

LICENCIATURA EM ENGENHARIA DE SISTEMAS
DE TELECOMUNICAÇÕES E ELECTRÓNICA

Apontamentos de Análise de Sinais



© Prof. José Amaral
Versão 3.0 • 01-04-2003
Secção de Comunicações e Processamento de Sinal
ISEL-CEDET, Gabinete C • jda@isel.pt

Índice

OBJECTIVOS	1	DEMO 1: CONVOLUÇÃO DE UM SINAL COM O IMPULSO	25
1. SINAIS CONTÍNUOS BÁSICOS	2	APÊNDICE 1: COMPLEXOS.....	26
EXPONENCIAL REAL.....	2	FICHA DE AVALIAÇÃO M3.....	28
EXEMPLO 3.1.....	2	GRUPO C	28
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	2	EXERCÍCIO 1	28
EXEMPLO 3.2.....	2	EXERCÍCIO 2.....	28
EXPONENCIAL COMPLEXO.....	3	EXERCÍCIO 3.....	28
EXEMPLO 3.3.....	3	GRUPO B	29
ESCALÃO UNITÁRIO.....	4	EXERCÍCIO 4.....	29
PULSO RECTANGULAR.....	4	EXERCÍCIO 5.....	29
PULSO TRIANGULAR.....	5	GRUPO A	29
SINC(v)	5	EXERCÍCIO 6.....	29
IMPULSO DE DIRAC	6		
MATLAB 3.1.....	7		
EXEMPLO 1.....	7		
EXEMPLO 2.....	9		
EXEMPLO 3.....	11		
EXEMPLO 4.....	12		
EXEMPLO 5.....	13		
2. SINAIS DISCRETOS BÁSICOS	15		
EXPONENCIAL COMPLEXO.....	15		
EXEMPLO 3.4.....	15		
ESCALÃO UNITÁRIO.....	16		
IMPULSO UNITÁRIO	16		
MATLAB 3.2.....	17		
EXEMPLO 1.....	17		
EXEMPLO 2.....	17		
3. CONVOLUÇÃO.....	18		
INTEGRAL DE CONVOLUÇÃO.....	18		
SOMA DE CONVOLUÇÃO.....	18		
EXERCÍCIO 3.1	19		
EXEMPLO 1.....	19		
EXEMPLO 2.....	19		
EXEMPLO 3.....	21		
EXEMPLO 4.....	22		
MATLAB 3.3.....	23		
EXEMPLO 1.....	23		
EXEMPLO 2.....	24		
EXEMPLO 3.....	24		

Sinais básicos

TÓPICOS

Sinais contínuos básicos

Exponencial complexo

Impulso de Dirac

Sinais discretos básicos

Exponencial complexo

Impulso unitário

Convolução

São apresentados neste módulo os sinais mais importantes a que teremos necessidade de recorrer ao longo da cadeira de Análise de Sinais, importantes, quer em si mesmos, quer por constituírem as unidades nucleares de construção de sinais mais complexos.

É apresentada a operação de convolução entre dois sinais, que, como veremos, é uma operação extremamente útil no estudo da resposta de sistemas lineares.

Objectivos

No fim deste módulo o aluno deverá :

1. Saber reconhecer e manipular o sinal exponencial complexo contínuo.
2. Saber reconhecer e manipular o sinal escalão unitário contínuo.
3. Saber reconhecer e manipular o pulso rectangular contínuo.
4. Saber reconhecer e manipular o sinal impulso de *Dirac*.
5. Saber reconhecer e manipular o sinal $\text{sinc}(v)$.
6. Saber reconhecer e manipular o sinal pulso triangular contínuo.
7. Saber reconhecer e manipular o sinal exponencial complexo discreto.
8. Saber reconhecer e manipular o sinal escalão unitário discreto.
9. Saber reconhecer e manipular o sinal impulso unitário discreto.
10. Saber calcular a convolução entre dois sinais.



1. Sinais contínuos básicos

Exponencial real

O sinal

$$x(t) = Ae^{\alpha t}$$

com A e α reais, chamado **exponencial real**, foi já apresentado e estudado detalhadamente nas cadeiras de Análise Matemática. Recorra aos seus apontamentos ou livros dessas cadeiras para recordar as características importantes deste sinal e se sentir à vontade para o manipular analiticamente.

Exemplo 3.1

As figuras M3.1 e M3.2 mostram a evolução do sinal $x(t) = Ae^{\alpha t}$ para $A = x(0) = 2$ e, respectivamente, $\alpha = 0.1$ e $\alpha = -0.1$, com $t \in [-10, 10]$.

Funções trigonométricas

As **funções trigonométricas** são um conjunto importante de funções, já estudado em diversas outras cadeiras, que deve conhecer em detalhe e saber manipular com facilidade, por serem extremamente úteis na descrição de diversos sinais de interesse.

Os sinais mais utilizados serão o seno

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \theta_0)$$

e o co-seno

$$x(t) = A \operatorname{cos}(\omega_0 t + \theta_0)$$

, em que A , ω_0 , e θ_0 são reais. A constante A determina o intervalo de variação dos valores da amplitude do sinal, $\omega_0 = 2\pi/T_0$ representa a frequência angular do sinal, e θ_0 o argumento do sinal na origem.

Exemplo 3.2

As figuras M3.3 e M3.4 ilustram, respectivamente, a evolução dos sinais

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \theta_0)$$

e

$$x(t) = A \operatorname{cos}(\omega_0 t + \theta_0)$$

, com $A = 2$, $\theta_0 = \pi/12$ e $\omega_0 = 0.5$.

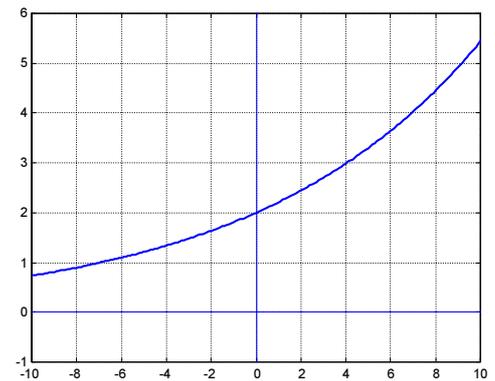


Figura M3.1

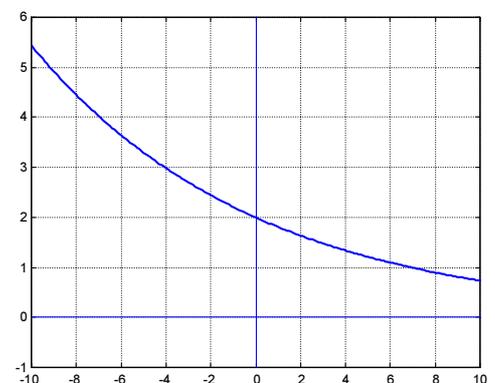


Figura M3.2

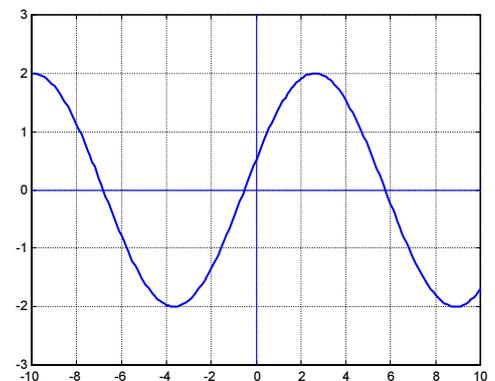


Figura M3.3

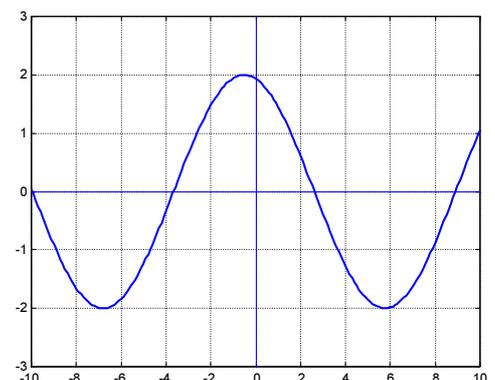


Figura M3.4

Exponencial complexo

O sinal

$$x(t) = Ce^{at}$$

em que C e a são, em geral, números complexos,

$$C = |C|e^{j\theta_0}$$

e

$$a = \tau + j\omega_0$$

, é designado por sinal **exponencial complexo**.

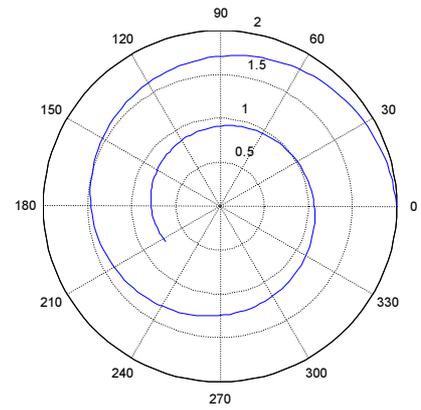


Figura M3.5

Escrevendo

$$\begin{aligned} x(t) &= Ce^{at} \\ &= |C|e^{j\theta_0}e^{(\tau + j\omega_0)t} \\ &= |C|e^{\tau t}e^{j(\omega_0 t + \theta_0)} \end{aligned}$$

torna-se explícito que o sinal exponencial complexo tem um **módulo**

$$|x(t)| = |C|e^{\tau t}$$

e um **argumento**

$$\arg\{x(t)\} = \omega_0 t + \theta_0$$

Atendendo à **relação de Euler**, podemos escrever

$$\begin{aligned} x(t) &= |C|e^{\tau t}e^{j(\omega_0 t + \theta_0)} \\ &= |C|e^{\tau t} \cos(\omega_0 t + \theta_0) \\ &\quad + j|C|e^{\tau t} \sin(\omega_0 t + \theta_0) \end{aligned}$$

, o que torna claro que quer a componente real quer a componente imaginária de um sinal exponencial complexo tem uma evolução sinusoidal de período $T_0 = 2\pi/\omega_0$, envolvido por uma exponencial com um comportamento ao longo do tempo determinado por τ .

