

LICENCIATURA EM ENGENHARIA DE SISTEMAS
DE TELECOMUNICAÇÕES E ELECTRÓNICA

Apontamentos de Análise de Sinais



© Prof. José Amaral
Versão 3.0 • 06-04-2003
Secção de Comunicações e Processamento de Sinal
ISEL-CEDET, Gabinete C • jda@isel.pt

Índice

OBJECTIVOS	1
1. ESPAÇO DE SINAIS.....	2
PRODUTO INTERNO.....	2
SINAIS ORTOGONAIS	2
EXEMPLO 3.1	2
EXEMPLO 3.2	2
ESPAÇO DE SINAIS.....	3
ERRO QUADRÁTICO MÉDIO	3
EXEMPLO 3.3	3
COEFICIENTES ÓPTIMOS.....	4
EXEMPLO 3.3 (CONT.)	4
EXERCÍCIO 4.1	5
MATLAB 4.1.....	8
EXERCÍCIO 4.2.....	11
MATLAB 4.2.....	13
EXERCÍCIO 4.3.....	15
MATLAB 4.3.....	19
DEMO 1: ORTOGONALIDADE	
ENTRE SENOS.....	21
APÊNDICE 1: ESPAÇO DE	
VECTORES	22
APÊNDICE 2: ESPAÇO DE SINAIS	25
EXERCÍCIOS M4	30
EXEMPLO 1.....	30
EXEMPLO 2.....	32
EXEMPLO 3.....	34
FICHA DE AVALIAÇÃO M4	36
GRUPO C.....	36
EXERCÍCIO 1	36
GRUPO B.....	36
EXERCÍCIO 2	36
GRUPO A.....	37
EXERCÍCIO 3	37

Espaço de sinais

TÓPICOS

Espaço de sinais

Produto interno

Sinais ortogonais

Espaço de sinais

Erro quadrático médio

Coefficientes óptimos

Os conceitos apresentados neste módulo são importantes não só por fundamentarem a teoria da Análise de *Fourier*, apresentada nos próximos 4 Módulos, mas, e principalmente, porque constituem a génese da maioria das técnicas de processamento de sinal, que serão apresentadas num significativo número de cadeiras do seu curso, nomeadamente naquelas associadas na Secção de Comunicações e Processamento de Sinal.

No Apêndice 1 relembram-se alguns conceitos apresentados nas cadeiras de Álgebra e Análise Vectorial, de modo a que mais facilmente compreenda a analogia que é possível estabelecer entre vectores e sinais, que se desenvolve no Apêndice 2, e que permite a conceptualização de um espaço de sinais, com os inerentes conceitos de produto interno e ortogonalidade entre sinais.

O presente módulo é composto principalmente por um vasto conjunto de exercício fundamentados nas principais relações deduzidas no Apêndice 2, relações essas apresentadas em destaque no início deste Módulo. Para além disso, e dado que este Módulo encerra o 1º terço da matéria da cadeira de Análise de Sinais, são apresentados e resolvidos diversos exercícios que cobrem toda a matéria apresentada até aqui. Tenha em especial atenção a abordagem feita através do *Matlab*.

Objectivos

No fim deste módulo o aluno deverá :

1. Compreender o conceito e saber calcular o produto interno entre sinais.
2. Compreender o conceito e saber verificar se dois sinais são ortogonais.
3. Saber calcular os coeficientes óptimos de representação de um sinal num espaço de sinais ortonormado.



1. Espaço de sinais

Por analogia com o espaço de vectores é possível estabelecer os seguintes conceitos entre sinais:

Produto interno

Define-se o **produto interno** entre dois sinais contínuos, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, num intervalo $[t_1, t_2]$, como

$$\langle x_1(t), x_2(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x_1(t)x_2^*(t)dt$$

