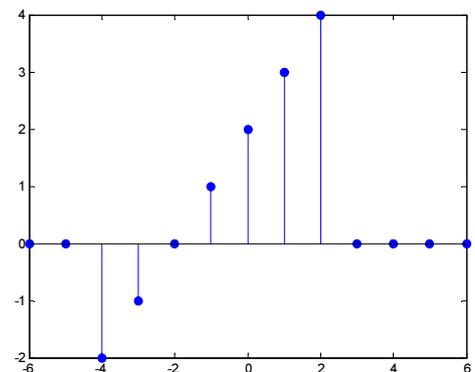


Figura M2.59

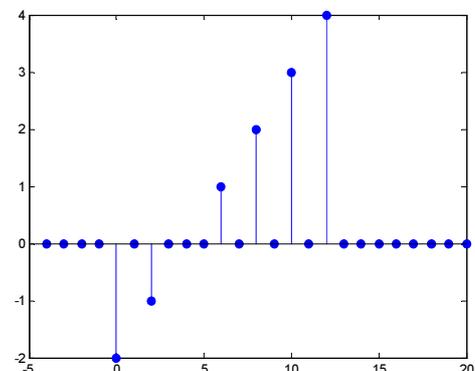


Figura M2.60



Ficha de Avaliação M2 - Sem. Verão 2003

N: Nome: Turma:

Data limite de entrega 07-04-2003

(A ficha deve ser colocada, até à data limite, no recipiente apropriado existente junto ao Gabinete C - CEDET)

Grupo C

Exercício 1

- Represente o sinal contínuo $x(t) = \cos(t)e^{-j0.2t}$ no intervalo $[-\pi, \pi]$.
- Represente o sinal discreto $x[n]$ resultante da amostragem do sinal $x(t)$ com uma frequência de amostragem $f_s = 4 \text{ Hz}$.
- Crie o sinal contínuo $y(t)$ representado na figura M2.61 e reproduza a referida figura.
- Represente o sinal discreto $y[n]$ resultante da amostragem do sinal $y(t)$ com uma frequência de amostragem $f_s = 8 \text{ Hz}$.

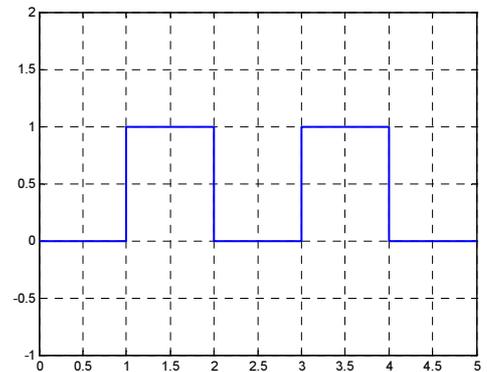


Figura M2.61

Exercício 2

- Considere o sinal $x(t) = \cos(t)\sin(2t)$ com $t \in [-2\pi, 2\pi]$. Represente o sinal. Calcule a sua frequência, período, e frequência angular.
- Considere o sinal $x[n]$ resultante da amostragem do sinal $x(t)$ com uma frequência de amostragem $f_s = 4/\pi$. Represente o sinal $x[n]$. Calcule o período e a frequência angular do sinal

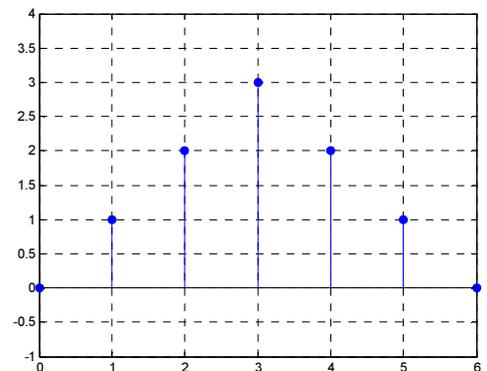


Figura M2.62

Exercício 3

- Represente o sinal contínuo $x(t) = t^2 e^{-\frac{t}{4}}$ com $t \in [-2, 2]$, sendo nulo fora deste intervalo. Calcule a energia do sinal.
- Calcule a potência do sinal contínuo periódico $x(t) = \cos(t)\sin(2t)$.
- Calcule a energia do sinal discreto $x[n]$ representado na figura M2.62
- Calcule a potência do sinal discreto periódico representado na figura M2.63.

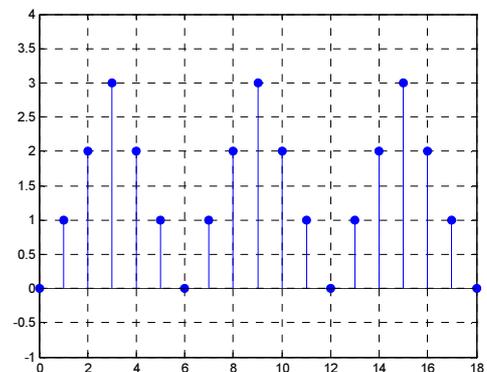


Figura M2.63

Exercício 4

- Explique cada uma das linhas de código da função `transf_n(n,x,a,b` do Exemplo 2 dos Exercícios M2.
- Considere o sinal contínuo $x(t)$ representado na figura. Represente o sinal $y(t) = x(-2t + 3)$.
- Considere o sinal discreto $x[n]$ resultante da amostragem do sinal $x(t)$ com uma frequência de amostragem $f_s = 8 \text{ Hz}$. Represente o sinal. Represente o sinal $y[n] = x[0.5n - 4]$.