Exemplo 3.3

A figura M3.5 exemplifica a evolução do afixo do sinal exponencial complexo no plano de Argand quando $\tau < 0$. Neste caso o módulo decai exponencialmente, pelo que o afixo se aproxima da origem para valores de t

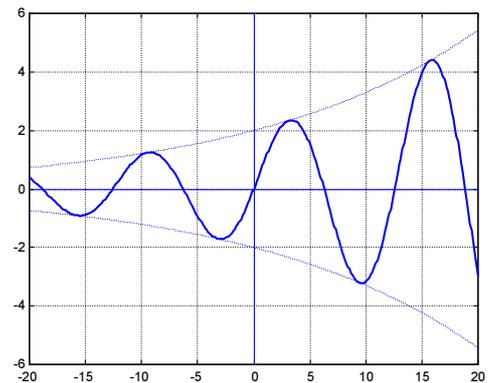


Figura M3.6

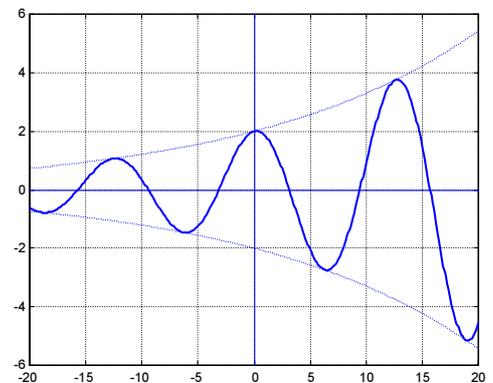


Figura M3.7

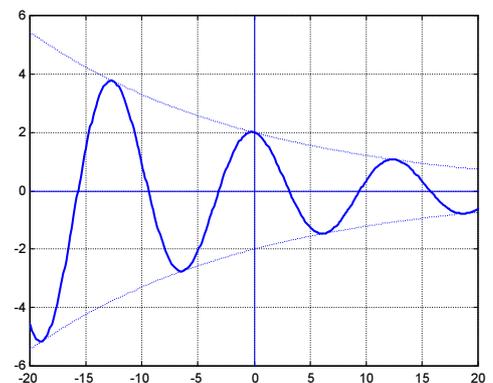


Figura M3.8

crescentes. Quando $\tau = 0$ o afixo mantém-se à distância $|C|$ da origem, e quando $\tau > 0$ o afixo afasta-se exponencialmente. Na figura mostra-se a evolução do sinal $x(t) = |C|e^{\tau t}e^{j(\omega_0 t + \theta_0)}$, para $0 < t < 20$, $|C| = 2$, $\tau = -0.05$, $\theta_0 = 0$, e $\omega_0 = 0.5$

As figuras M3.6 e M3.7 mostram a evolução da parte real, $x(t) = |C|e^{\tau t} \cos(\omega_0 t + \theta_0)$, e da parte imaginária, $x(t) = |C|e^{\tau t} \sin(\omega_0 t + \theta_0)$, de um sinal exponencial complexo, para $-20 < t < 20$, $|C| = 2$, $\tau = -0.05$, $\theta_0 = 0$, e $\omega_0 = 0.5$.

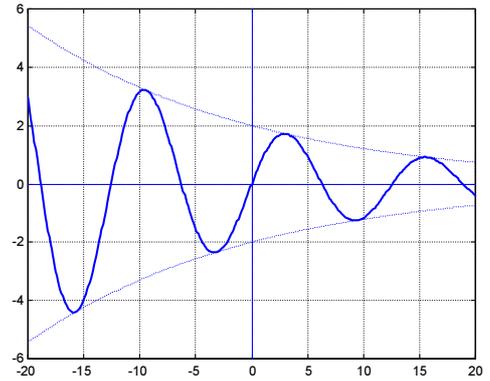


Figura M3.9

As figuras M3.8 e M3.9 mostram a evolução da parte real $x(t) = |C|e^{\tau t} \cos(\omega_0 t + \theta_0)$, e da parte imaginária, $x(t) = |C|e^{\tau t} \sin(\omega_0 t + \theta_0)$, de um sinal exponencial complexo, para $-20 < t < 20$, $|C| = 2$, $\tau = 0.05$, $\theta_0 = 0$, e $\omega_0 = 0.5$.

Escalão unitário

Define-se o sinal **escalão unitário** por

$$u(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1 & , t \geq 0 \end{cases}$$

A figura M3.10 mostra a evolução do escalão unitário para $-10 < t < 10$.

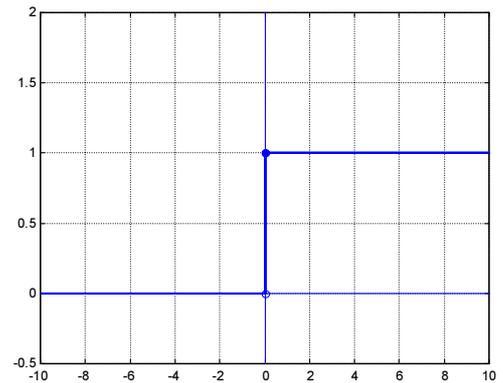


Figura M3.10

Pulso rectangular

Define-se o sinal **pulso rectangular** de duração τ e amplitude A centrado em t_0 como

$$x(t) = \begin{cases} A & , t_0 - \tau/2 \leq t < t_0 + \tau/2 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

A figura M3.11 mostra a evolução do pulso rectangular com $A = 1.5$, $\tau = 8$ e $t_0 = 0$ para $-10 < t < 10$.

É comum representar o pulso rectangular pelo carácter grego π maiúsculo

$$A \Pi\left(\frac{t - t_0}{\tau}\right) = \begin{cases} A & , t_0 - \tau/2 \leq t < t_0 + \tau/2 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

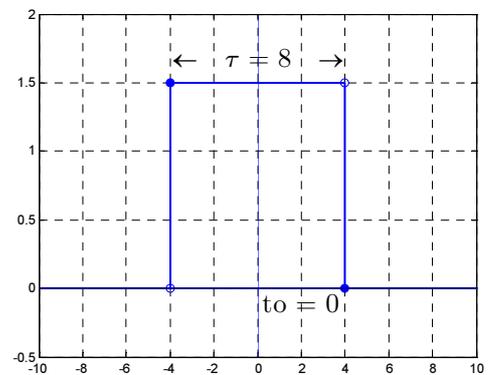


Figura M3.11

O pulso rectangular pode ser definido com base em dois escalões unitários

$$A \Pi\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right) = A \left\{ u\left(t - \left(t_0 - \frac{\tau}{2}\right)\right) - u\left(t - \left(t_0 + \frac{\tau}{2}\right)\right) \right\}$$

Pulso triangular

Define-se o sinal **pulso triangular** de duração 2τ e amplitude A centrado em t_0 como

$$x(t) = \begin{cases} A \left(1 + \frac{t-t_0}{\tau}\right) & , t_0 - \tau \leq t < t_0 \\ A \left(1 - \frac{t-t_0}{\tau}\right) & , t_0 \leq t < t_0 + \tau \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

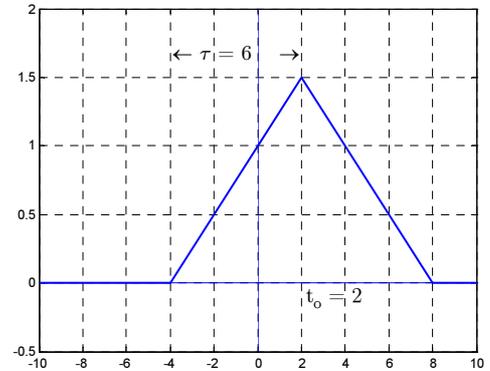


Figura M3.12

A figura M3.12 mostra a evolução do pulso triangular com $A = 1.5$, $\tau = 3$ e $t_0 = 2$.

É comum representar o pulso rectangular pelo carácter grego *alfa* maiúsculo

$$A \Lambda\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right) = \begin{cases} A \left(1 + \frac{t-t_0}{\tau}\right) & , t_0 - \tau \leq t < t_0 \\ A \left(1 - \frac{t-t_0}{\tau}\right) & , t_0 \leq t < t_0 + \tau \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

Sinc(v)

O sinal

$$x(v) = \frac{\text{sen}(\pi v)}{\pi v}$$

é descrito abreviadamente por

$$x(v) = \text{sinc}(v)$$

Como pode ver pelo gráfico da figura M3.13 o sinal oscila em torno das abcissas, com uma amplitude decrescente para valores crescente de v , anulando-se para $v = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

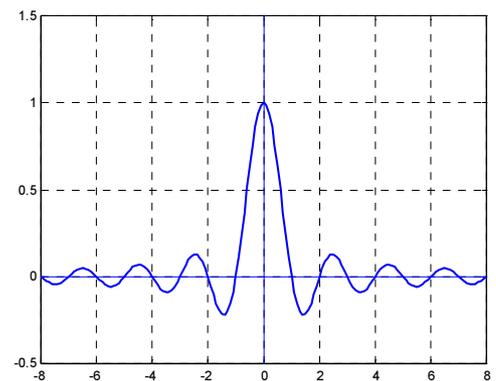


Figura M3.13

Impulso de Dirac

Define-se o sinal **impulso de Dirac**, também designado por impulso unitário, delta de *Dirac*, ou simplesmente **Dirac** ou **delta**, pelas relações

$$\delta(t) = 0 \quad , t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

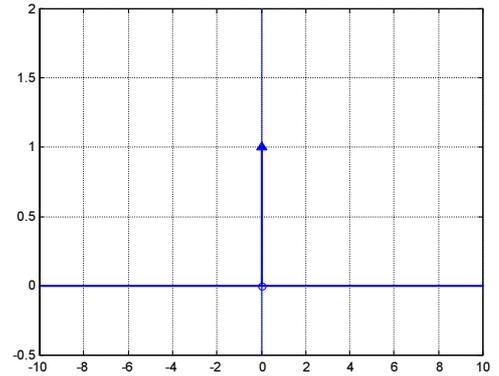


Figura M3.14

A representação do impulso de *Dirac* é feita, como se mostra na figura M3.14, através de segmento vertical com uma seta no topo.

É possível demonstrar que **o impulso de Dirac verifica as propriedades**

$$\int_{-\infty}^{\infty} k\delta(t) dt = k$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau - t_0) d\tau = u(t - t_0)$$

Admitindo que $x(t)$ é uma função contínua na vizinhança de $t = 0$

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

Admitindo que $x(t)$ é uma função contínua na vizinhança de $t = t_0$

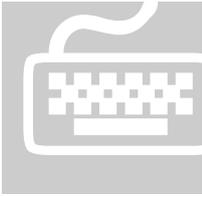
$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

O impulso de Dirac e o escalão unitário estão relacionados pelas expressões

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$



Matlab 3.1

Exemplo 1

Considere o sinal

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \pi \\ -1 & \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

conforme representado na figura M3.15. Aproxime $x(t)$ pelo sinal

$y(t) = \sum_{k=1}^{k=7} a_k \text{sen}(kt)$ no intervalo $[0, 2\pi]$, considerando que os coeficientes a_k são dados pela expressão

$$a_k = \frac{\int_0^{2\pi} x(t) \text{sen}(kt) dt}{\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(kt) dt}$$

Represente graficamente as diversas parcelas do somatório, assim como a evolução da soma.