Define-se o produto interno entre dois sinais discretos, $x_1[n]$ e $x_2[n]$, num intervalo $[n_1, n_2]$, como

$$\langle x_1[n], x_2[n] \rangle = \sum_{n_1}^{n_2} x_1[n]x_2^*[n]$$

Sinais ortogonais

Dois sinais contínuos, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, dizem-se **sinais ortogonais**, num intervalo $[t_1, t_2]$, se o seu produto interno for nulo

$$\int_{t_1}^{t_2} x_1(t)x_2^*(t)dt = 0$$

Dois sinais discretos, $x_1[n]$ e $x_2[n]$, dizem-se sinais ortogonais, num intervalo $[n_1, n_2]$, se o seu produto interno for nulo

$$\sum_{n_1}^{n_2} x_1[n]x_2^*[n] = 0$$

Exemplo 3.1

Observe a figura M4.1. A área sob a curva do sinal $y(t) = \cos(t)\sin(t)$ acima e abaixo do eixo das abcissas é igual, ou seja, o produto interno entre os sinais, $x_1(t) = \cos(t)$ e $x_2(t) = \sin(t)$, no intervalo $[-\pi, \pi]$, dado por $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\sin(t)dt$, é nulo, pelo que os sinais são ortogonais no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Exemplo 3.2

Observe a figura M4.2. A área sob a curva do sinal $y(t) = \cos(t)\cos(2t)$ acima e abaixo do eixo das abcissas é igual, ou seja, o produto interno entre os sinais, $x_1(t) = \cos(t)$ e $x_2(t) = \cos(2t)$, no intervalo $[-\pi, \pi]$, dado por $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\cos(2t)dt$, é nulo, pelo que os sinais são ortogonais no intervalo $[-\pi, \pi]$.

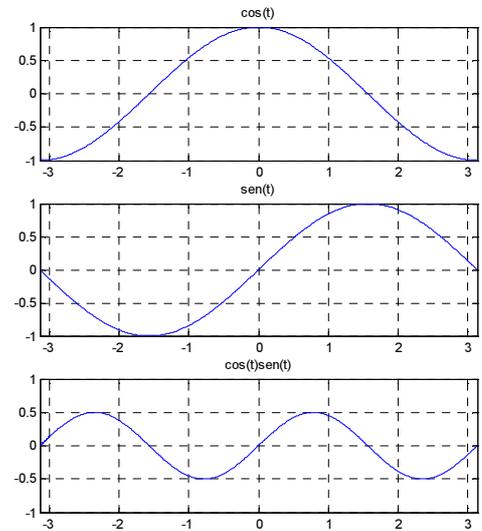


Figura M4.1

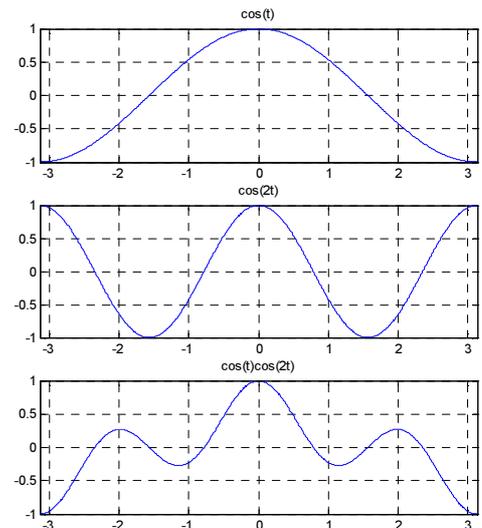


Figura M4.2

Espaço de sinais

Um conjunto de n sinais contínuos $\{y_k(t)\}$, com $k = 1, 2, \dots, n$, ortogonais num intervalo $[t_1, t_2]$, define um **espaço ortogonal de sinais**, sendo qualquer sinal contínuo $x(t)$ representável neste espaço a menos de um sinal de erro $x_e(t)$

$$x(t) = \sum_{k=1}^n a_k y_k(t) + x_e(t)$$

Um conjunto de n sinais discretos $\{y_k[n]\}$, com $k = 1, 2, \dots, n$, ortogonais num intervalo $[n_1, n_2]$, define um espaço ortogonal de sinais, sendo qualquer sinal discreto $x[n]$ representável neste espaço a menos de um sinal de erro $x_e[n]$

$$x[n] = \sum_{k=1}^n a_k y_k[n] + x_e[n]$$

Erro quadrático médio

O erro quadrático médio da representação num intervalo $[t_1, t_2]$ de um sinal contínuo $x(t)$, num espaço de sinais $\{y_k(t)\}$, é dado por

$$C = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x_e^2(t) dt$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[x(t) - \sum_{k=1}^n a_k y_k(t) \right]^2 dt$$