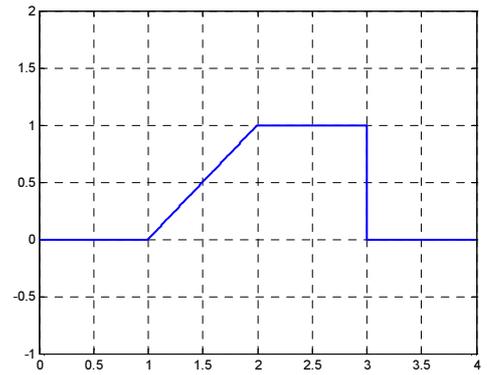


Figura M2.64

Grupo B**Exercício 5**

- Escreva uma função *Matlab* que, recebendo como argumentos um sinal discreto $x[n]$ e o conjunto de valores n em que está definido, devolva as componentes par e ímpar do sinal e o conjunto de valores m em que estão definidas: $x_p[m]$, $x_i[m]$ e m

```
function [xp,xi,m] = xp_xi(n,x)
```

Nota: Relembre o *script* utilizado na página M2-11 para sinais contínuos. Simplifique-o de modo a adaptá-lo a sinais discretos, explicando a necessidade e função de cada uma das linhas de código.

- Represente a componente par e ímpar do sinal $y[n] = u[n] - u[n - 10]$, em que $u[n]$ representa a versão discreta da função de Heaviside (página M1-28), no intervalo $[-20, 20]$. Utilize (de preferência) a função definida no ponto anterior.



Ficha de Avaliação M2 - Sem. Inverno 2004

Data limite de entrega: 13-10-2003

(A resolução da ficha deve ser enviada, até à data limite, para o endereço ida@iscl.pt.
 Faça download da pasta b_XXXXXX, renomeie a pasta para o seu número de aluno (exemplo: b_22435),
 utilize o(s) ficheiro(s) .m nela contidos para a resolução da ficha, e envie a pasta para o endereço referido.
 Cotações: Grupo C 0 a 13; Grupo B 14 a 17; Grupo A 18 a 20.
 Note Bem: A entrega da ficha para além da data limite é fortemente penalizada.)

Grupo C

Exercício 1

1.1 Considere o sinal $x(t) = \cos(2t)\sin(3t)$ com $t \in [-2\pi, 2\pi]$.

1.1.1 Represente o sinal.

1.1.2 Calcule a sua frequência, período, e frequência angular.

1.1.3 Calcule a potência do sinal.

1.2 Considere o sinal $x[n]$ resultante da amostragem do sinal $x(t)$ com uma frequência de amostragem $f_s = 20/\pi$.

1.2.1 Represente o sinal $x[n]$.

1.2.2 Calcule o período do sinal (N).

1.2.3 Calcule a potência do sinal.

Exercício 2

2.1 Considere o sinal contínuo $x(t) = \text{sen}(\pi t)/\pi t$ com $t \in [-4, 4]$, sendo nulo fora deste intervalo.

2.1.1 Represente o sinal no intervalo $t \in [-8, 8]$.

2.1.2 Calcule a energia do sinal.

2.1.3 Represente o sinal $y(t) = x(2t - 8)$.

2.2 Considere o sinal $x[n]$ resultante da amostragem do sinal $x(t)$ com uma frequência de amostragem $f_s = 2$.

2.2.1 Represente o sinal $x[n]$.

2.2.2 Calcule a energia do sinal.

2.2.3 Represente o sinal $y[n] = x[0.5n - 4]$.

2.2.4 Represente o sinal $y[n] = x[3n]$.

Grupo B

Exercício 3

3.1 Escreva uma função *Matlab* que, recebendo como argumentos um sinal discreto $x[n]$ e o conjunto de valores n em que está definido, devolva as componentes par e ímpar do sinal e o conjunto de valores m em que estão definidas: $x_p[m]$, $x_i[m]$ e m

```
function [xp,xi,m] = xp_xi(n,x)
```

Nota: Relembre o *script* utilizado na página M2-11 para sinais contínuos. Simplifique-o de modo a adaptá-lo a sinais discretos.

3.2 Represente a componente par e ímpar do sinal $y[n] = u[n] - u[n - 10]$, em que $u[n]$ representa a versão discreta da função de Heaviside (página M1-28), no intervalo $[-20, 20]$. Utilize a função definida no ponto anterior.