Vamos começar por calcular os coeficientes analiticamente. Atendendo à expressão do sinal $x(t)$ temos

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\int_0^{\pi} \text{sen}(kt) dt - \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}(kt) dt}{\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(kt) dt} \\ &= \frac{\frac{1}{k} [\cos(kt)]_{\pi}^{2\pi} - \cos(kt) \Big|_0^{\pi}}{\pi} \\ &= \frac{2}{k\pi} (1 - \cos(k\pi)) \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} a_k &= \begin{cases} 0 & k \text{ par} \\ \frac{4}{k\pi} & k \text{ impar} \end{cases} \\ &= \frac{4}{\pi} \left[1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{7} \right] \\ &= [2.6366, 0, 0.8789, 0, 0.5273, 0, 0.3767] \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=1}^{k=7} a_k \text{sen}(kt) \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\text{sen}(t) + \frac{1}{3} \text{sen}(3t) + \frac{1}{5} \text{sen}(5t) + \frac{1}{7} \text{sen}(7t) \right] \end{aligned}$$

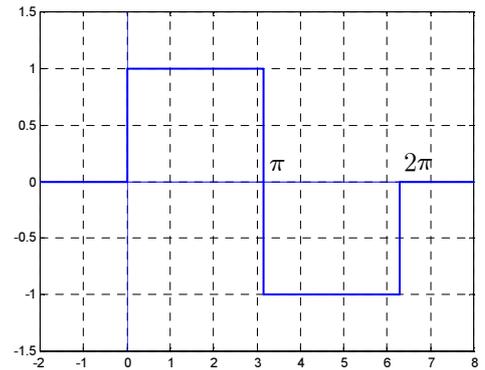


Figura M3.15

Vamos agora resolver o problema proposto recorrendo directamente ao *Matlab*. Começemos por calcular os coeficientes

```
N=7;
syms k t;
ak=(int(sin(k*t),t,0,pi)-int(sin(k*t),t,pi,2*pi))/int(sin(k*t).^2,t,0,2*pi);
ak=subs(ak,k,1:N);
```

Optou-se por calcular o valor numérico dos coeficientes, já que é esse o objectivo, não nos preocupando a simplificação da expressão obtida, recorrendo por exemplo às funções *simplify* e/ou *simple*. Podemos agora calcular $y(t)$

```
nx=[0 0 pi pi 2*pi 2*pi];
x=[0 1 1 -1 -1 0];

t=0:0.01:2*pi;
yt=zeros(1,length(t));
y=yt;
for k=1:2:N
subplot((1+N)/2,2,k)
y=ak(k).*sin(k*t);
plot(t,y);axis([0 2*pi -1.5 1.5]);grid on
yt=yt+y;
subplot((1+N)/2,2,k+1)
plot(nx,x,'r',t,yt,'LineWidth',2);axis([-0.6 2.1*pi -1.5 1.5]);
grid on
end
```

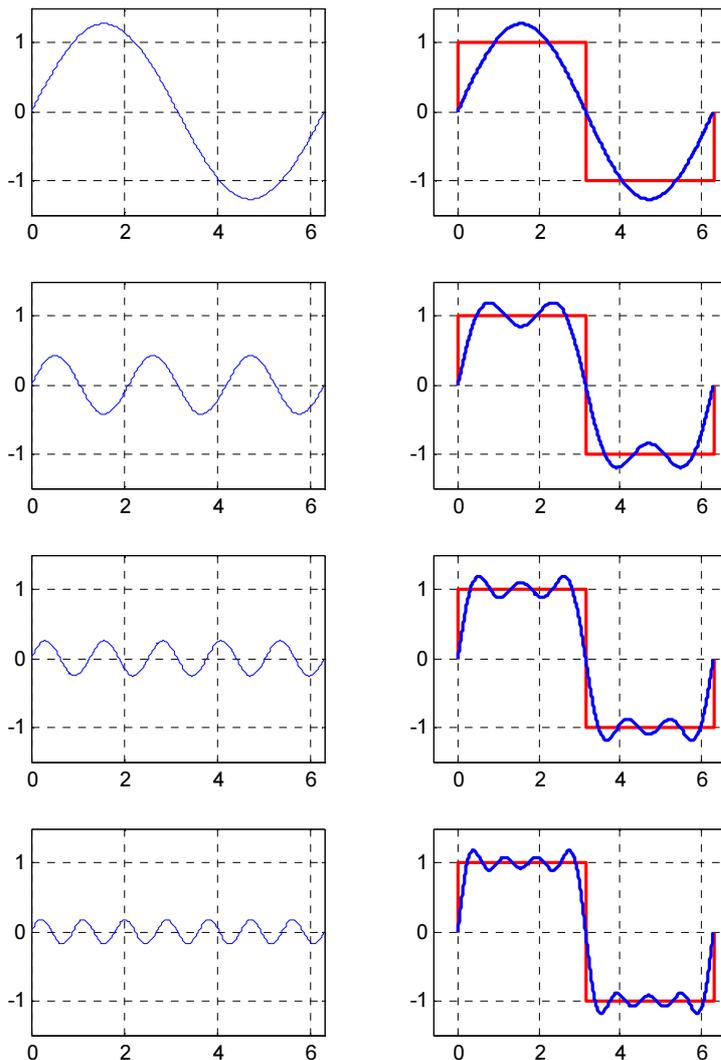


Figura M3.16

Observe a figura M3.16. Note como as sucessivas parcelas do somatório são senos de frequência cada vez mais elevada e amplitude controlada pelos coeficientes a_k .

Note como à medida que se vão somando mais termos a soma acumulada corresponde a um sinal cuja evolução temporal é cada vez mais próxima de $x(t)$.

Note que a amplitude de cada uma das parcelas do somatório tem um coeficiente que define a sua contribuição para o resultado final, dado pela expressão

$$a_k = \frac{\int_0^{2\pi} x(t) \sin(kt) dt}{\int_0^{2\pi} \sin^2(kt) dt}$$

, e embora esta expressão tenha “caído do céu”, vai ver num próximo Módulo que é possível justificar teoricamente o porquê da sua forma analítica. Note que esta expressão analítica contém informação sobre o sinal a aproximar, $x(t)$, e sobre os sinais, $\sin(nt)$, em que se baseia a aproximação.

Exemplo 2

Considere o sinal

$$x(t) = \begin{cases} 1 & -\pi/2 \leq t < \pi/2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

conforme representado na figura M3.17.

Aproxime $x(t)$ pelo sinal

$y(t) = \sum_{k=-10}^{k=10} c_k e^{jkt}$ no intervalo $[-\pi, \pi]$, considerando que os coeficientes c_k são dados pela expressão

$$c_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{jkt} dt}{\int_{-\pi}^{\pi} |e^{jkt}|^2 dt}$$

Represente graficamente $y(t)$.

Poderíamos começar por deduzir a expressão analítica dos coeficientes c_k

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{jkt} dt}{\int_{-\pi}^{\pi} |e^{jkt}|^2 dt} \\ &= \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{jkt} dt}{\int_{-\pi}^{\pi} |e^{jkt}|^2 dt} \\ &= \dots \\ &= \frac{\text{sen}(0.5k\pi)}{k\pi} \\ &= 0.5 \text{sinc}(0.5k) \end{aligned}$$

Após diversos passos mais ou menos trabalhosos, que se omitiram, chegámos a uma expressão bastante simples. Vamos agora ver como poderíamos deduzir a expressão dos coeficientes recorrendo ao *Matlab*

```
>> syms k t;
>> ck=int(exp(-j*k*t), t, -pi/2, pi/2)/int(exp(-j*k*t)*exp(j*k*t), t, -pi, pi)
ck =
-1/2*i*(-exp(-1/2*i*pi*k)+exp(1/2*i*pi*k))/k/pi
>> ck=simplify(ck)
ck =
sin(1/2*k*pi)/k/pi
>> pretty(ck)
          sin(1/2 k pi)
          -----
          k pi
>>
```

Note que nesta forma a expressão apresenta a dificuldade de cálculo do coeficiente para $k = 0$. Vamos ilustrar o modo como esta dificuldade pode ser contornada fazendo o cálculo de apenas 7 coeficientes para que a exposição seja mais clara. Poderíamos reconhecer que a expressão obtida pode ser expressa na forma de uma $\text{sinc}(v)$

```
>> ck=sym('0.5*sinc(0.5*k)')
```

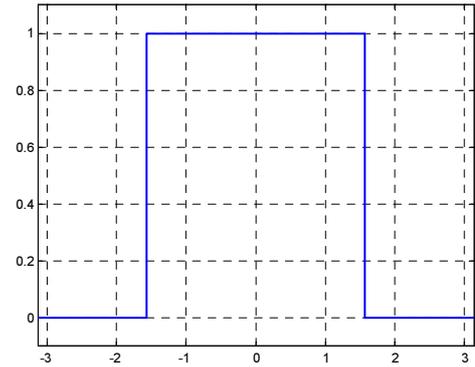


Figura M3.17

```

ck =
    0.5*sinc(0.5*k)
>> subs(ck,k,-3:3)
ans =
    -0.1061    0.0000    0.3183    0.5000    0.3183    0.0000   -0.1061
>>

```

,ou, o que é uma solução mais geral, levantar a indeterminação do cálculo para $k = 0$

```

>> subs(ck,k,-3:3)
Warning: Divide by zero.
ans =
    -0.1061    0.0000    0.3183         NaN    0.3183    0.0000   -0.1061
>> c0=double(limit(ck,k,0))
c0 =
    0.5000
>> ck=subs(ck,k,-3:3);
>> ck(4)=c0
ck =
    -0.1061    0.0000    0.3183    0.5000    0.3183    0.0000   -0.1061
>>

```

Dadas estas explicações podemos então proceder ao cálculo dos coeficientes e traçado do gráfico conforme pedido no enunciado do problema.

```

N=10;
nx=[-pi -pi/2 -pi/2 pi/2 pi/2 pi];
x=[0 0 1 1 0 0];

syms k t;
ck=int(exp(-j*k*t),t,-pi/2,pi/2)/int(exp(-j*k*t)*exp(j*k*t),t,-pi,pi);
ck=simplify(ck);
ckn=subs(ck,k,-N:N);
c0=double(limit(ck,k,0));
ck=subs(ck,k,-N:N);
ck(N+1)=c0;
t=-pi:0.01:pi;
y=zeros(1,length(t));
for k=-N:N
    y=y+ck(k+N+1).*exp(j*t*k);
end
plot(nx,x,'r',t,real(y));
axis([-pi pi -0.1 1.1]);
grid on;

```

Note na instrução `plot` a necessidade de especificar a parte real de $y(t)$ embora, teoricamente, $y(t)$ seja um sinal real. Esta é uma situação comum aos cálculos que envolvem quantidades complexa. Em resultado de sucessivos erros de representação, existe um resíduo imaginário na quantidade $y(t)$ que é necessário ignorar. Podemos verificar que a componente imaginária de $y(t)$ é completamente desprezável

```

plot(t,imag(y));
grid on;

```

Note que é da ordem 10^{-17} , sendo apenas resultante da propagação de erros de representação.