O erro quadrático médio da representação num intervalo $[n_1, n_2]$ de um sinal discreto $x[n]$, num espaço de sinais $\{y_k[n]\}$, é dado por

$$C = \frac{1}{n_2 - n_1} \sum_{n_1}^{n_2} \left[x[n] - \sum_{k=1}^n a_k y_k[n] \right]^2$$

Exemplo 3.3

É possível demonstrar que os sinais $\text{sen}(n\omega t)$ e $\text{sen}(m\omega t)$, com n e m inteiros, e diferentes entre si, são ortogonais em qualquer intervalo $[t_1, t_1 + 2\pi/\omega]$. Assim sendo, e considerando $\omega = 1$ e $t_1 = 0$, o conjunto de sinais $\{\text{sen}(kt)\}$ define um espaço ortogonal de sinais no intervalo $[0, 2\pi]$, pelo que, considerando por exemplo o sinal $x(t)$ que se mostra na figura M4.3, e $n = 7$, podemos representar $x(t)$ no intervalo $[0, 2\pi]$ a menos de um sinal de erro $x_e(t)$: $x(t) = \sum_{k=1}^7 a_k \text{sen}(kt) + x_e(t)$. A figura M4.4 mostra o sinal

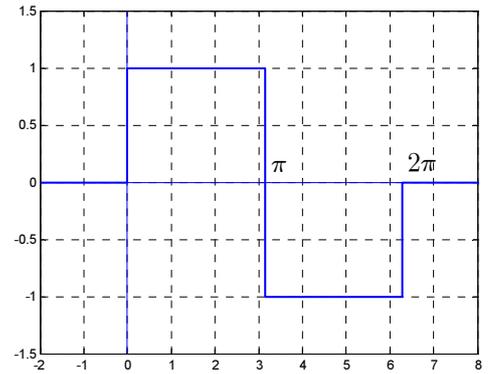


Figura M4.3

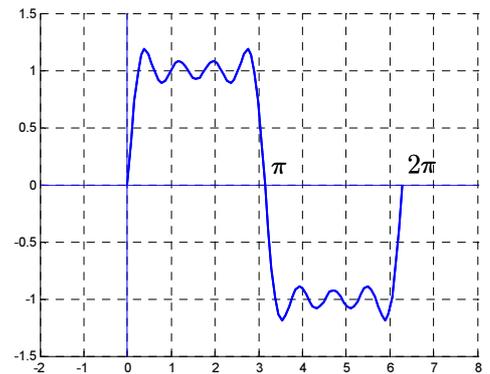


Figura M4.4

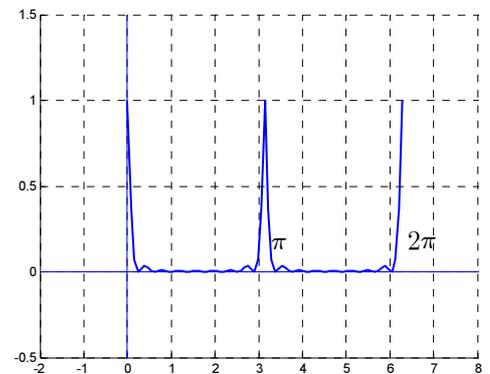


Figura M4.5

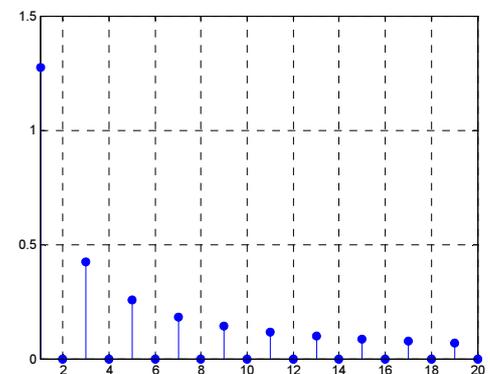


Figura M4.6

$y(t) = \sum_{k=1}^7 a_k \text{sen}(kt)$ e a figura M4.5 mostra o quadrado do erro cometido $x_e^2(t) = (x(t) - y(t))^2$.