Note que o código lhe permite definir o número de coeficientes desejado. Visualize o resultado para um número mais elevado de coeficientes (por exemplo $N = 30$ e $N = 100$).

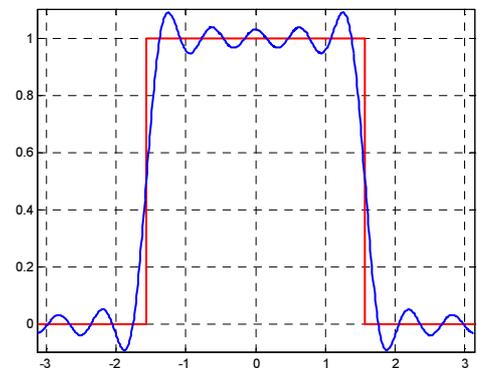


Figura M3.18

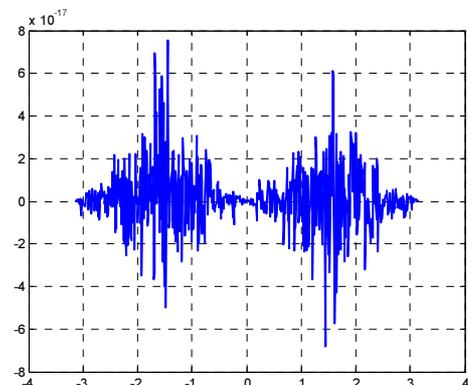


Figura M3.19

Exemplo 3

O sinal escalão unitário não existe na *Matlab Symbolic Toolbox*, existindo sim a função de *Heaviside*

```
>> syms t
>> x=sym('Heaviside(t)')
x =
    Heaviside(t)
>>
```

Note que a função de *Heaviside*, contrariamente ao sinal escalão unitário, não é definida em $t = 0$

```
>> subs(x,0)
ans =
    Heaviside(0)
>>
```

, o que, não tendo qualquer inconveniente do ponto de vista do cálculo simbólico, é no entanto impeditivo do traçado de gráficos de resultados desses mesmos cálculos. Por exemplo, se pretender traçar o gráfico da função de *Heaviside* recebe uma mensagem de erro

```
>> t=-2:0.01:2;
>> plot(t,subs(x,t))
?? Undefined function or variable 'Heaviside'.
Error in ==> C:\MATLAB6p5\toolbox\symbolic\@sym\double.m
On line 45 ==> D = reshape(eval(X),m,n);
Error in ==> C:\MATLAB6p5\toolbox\symbolic\@sym\subs.m
On line 164 ==> NEWf =
double(sym(maple('map','F',char(sym([NEWexpr{:}]))))););
```

devido ao facto da função não estar definida em $t = 0$. Pode contornar o problema de dois modos: ou evitando o cálculo no ponto $t = 0$

```
>> t=-2:0.011:2;
>> plot(t,subs(x,t),'LineWidth',2)
>> axis([- 2 2 -0.1 1.1]);grid on
>>
```

; ou redefinindo a função e colocando-a no seu *path*.

```
function u = Heaviside(t)
% u(t) = 0, para t < 0
%       = 1, para t >= 0

u = +(t>= 0);
```

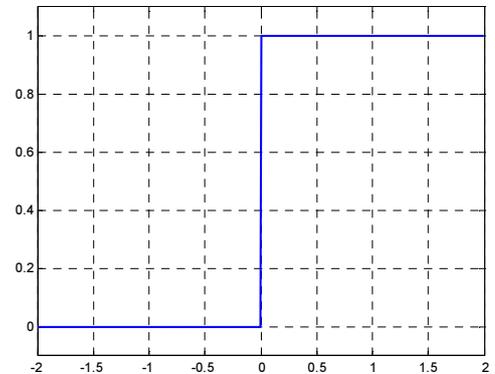


Figura M3.20

A vantagem de fazer a sobreposição à função pré-definida, e de lhe não chamar, por exemplo, *escalão*, é a de poder continuar a utilizar as definições existentes no núcleo de cálculo simbólico

```
>> diff(x)
ans =
    Dirac(t)
>>
```

, e simultaneamente poder fazer substituições numéricas sobre o objecto simbólico

```
>> whos
...
x          1x1          148  sym object
...
>> subs(x,0)
ans =
    1
```

Exemplo 4

A definição do pulso rectangular tendo como objectivo a sua manipulação simbólica pode ser feita com base na função de *Heaviside*. Note que, tendo em atenção o que foi dito no Exemplo 3, se não redefinir a função *Heaviside*, o pulso rectangular não fica definido nos instantes de transição. Admitindo que a função de *Heaviside* foi redefinida podemos, por exemplo, definir um objecto simbólico correspondente ao pulso rectangular

$$\Pi\left(\frac{t-3}{2}\right) = \begin{cases} 1 & , 2 \leq t < 4 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

```
>> syms x t
>> rect=sym('Heaviside(t-2)-Heaviside(t-4)')
rect =
    Heaviside(t-2)-Heaviside(t-4)
>> subs(rect,2)
ans =
    1
>> subs(rect,4)
ans =
    0
>> t=0:0.01:6;
>>
>> plot(t,subs(rect,t),'LineWidth',2)
>> axis([0 6 -0.1 1.1])
>> grid on
>>
```

Podemos agora, por exemplo, definir um objecto simbólico correspondente ao sinal

$$z(t) = \begin{cases} e^{-0.5t} & , 2 \leq t < 4 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

```
>> z=sym('exp(-0.5*t)')*rect
z =
    exp(-.5*t)*(Heaviside(t-2)-
    Heaviside(t-4))
>> plot(t,subs(z,t),'LineWidth',2)
>> axis([0 6 -0.1 1.1])
>> grid on
```

Podemos agora, por exemplo, calcular a energia do sinal $z(t)$, fazendo explicitamente a integração entre $-\infty$ e ∞

```
>> E=double(int(z.^2,-inf,inf))
E =
    0.1170
>>
```

Note que a definição do objecto simbólico $z(t)$ não é necessária para o cálculo da energia do sinal. Em sinais deste tipo, sinais que apenas assumem valores não nulos em subconjuntos finitos de \mathcal{R} , cálculos integrais tão simples como por exemplo o da energia, devem ser feitos restringindo o domínio de integração. Podemos fazer simplesmente

```
>> syms t
>> z=exp(-0.5*t);
>> E=double(int(z.^2,2,4))
E =
    0.1170
>>
```

, no entanto, como se verá numa próxima secção, existem relações integrais cujo cálculo não nos permite restringir o domínio de integração, pelo que a definição do sinal $z(t)$ com base no pulso rectangular poderá extremamente útil.

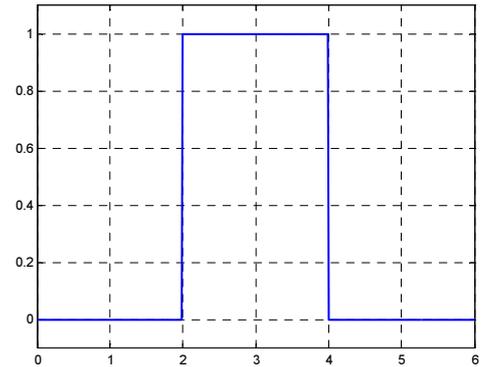


Figura M3.21

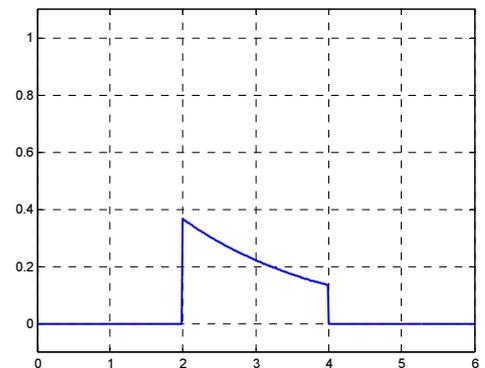


Figura M3.22

Exemplo 5

O sinal impulso de *Dirac* existe na *Matlab Symbolic Toolbox* com o nome de *Dirac*. É fácil definir um objecto simbólico *Dirac* e, por exemplo, verificar as suas propriedades

```

>> syms t t0 x y f
>> d=sym('Dirac(t)')
d =
    Dirac(t)
>>

```

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

```

>> int(d,-inf,inf)
ans =
    1
>>

```

$$\int_{-\infty}^{\infty} k\delta(t) dt = k$$

```

>> int(5*d,-inf,inf)
ans =
    5
>>

```

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

```

>> df=sym('Dirac(5*t)');
>> simplify(df)
ans =
    1/5*Dirac(t)
>>

```

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

```

>> dt0=sym('Dirac(t-t0)')
dt0 =
    Dirac(t-t0)
>> int(dt0,-inf,inf)
ans =
    1
>>

```

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau - t_0) d\tau = u(t - t_0)$$

```

>> du=sym('Dirac(u-t0)')
du =
    Dirac(u-t0)
>> int(du,u,-inf,t)
ans =
    -Heaviside(-t+t0)+1
>>

```

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

```

>> dt0=sym('Dirac(t-t0)');
>> f=sym('4*cos(t)')
f =
    4*cos(t)
>> int(dt0*f,-inf,inf)
ans =
    4*cos(t0)
>>

```

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

```

>> x=sym('Heaviside(t)')
x =
    Heaviside(t)
>> diff(x)
ans =
    Dirac(t)
>>

```

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

```

>> int(d)
ans =
    Heaviside(t)
>>

```

Note que, não sendo o *Dirac* definido em $t = 0$

```

>> subs(d,0)
ans =
    Dirac(0)
>>

```

, não é possível traduzir graficamente o resultado de cálculos simbólicos que envolvam este objecto. De modo a contornar este inconveniente podemos redefinir a função *Dirac*. **Note que a**

redefinição tem apenas como propósito a representação gráfica a partir de expressões resultantes de cálculo simbólico.

```
function d = Dirac(t)
% Dirac(t) = 0, para t ~= 0
%           = 1, para t == 0

d = +(t == 0);
```

Podemos agora, por exemplo, calcular e representar graficamente o sinal

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(t) \sum_{k=0}^8 \delta\left(t - k\frac{\pi}{8}\right) \\ &= \cos(t) \left[\delta(t) + \delta\left(t - \frac{\pi}{8}\right) + \delta\left(t - \frac{2\pi}{8}\right) + \dots \right] \\ &= \cos(0) \delta(t) + \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \delta\left(t - \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) \delta\left(t - \frac{2\pi}{8}\right) + \dots \end{aligned}$$

Recorrendo à *Matlab Symbolic Toolbox*, e tendo redefinido a função *Dirac*, podemos escrever o seguinte *script*

```
syms u
k=(0:8)*(pi/8);
dk=sym('Dirac(t-u)');
dk=subs(dk,u,k);
dk=sum(dk);
f=sym('cos(t)');
dk=dk*f;
tn=(0:0.01:8)*(pi/8);
df=subs(dk,tn);

o1=find(df>eps/2)
stem(tn(o1),df(o1),'^','filled')
hold on
o2=find(df<-eps/2)
stem(tn(o2),df(o2),'v','filled')
plot(tn,zeros(1,length(tn)),'Linewidth',2)
plot(tn,subs(f,tn),'r:')
hold off
grid on
axis([0 pi -1 1])
```

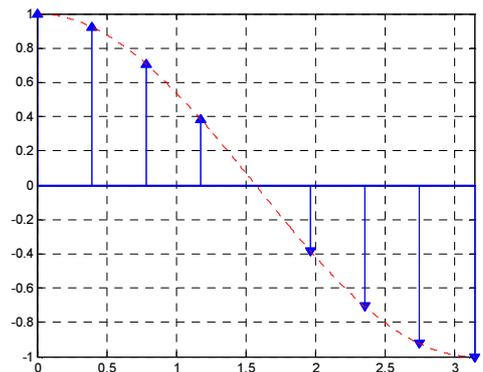


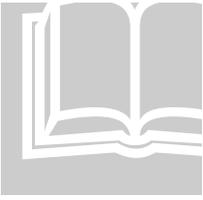
Figura M3.23

Note que o procedimento acima apenas pretende ilustrar, através de um exemplo simples, o modo que se pode traduzir graficamente o resultado de um cálculo simbólico envolvendo impulsos de *Dirac*. No caso concreto, sabendo-se que o sinal a representar é

$$x(t) = \cos(t) \sum_{i=0}^8 \delta\left(t - k\frac{\pi}{8}\right) = \sum_{i=0}^8 \cos\left(t - k\frac{\pi}{8}\right) \delta\left(t - k\frac{\pi}{8}\right)$$

poder-se-ia optar por uma representação gráfica a partir de um tratamento numérico bastante mais simplificado

```
>> k=(0:8)*pi/8;
>> xk=cos(k)
xk =
    1.0000    0.9239    0.7071    0.3827    0.0000   -0.3827   -0.7071
   -0.9239   -1.0000
>> ... etc.
```



2. Sinais discretos básicos

Vamos agora ver os sinais discretos mais importantes com que iremos trabalhar

Exponencial complexo

O sinal

$$x[n] = C\alpha^n$$

em que C e a são, em geral, números complexos,

$$C = |C|e^{j\theta_0}$$

e

$$\alpha = |\alpha|e^{j\Omega_0}$$

, é designado por sinal **exponencial complexo** (discreto).

Tal como para a versão contínua, escrevendo

$$\begin{aligned} x[n] &= C\alpha^n \\ &= |C|e^{j\theta_0} \left(|\alpha|e^{j\Omega_0} \right)^n \\ &= |C||\alpha|^n e^{j(\Omega_0 n + \theta_0)} \end{aligned}$$

temos

$$|x[n]| = |C||\alpha|^n$$

e

$$\arg\{x[n]\} = \Omega_0 n + \theta_0$$

Exemplo 3.4

As figuras M3.24 e M3.25 mostram o sinal exponencial complexo

$x[n] = |C||\alpha|^n e^{j(\Omega_0 n + \theta_0)}$ e a sua parte real,

$\text{Re}\{x[n]\} = |C||\alpha|^n \cos(\Omega_0 n + \theta_0)$, com $C = 2$, $\Omega_0 = \pi/10$, $0 < n < 20$, $\theta_0 = 0$, e $\alpha = 0.95$.

Sendo $|\alpha| < 1$, o afixo do exponencial complexo aproxima-se da origem do plano complexo para valores de n crescentes. A parte real do sinal é um co-seno envolvido pelas exponenciais decrescentes $\pm |C||\alpha|^n$. As figuras M3.26 e M3.27 mostram o sinal exponencial complexo e a sua parte real com $C = 2$, $\Omega_0 = \pi/10$, $0 < n < 20$, $\theta_0 = 0$, e $\alpha = 1.00$. Sendo $|\alpha| = 1$, o módulo do sinal é constante.

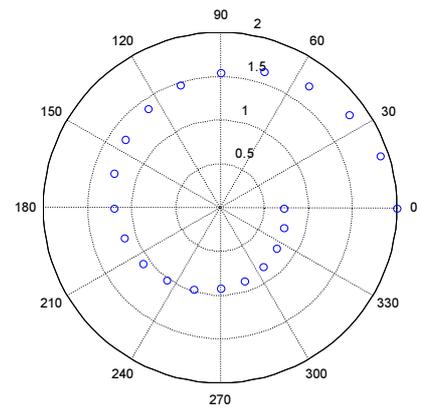


Figura M3.24

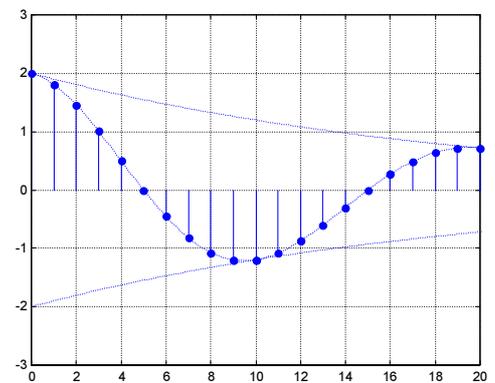


Figura M3.25

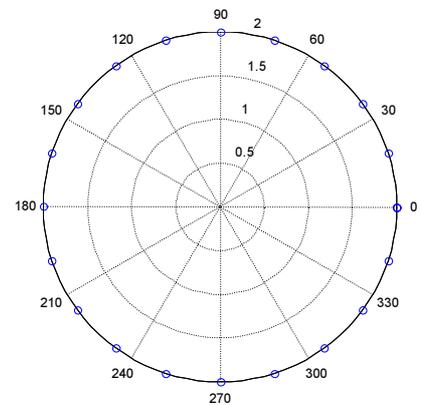


Figura M3.26

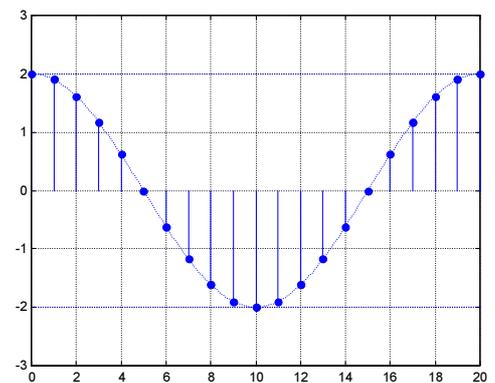


Figura M3.27

Escalão unitário

Define-se o sinal **escalão unitário** (discreto) por

$$u[n] = \begin{cases} 0 & , n < 0 \\ 1 & , n \geq 0 \end{cases}$$

A figura M3.28 mostra a evolução do escalão unitário para $-10 < n < 10$.

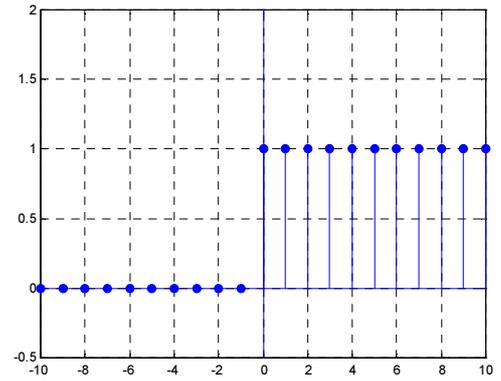


Figura M3.28

Impulso unitário

Define-se o sinal **impulso unitário** (discreto) por

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & , n \neq 0 \\ 1 & , n = 0 \end{cases}$$

A figura M3.29 mostra a evolução do impulso unitário para $-10 < n < 10$.

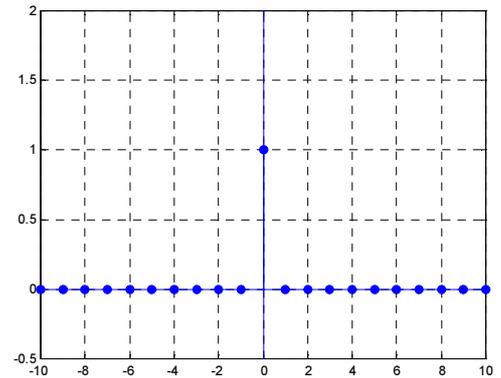


Figura M3.29

É fácil verificar que

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

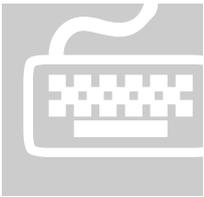
$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m] = \sum_{i=0}^{\infty} \delta[n-i]$$

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$

$$\delta[n-n_0] = u[n-n_0] - u[n-n_0-1]$$

$$u[n-n_0] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m-n_0] = \sum_{i=0}^{\infty} \delta[n-n_0-i]$$

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[0]\delta[n-n_0]$$



Matlab 3.2

Exemplo 1

Escreva uma função *Matlab* que devolva um vector de valores da variável independente, $n_1 \leq n \leq n_2$, e correspondentes valores da evolução do sinal impulso unitário discreto, $\delta[n - n_0]$, com $n_1 < n_0 < n_2$, recebendo como parâmetros os limites inferior e superior do intervalo da variável independente, n_1 e n_2 , e o instante, n_0 , em que se situa o impulso. Verifique a funcionalidade da função utilizando-a para traçar o gráfico do sinal discreto $x[n] = \delta[n - 2]$ com $n \in [-2, 4]$.