Coefficientes óptimos

De modo a minimizar do erro quadrático médio da representação de um sinal contínuo $x(t)$ num espaço de sinais $\{y_k(t)\}$, os coeficientes óptimos, a_k , são dados por

$$a_k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)y_k^*(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} y_k y_k^*(t)dt}$$

De modo a minimizar do erro quadrático médio da representação de um sinal discreto $x[n]$, num espaço de sinais $\{y_k[n]\}$, os coeficientes óptimos, a_k , são dados por

$$a_k = \frac{\sum_{n_1}^{n_2} x[n]y_k^*[n]}{\sum_{n_1}^{n_2} y_k y_k^*[n]}$$

Para os coeficientes óptimos, o erro quadrático médio da representação num intervalo $[t_1, t_2]$ de um sinal contínuo $x(t)$, num espaço de sinais $\{y_k(t)\}$, é dado por

$$C = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt - \sum_{k=1}^n a_k^2 \int_{t_1}^{t_2} |y_k(t)|^2 dt \right]$$

Para os coeficientes óptimos, o erro quadrático médio da representação num intervalo $[n_1, n_2]$ de um sinal discreto $x[n]$, num espaço de sinais $\{y_k[n]\}$, é dado por

$$C = \frac{1}{n_2 - n_1} \left[\sum_{n_1}^{n_2} x^2[n] - \sum_{k=1}^n a_k^2 |y_k[n]|^2 \right]$$

Exemplo 3.3 (cont.)

De modo a que a energia do sinal de erro no intervalo $[0, 2\pi]$, ou, o que é proporcional, o erro quadrático médio $C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_e^2(t)dt$ seja o menor possível, os coeficientes a_k devem ser

convenientemente calculados, sendo para este exemplo $a_k = \frac{2}{k\pi} (1 - \cos(k\pi))$. A figura M4.6 mostra a evolução dos coeficientes para sucessivos valores de k , no caso para os primeiros 20 coeficientes. A figura M4.7 mostra a evolução do erro quadrático médio à medida que se vão somando os sucessivos termos de $y(t)$. A figura M4.8 mostra a aproximação $y(t)$ conseguida se utilizássemos 100 coeficientes.

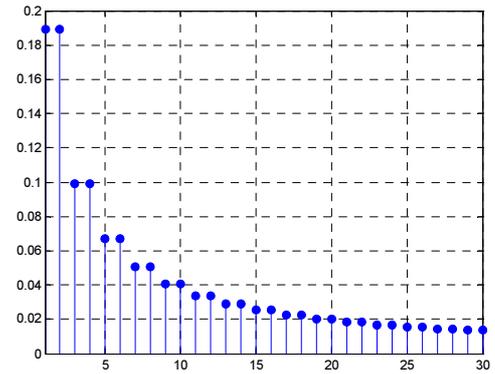


Figura M4.7

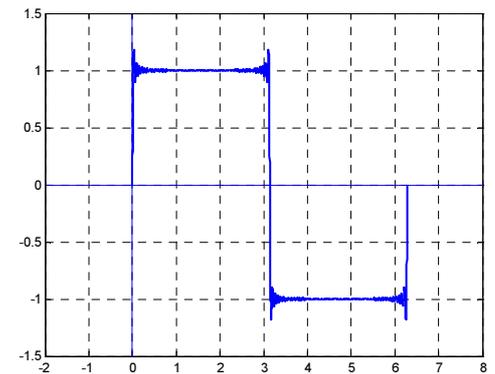


Figura M4.8

Note que na expressão dos coeficientes óptimos o numerador corresponde ao produto interno entre o sinal a representar e os sinais de base que definem o espaço de representação, sendo portanto uma medida de semelhança do sinal com cada um dos sinais base. O denominador corresponde à energia de cada um dos sinais base, tendo apenas a função de normalizar os valores dos coeficientes. Se os sinais base tiverem norma unitária, ou seja, se forem versores do espaço que definem, o denominador tem valor 1, não influenciando o valor do coeficiente.



Exercício 4.1

Considere o sinal

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \pi \\ -1 & \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

conforme representado na figura M4.9.

a) Aproxime $x(t)$ pelo sinal $y(t) = a \operatorname{sen}(t)$ de modo a minimizar o erro quadrático médio no intervalo $[0, 2\pi]$.

b) Trace o gráfico da evolução do erro quadrático médio em função do coeficiente de semelhança a .

c) Aproxime $x(t)$ pelo sinal

$y(t) = \sum_{k=1}^{k=7} a_k \operatorname{sen}(kt)$ de modo a minimizar o erro quadrático médio no intervalo $[0, 2\pi]$.

d) Trace o gráfico da evolução do erro quadrático médio em função do número de coeficiente de semelhança.

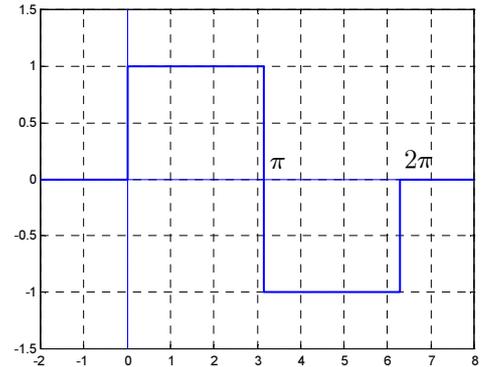


Figura M4.9

a) Pretendemos determinar a na relação $x(t) = ay(t) + x_e(t)$ de modo a minimizar o erro quadrático médio no intervalo $[0, 2\pi]$. Sendo os coeficientes ótimos dados genericamente por

$$a_k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)y_k^*(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} y_k y_k^*(t)dt}$$

Temos, para o exemplo em causa em que apenas existe um coeficiente e a função de base é real,

$$a = \frac{\int_0^{2\pi} x(t)y(t)dt}{\int_0^{2\pi} y^2(t)dt}$$

Desenvolvendo a expressão resulta

$$\begin{aligned} a &= \frac{\int_0^{2\pi} x(t) \operatorname{sen}(t) dt}{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t) dt} \\ &= \frac{\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(t) dt - \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen}(t) dt}{\pi} \\ &= \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

pelo que

$$x(t) \approx y(t) = \frac{4}{\pi} \operatorname{sen}(t)$$

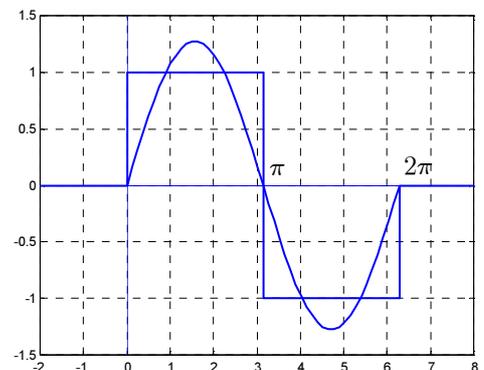


Figura M4.10

no intervalo $[0, 2\pi]$. A figura M4.10 mostra o gráfico do sinal $x(t)$ e da aproximação $y(t)$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

b) O erro quadrático médio é dado genericamente por

$$C = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x_e^2(t) dt$$

Temos então para o exemplo em causa

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (x(t) - ay(t))^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x(t) - a \operatorname{sen}(t))^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} x^2(t) dt + a^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t) dt - 2a \int_0^{2\pi} x(t) \operatorname{sen}(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} (2\pi + a^2\pi - 8a) \end{aligned}$$