Podemos fazer, por exemplo,

```
function [n,x] = imp_n(n1,n2,n0)
% [n,x] = imp_n(n1,n2,n0)
% x[n] = delta[n-n0] , n1<=n0<=n2
%
n=n1:n2;
x=(n-n0)==0;
```

Sendo $n_1 = -2$, $n_2 = 4$ e $n_0 = 2$, temos

```
>> [n,x] = imp_n(-2,4,2);
>> stem(n,x,'filled');
>> axis([-2,4,-1,2]);
>> grid on
>>
```

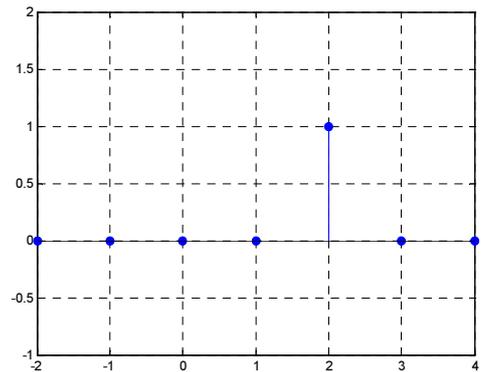


Figura M3.30

Exemplo 2

Escreva uma função *Matlab* que devolva um vector de valores da variável independente, $n_1 \leq n \leq n_2$, e correspondentes valores da evolução do sinal escalo unitário discreto, $u[n - n_0]$, com $n_1 < n_0 < n_2$, recebendo como parâmetros os limites inferior e superior do intervalo da variável independente, n_1 e n_2 , e o instante, n_0 , em que se situa o escalo. Verifique a funcionalidade da função utilizando-a para traçar o gráfico do sinal discreto $x[n] = u[n - 2]$ com $n \in [-2, 6]$.

Podemos fazer, por exemplo,

```
function [n,x] = escal_n(n1,n2,n0)
% [n,x] = escal_n(n1,n2,n0)
% x[n] = u[n-n0] , n1<=n0<=n2
%
n=n1:n2;
x=(n-n0)>=0;
```

Sendo $n_1 = -2$, $n_2 = 6$ e $n_0 = 2$, temos

```
>> [n,x] = escal_n(-2,6,2);
>> stem(n,x,'filled');
>> axis([-2,6,-1,2]);
>> grid on
>>
```

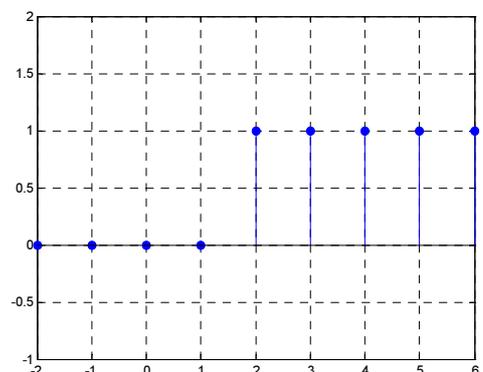
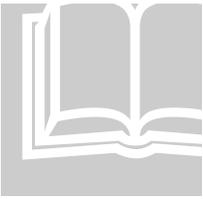


Figura M3.31



3. Convolução

Integral de convolução

O integral de convolução, ou simplesmente convolução, é uma operação definida para dois sinais contínuos, de energia, ou um sinal de energia e um sinal periódico.

Dados dois sinais contínuos, $x(t)$ e $y(t)$, define-se a **convolução** entre os dois sinais, $\chi(t)$, e utiliza-se o símbolo $*$ para a designar, como

$$\chi(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u)du$$

É possível demonstrar que a convolução verifica as seguintes propriedades

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

$$x(t) * (y(t) * z(t)) = (x(t) * y(t)) * z(t)$$

$$x(t) * (ay(t) + bz(t)) = a(x(t) * y(t)) + b(x(t) * z(t))$$

$$\frac{d}{dt}(x(t) * y(t)) = \frac{dx(t)}{dt} * y(t) = x(t) * \frac{dy(t)}{dt}$$

Note que, nomeadamente, a convolução é comutativa, associativa e distributiva. Podemos ainda demonstrar que

Da convolução entre um qualquer sinal $x(t)$ e um impulso de Dirac posicionado num instante t_o resulta um sinal que corresponde à translação do sinal $x(t)$ da quantidade de tempo t_o .

$$x(t) * \delta(t - t_o) = x(t - t_o)$$

Soma de convolução

A soma de convolução, ou simplesmente convolução, é uma operação definida para dois sinais discretos, de energia, ou um sinal de energia e um sinal periódico.

Dados dois sinais discretos, $x[n]$ e $y[n]$, define-se a **convolução** entre eles como

$$\chi[n] = x[n] * y[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]y[n-i]$$

Se $x[n]$ e $y[n]$ forem representados por sequências de duração N e M , a convolução, $\chi[n]$, será um sinal de duração $N + M - 1$.

É fácil demonstrar que a convolução assim definida verifica as propriedades associativa, comutativa e distributiva. E ainda que, de modo idêntico ao caso contínuo

Da convolução entre um qualquer sinal $x[n]$ e um impulso unitário posicionado num instante n_o resulta um sinal que corresponde à translação do sinal $x[n]$ da quantidade de tempo n_o .

$$x[n] * \delta[n - n_o] = x[n - n_o]$$



Exercício 3.1

Exemplo 1

Calcule a convolução entre os sinais $x(t) = \delta(t - t_0)$ e $y(t) = (t + a)\Pi\left(\frac{t - t_1}{\tau}\right)$.

Sendo que $x(t)$ é um impulso de Dirac posicionado no instante t_0 , e dado que

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

resulta de imediato

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \delta(t - t_0) * (t + a)\Pi\left(\frac{t - t_1}{\tau}\right) \\ &= (t - t_0 + a)\Pi\left(\frac{t - t_0 - t_1}{\tau}\right) \end{aligned}$$

A figura M3.32 ilustra graficamente o processo de convolução entre os dois sinais

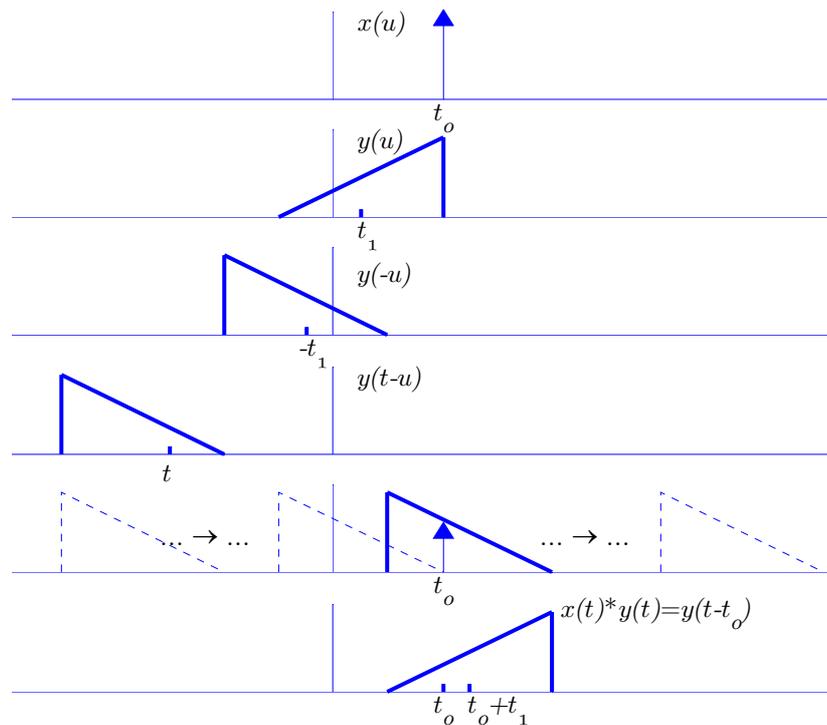


Figura M3.32

Exemplo 2

Calcule a convolução de um pulso rectangular centrado com ele mesmo.

Sendo

$$x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

a convulsão resulta

$$\begin{aligned}
 \chi(t) &= x(t) * x(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u)x(t-u)du \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)A\Pi\left(\frac{t-u}{\tau}\right)du \\
 &= A^2 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \Pi\left(\frac{u-t}{\tau}\right)du \\
 &= \begin{cases} 0 & t < -\tau \\ A^2 \int_{-\tau/2}^{t+\tau/2} du & -\tau \leq t < 0 \\ A^2 \int_{t-\tau/2}^{\tau/2} du & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & t < -\tau \\ A^2(t+\tau) & -\tau \leq t < 0 \\ A^2(-t+\tau) & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases} \\
 &= A^2\tau\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)
 \end{aligned}$$

Concluimos que da convolução de um pulso rectangular de amplitude A e duração τ com ele mesmo, resulta um pulso triangular de amplitude $A^2\tau$ e duração 2τ .

A figura M3.33 mostra o processo de convolução para diversos valores de t . Até $t = -\tau$ $x(u)$ e $x(t-u)$ são disjuntos no tempo pelo que o seu produto é nulo. A partir daí, e até $t = \tau$, os dois sinais têm uma percentagem da sua área sobreposta, verificando-se a sobreposição máxima (total) para $t = 0$.