A figura M4.11 mostra a evolução do erro quadrático médio em função do coeficiente de semelhança. Observe que a curva tem um andamento quadrático (obviamente) com um mínimo bem definido correspondente ao coeficiente óptimo. Podemos verificar o valor do mínimo do erro quadrático médio

$$\begin{aligned} \frac{dC}{da} &= \frac{d}{da} \left(\frac{1}{2\pi} (2\pi + a^2\pi - 8a) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} (2a\pi - 8) \end{aligned}$$

$$\frac{dC}{da} = 0 \Rightarrow 2a\pi - 8 = 0 \Rightarrow a = \frac{4}{\pi}$$

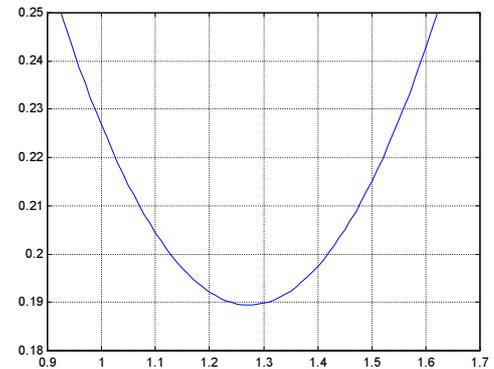


Figura M4.11

c) O problema já foi abordado no Módulo 2, não tendo então sido dada justificação para a expressão dos coeficientes a_k . Para aproximar $x(t)$ pelo sinal $y(t)$ de modo a minimizar o erro quadrático médio no intervalo $[0, 2\pi]$ é necessário calcular os coeficientes óptimos através da expressão

$$a_k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) y_k^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} y_k y_k^*(t) dt}$$

temos então

$$a_k = \frac{\int_0^{2\pi} x(t) \operatorname{sen}(kt) dt}{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(kt) dt}$$

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{\int_0^\pi \text{sen}(kt)dt - \int_\pi^{2\pi} \text{sen}(kt)dt}{\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(kt)dt} \\
 &= \frac{1}{k} \left[\cos(kt) \Big|_0^\pi - \cos(kt) \Big|_\pi^{2\pi} \right] \\
 &= \frac{2}{k\pi} (1 - \cos(k\pi))
 \end{aligned}$$

ou seja

$$a_n = \begin{cases} 0 & k \text{ par} \\ \frac{4}{k\pi} & k \text{ impar} \end{cases}$$

logo

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_{k=1}^{k=7} a_k \text{sen}(kt) \\
 &= \frac{4}{\pi} \left[\text{sen}(t) + \frac{1}{3} \text{sen}(t) + \frac{1}{5} \text{sen}(t) + \frac{1}{7} \text{sen}(t) \right]
 \end{aligned}$$

A figura M4.12 mostra comparativamente o sinal $x(t)$ e a aproximação $y(t)$ obtida.

d) Para os coeficientes óptimos o erro quadrático médio é dado por

$$C = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt - \sum_{k=1}^n a_k^2 m_k \right]$$

Sendo

$$\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

e

$$\begin{aligned}
 m_k &= \int_{t_1}^{t_2} y_k(t)y_k^*(t)dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(kt)dt = \pi
 \end{aligned}$$

Resulta então

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{1}{2\pi} \left[2\pi - \sum_{k=1}^n a_k^2 \pi \right] \\
 &= 1 - \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{2}
 \end{aligned}$$

A figura M4.13 mostra a evolução do erro quadrático em função do número de termos utilizados na aproximação de $x(t)$.

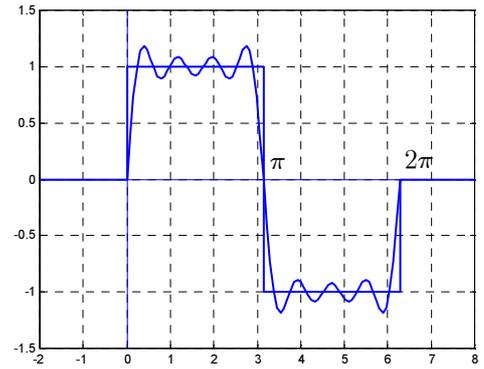


Figura M4.12

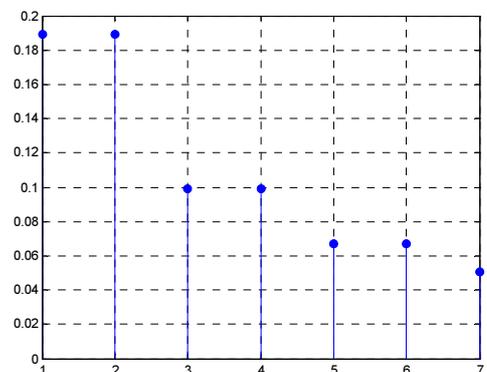
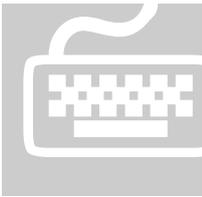