Por exemplo, para $t = -\tau/2$ temos

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} x(u)x(t-u)du &= \int_{-\tau/2}^0 A^2 du \\
 &= A^2 \frac{\tau}{2}
 \end{aligned}$$

, para $t = 0$ temos

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} x(u)x(t-u)du &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A^2 du \\
 &= A^2\tau
 \end{aligned}$$

e para $t = \tau$ temos

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} x(u)x(t-u)du &= \int_0^{\tau/2} A^2 du \\
 &= A^2 \frac{\tau}{2}
 \end{aligned}$$

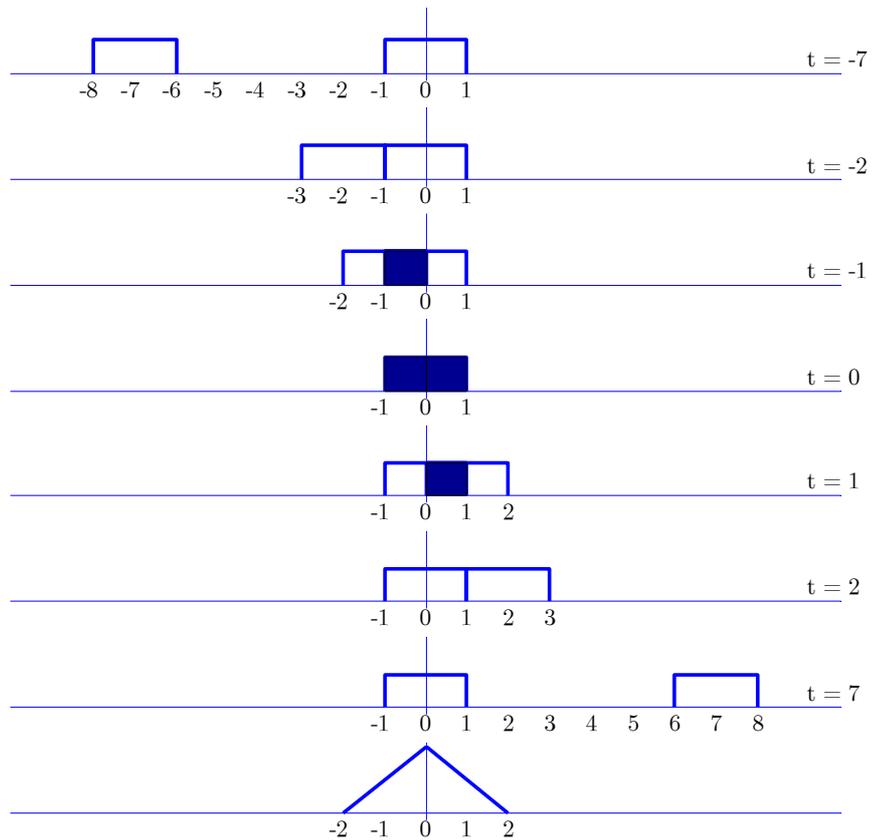


Figura M3.33

Exemplo 3

Calcule a convolução entre os sinais $x[n]$ e $y[n]$ representados nas figuras M3.34 e M3.35.

A partir das figuras, as sequências $x[n]$ e $y[n]$ são

$$x[n] = [2, 2, -1]$$

$$y[n] = [4, 3, 2, 1]$$

Embora se possa proceder como no caso contínuo, fixando um dos sinais, e invertendo e fazendo correr o outro sinal sobre o eixo das abcissas, no caso discreto é possível recorrer a um método gráfico que permite calcular rapidamente a convolução.

$$\chi[n] = x[n] * y[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]y[n - i]$$

, que se expõe na figura M3.36. Dispondo ortogonalmente cada um dos sinais, devidamente indexados, constrói-se uma matriz cujos elementos correspondem ao produto dos valores de cada um dos sinais.

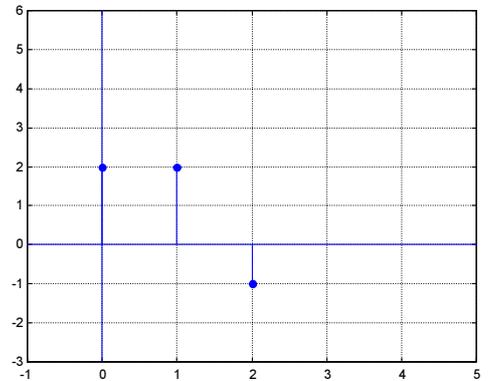


Figura M3.34

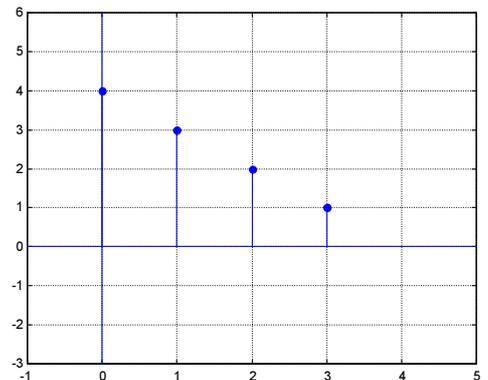


Figura M3.35

A convolução pode então ser calculada somando os valores que se encontram em cada uma das diagonais, sendo o índice correspondente a cada uma destas somas dado pela soma dos índices dos sinais, que é comum a cada diagonal.

Resulta então

$$\begin{aligned} \chi[0] &= 8 \\ \chi[1] &= 6 + 8 \\ \chi[2] &= 4 + 6 - 4 \\ \chi[3] &= 2 + 4 - 3 \\ \chi[4] &= 2 - 2 \\ \chi[5] &= -1 \end{aligned}$$

Finalmente $\chi[n] = [8, 14, 6, 3, 0, -1]$ para $n = [0, 1, 2, 3, 4, 5]$.

Exemplo 4

Calcule a convolução entre os sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$ representados nas figuras M3.37 e M3.38.

Recorrendo ao método gráfico, que se ilustra na figura M3.39, resulta $\chi[n] = x_1[n] * x_2[n]$ que se ilustra na figura M3.40.

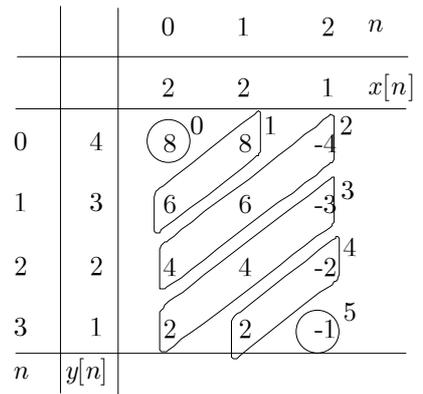


Figura M3.36

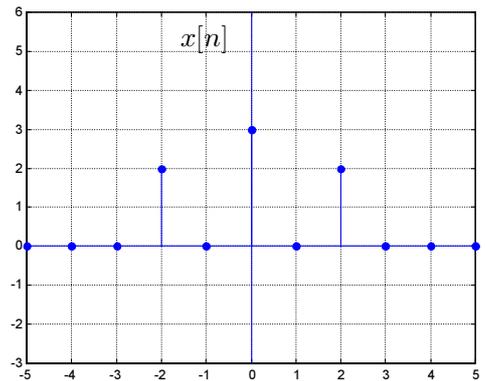


Figura M3.37

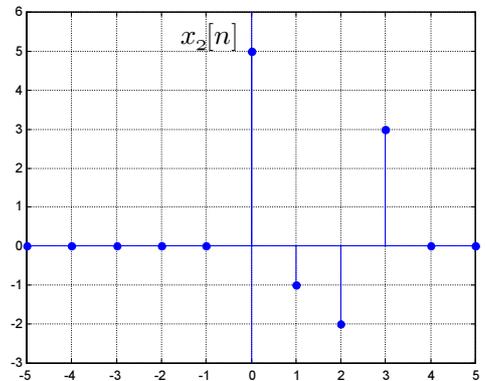


Figura M3.38

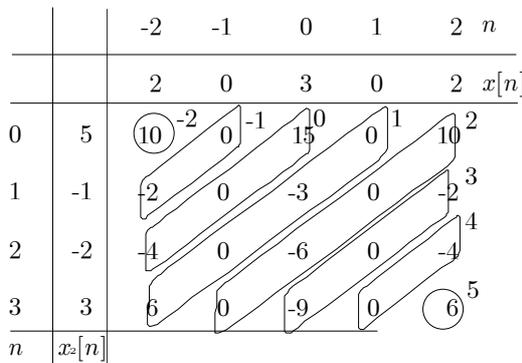


Figura M3.39

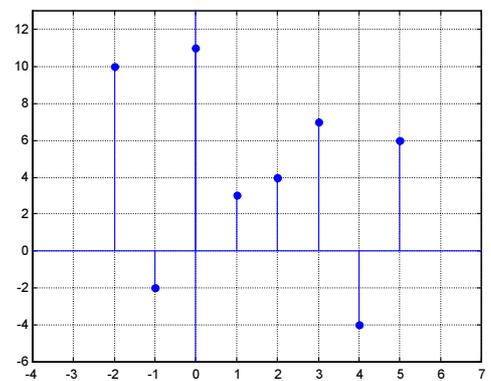
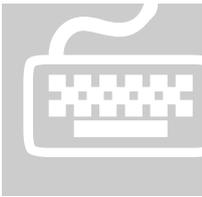


Figura M3.40



Matlab 3.3

Exemplo 1

Resolva o Exemplo2 do Exercício 3.1 recorrendo à *Matlab Symbolic Toolbox*.

A convolução do pulso rectangular centrado.

$$x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

com ele mesmo é, por definição

$$\begin{aligned}\chi(t) &= x(t) * x(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u)x(t-u)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)A\Pi\left(\frac{t-u}{\tau}\right)du \\ &= A^2 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \Pi\left(\frac{u-t}{\tau}\right)du\end{aligned}$$

Podemos então fazer

```
>> rect2=sym('A*Heaviside(t-u+tau/2)-A*Heaviside(t-u-tau/2)');
>> convol=int(A*rect2,u,-tau/2,tau/2)
convol =
-A^2*(-Heaviside(-t)*t+Heaviside(tau-t)*t-Heaviside(tau-t)*tau)+A^2*
(-Heaviside(-tau-t)*tau+Heaviside(-t)*t-Heaviside(-tau-t)*t)
>>
```

Note que a expressão é muito complicada visualmente em resultado da utilização da função de *Heaviside*, e a *Matlab Symbolic Toolbox* não é suficientemente potente para a simplificar. Em situações deste tipo, e caso seja de interesse a simplificação da expressão resultante, a solução é analisar a expressão por troços e pedir sucessivas simplificações parciais. A situação não é, de qualquer modo, impeditivo de um pedido de solução numérica e respectiva análise gráfica. Poderíamos por exemplo analisar a solução para $A = 2$ e $\tau = 2$ no intervalo $t \in [-4, 4]$

```
>>c2=subs(convol,tau,2);
>>c3=subs(c2,A,2);
>>t=-4:0.01:4;
>>c4=subs(c3,t);
>>plot(t,c4,'LineWidth',2)
>>grid on; axis([-4 4 -1 9])
>>
```

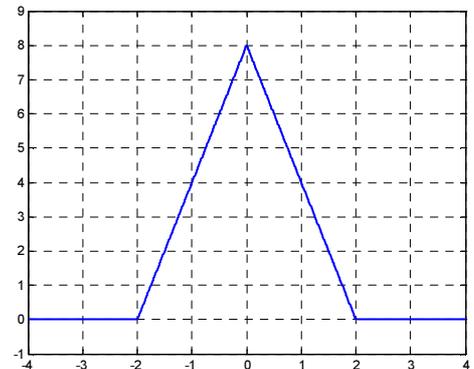


Figura M2.41

Exemplo 2

Escreva uma função *Matlab* que devolva o resultado da convolução entre dois sinais discretos e o vector em que está definida, recebendo como parâmetros os sinais, x_1 e x_2 , e os vectores em que estão definidos, n_1 e n_2 .

Podemos fazer, por exemplo,

```
function [n,y] = conv_n(n1,x1,n2,x2)
% [n,y] = conv_n(n1,x1,n2,x2)
% y[n] = x[n1]*x[n2]

nm=n1(1)+n2(1);
nM=n1(length(n1))+n2(length(n2));
n=nm:nM
y=conv(x1,x2);
```

Note que se recorreu à **função conv** pré-definida em *Matlab*, tendo sido necessário apenas calcular os instante em que os valores da convolução está definida.

Exemplo 3

Utilize a função escrita no Exemplo2 para resolver o Exemplo3 e o Exemplo4 do Exercício 3.1.

A solução é imediata. Temos para o Exemplo3

```
>> n1=0:2;
>> x1=[2 2 -1];
>> n2=0:3;
>> x2=[4 3 2 1];
>> [n y]=conv_n(n1,x1,n2,x2)
n =
 0     1     2     3     4     5
y =
 8    14     6     3     0    -1
>> stem(n,y,'filled')
>> grid on
>>
```

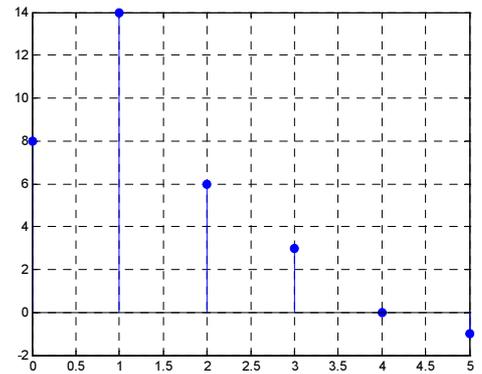


Figura M2.42

E para o Exemplo4

```
>> n1=-5:5;
>> n2=n1;
>> x1=[0 0 0 2 0 3 0 2 0 0 0];
>> x2=[0 0 0 0 0 5 -1 -2 3 0 0];
>> [n y]=conv_n(n1,x1,n2,x2);
>> stem(n,y,'filled')
>> grid on
>>
```

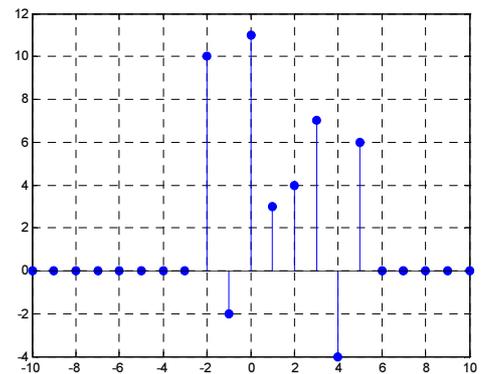


Figura M2.43



Demo 1: Convolução de um sinal com o impulso

Sendo por definição

$$\begin{aligned}\chi(t) &= y(t) * x(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y(u)x(t-u)du\end{aligned}$$

Se o sinal $y(u)$ for um impulso de Dirac situado em t_0 , $y(u) = \delta(u - t_0)$, temos

$$\chi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u - t_0)x(t-u)du$$

Atendendo às propriedades do impulso de Dirac,

$$\begin{aligned}\delta(u - t_0)x(t-u) &= \delta(u - t_0)x(t-t_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u - t_0)du &= 1\end{aligned}$$

, pelo que

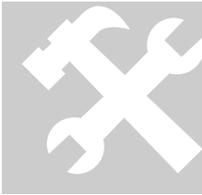
$$\begin{aligned}\chi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u - t_0)x(t-t_0)du \\ &= x(t-t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u - t_0)du \\ &= x(t-t_0)\end{aligned}$$

Concluimos assim que

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

Para o caso discreto temos, de modo idêntico

$$\begin{aligned}\chi[n] &= \delta[n - n_0] * x[n] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta[i - n_0]x[n - i] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta[i - n_0]x[n - n_0] \\ &= x[n - n_0] \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta[i - n_0] \\ &= x[n - n_0]\end{aligned}$$



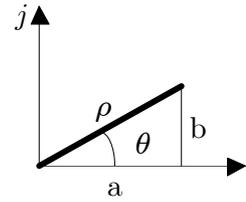
Apêndice 1: Complexos

Recorde que o número complexo c , escrito na forma rectangular (ou cartesiana)

$$c = a + jb$$

pode ser escrito na forma polar (ou exponencial)

$$c = \rho e^{j\theta}$$



, em que ρ representa o módulo do complexo e θ o seu argumento. O módulo é facilmente obtido, recorrendo à representação gráfica do complexo

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

,ou, multiplicando o complexo pelo seu conjugado

$$\begin{aligned} |c| &= \sqrt{cc^*} \\ &= \sqrt{(a + jb)(a - jb)} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Quando o complexo está expresso na forma polar, o reconhecimento do módulo é imediato. Note, ainda assim, que, embora desnecessário, podíamos fazer

$$\begin{aligned} |c| &= \sqrt{cc^*} \\ &= \sqrt{\rho e^{j\theta} \rho e^{-j\theta}} \\ &= \rho \end{aligned}$$

Quanto ao argumento, recorrendo à representação gráfica

$$\arg\{c\} = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

idêntico à relação a partir da forma rectangular

$$\arg\{c\} = \arctan\left(\frac{\text{Im}\{c\}}{\text{Re}\{c\}}\right) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Recorde que a relação de *Euler*

$$e^{\pm jA} = \cos(A) \pm j \sin(A)$$

permite facilmente obter a definição das funções seno e co-seno a partir da função exponencial complexa

$$\begin{aligned} \cos(A) &= \frac{e^{jA} + e^{-jA}}{2} \\ \sin(A) &= \frac{e^{jA} - e^{-jA}}{2j} \end{aligned}$$

É evidente que

$$|e^{jA}| = 1$$

note, por exemplo, que

$$\begin{aligned} |e^{jA}| &= |\cos(A) + j \operatorname{sen}(A)| \\ &= \sqrt{\cos^2(A) + \operatorname{sen}^2(A)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Atendendo ao que atrás ficou dito, facilmente se calcula o módulo e o argumento do sinal exponencial complexo. Sendo

$$\begin{aligned} x(t) &= Ce^{at} \\ &= |C|e^{j\theta_0} e^{(\tau + j\omega_0)t} \\ &= |C|e^{\tau t} e^{j(\omega_0 t + \theta_0)} \end{aligned}$$

resulta imediatamente, dado que a expressão está na forma polar,

$$|x(t)| = |C|e^{\tau t}$$

e

$$\arg\{x(t)\} = \omega_0 t + \theta_0$$



Ficha de Avaliação M3

N: Nome: Turma:

Data limite de entrega 14-04-2003

(A ficha deve ser colocada, até à data limite, no recipiente apropriado existente junto ao Gabinete C –CEDEI)

Grupo C

Exercício 1

Considere o sinal

$$x(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < -\pi/2 \\ 1 & -\pi/2 \leq t < \pi/2 \\ -1 & \pi/2 \leq t < \pi \end{cases}$$

conforme representado na figura xxx.

- Recorra ao Matlab para calcular a expressão analítica dos coeficientes

$$b_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos(kt) dt}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kt) dt}$$

Simplifique a expressão.

- Aproxime $x(t)$ pelo sinal $y(t) = \sum_{k=1}^{k=7} b_k \cos(kt)$ no intervalo $[-\pi, \pi]$. Represente graficamente as diversas parcelas do somatório, assim como a soma acumulada. (À semelhança do Exemplo1 em Matlab 3.1).

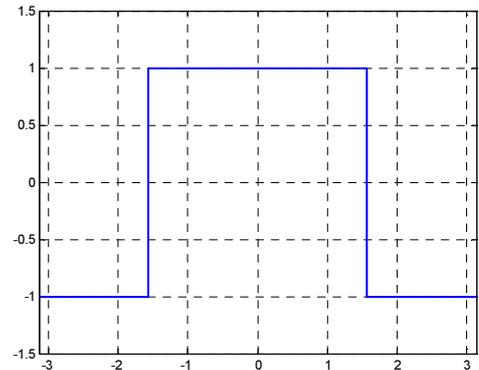


Figura M2.44

Exercício 2

- À imagem das figuras M3.24 a M3.27, represente o sinal exponencial complexo $x[n] = |C|\alpha^n e^{j(\Omega_0 n + \theta_0)}$ e a sua parte real, $\text{Re}\{x[n]\} = |C|\alpha^n \cos(\Omega_0 n + \theta_0)$, para $C = 2$, $0 < n < 20$, $\Omega_0 = \pi/2$, $\theta_0 = 0$ e $\alpha = 0.95$.

Exercício 3

- Recorra ao Matlab para calcular e representar a convolução entre os sinais discretos

$$x_1[n] = 2\delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2]$$

$$x_2[n] = \delta[n] + \delta[n-6]$$

Comente o resultado.

Grupo B

Exercício 4

- Represente o sinal

$$C(k) = \frac{A\tau}{T_0} \operatorname{sinc}\left(k \frac{\tau}{T_0}\right)$$

considerando $A = 1$, $\tau = 1$ e $T_0 = 2$. Admita $k \in \mathfrak{R}$ no intervalo $[-10, 10]$. Sobreponha ao gráfico obtido o gráfico do mesmo sinal, mas considerando agora $k \in \mathfrak{S}$ no intervalo $[-10, 10]$.

- Repita o ponto anterior considerando $T_0 = 4$ e, sucessivamente, $k \in \mathfrak{R}$ no intervalo $[-20, 20]$ e $k \in \mathfrak{S}$ no intervalo $[-20, 20]$.
- Comente o posicionamento dos zeros do sinal em cada um dos pontos anteriores tendo em atenção o que conhece do sinal $\operatorname{sinc}(v)$.

Exercício 5

Recorra à *Matlab Symbolic Toolbox* para calcular a convolução entre os sinais

$$x(t) = A\Pi\left(\frac{t-2}{2}\right)$$

e

$$y(t) = A\Pi(t-5)$$

Grupo A

Exercício 6

- Defina um objecto simbólico correspondente ao pulso triangular

$$\Lambda\left(\frac{t-2}{2}\right) = \begin{cases} \left(1 + \frac{t-2}{2}\right) & , 0 < t \leq 2 \\ \left(1 - \frac{t-2}{2}\right) & , 2 < t \leq 4 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

tendo como base a função de *Heaviside* redefinida..

- Calcule e represente (através do *Matlab*) a 1ª e a 2ª derivada do objecto definido no ponto anterior.