Figura M4.13



Matlab 4.1

Resolva o Exercício 4.1 recorrendo ao *Matlab*.

a) O coeficiente a pode ser determinado recorrendo ao cálculo simbólico. Sendo

$$a = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)y^*(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} y(t)y^*(t)dt} = \frac{\int_0^{2\pi} x(t)\text{sen}(t)dt}{\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(t)dt}$$

Temos, atendendo a que o sinal $x(t)$ vale 1 no intervalo $[0, \pi[$ e -1 no intervalo $[\pi, 2\pi[$,

```
>> syms t
>> f=sym('sin(t)')
f =
    sin(t)
>> an=int(f,t,0,pi)-int(f,t,pi,2*pi)
an =
     4
>> ad=int(f.^2,t,0,2*pi)
ad =
     pi
>> a=an/ad
a =
    4/pi
>>
```

Calculado o coeficiente a a representação do sinal $y(t) = a \text{sen}(t)$ é trivial, correspondendo à figura M4.10.

b) Sendo erro quadrático médio dado por

$$C = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (x(t) - ay(t))^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x(t) - a \text{sen}(t))^2 dt$$

Temos então

```
>> syms t a
>> f=sym('sin(t)');
>> C=(int((1-a*sin(t)).^2,t,0,pi)+int((-1-a*sin(t)).^2,t,pi,2*pi));
>> C=C/2/pi;
>> pretty(C)
          2
      pi - 4 a + 1/2 a pi
      -----
          pi
>> an=0.9:0.01:1.7;
>> Cn=subs(C,a,an);
>> plot(an,Cn);grid on;axis([0.9 1.7 0.18 0.25])
>>
```

O gráfico resultante corresponde à figura M4.11.

c) A resposta a esta questão foi já dada em Matlab 3.1 (página M3-8).

d) Para os coeficientes óptimos, o erro quadrático médio da representação num intervalo $[t_1, t_2]$ de um sinal contínuo $x(t)$, num espaço de sinais $\{y_k(t)\}$, é dado por

$$C = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt - \sum_{k=1}^n a_k^2 \int_{t_1}^{t_2} |y_k(t)|^2 dt \right]$$

Para o problema em análise resulta, sem necessidade de recurso ao Matlab

$$\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

e, já calculado na alínea a),

$$\int_{t_1}^{t_2} |y_k(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(kt) dt = \pi$$

Temos então

$$C = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{2}$$

, sendo que a_k foi previamente calculado na alínea c). Basta portanto fazer

```
N=7
...
Ck=zeros(1,N);
for i=1:N
    Ck(i)=1-0.5*sum(ak(1:i).^2)
end
stem(k,Ck,'filled');
grid on
axis([1 N 0 0.2])
```

, obtendo-se o gráfico da figura M4.13.

Uma última nota sobre o recurso a operações matriciais. Algum do código transcrito, e para que seja mais clara a sua funcionalidade, segue de perto as expressões analíticas, recorrendo desnecessariamente a ciclos for. Considere por exemplo a obtenção da figura M4.12 em que se representa

$$y(t) = \sum_{k=1}^{k=N} a_k \text{sen}(kt)$$

Admita, para clareza de exposição, que conhece a expressão dos coeficientes

$$a_k = \frac{2}{k\pi} (1 - \cos(k\pi))$$

Neste momento já deve ser claro para si que não deve fazer

```
N=7
ak=zeros(1,N);
for k=1:N
    ak(k)=2./(k*pi).*(1-cos(k*pi));
end
```

Mas sim

```
N=7
k=1:N;
ak=2./(k*pi).*(1-cos(k*pi));
```

Expressão que, aliás, é uma tradução directa da expressão analítica dos coeficientes a_k . Consideremos agora o cálculo de $y(t)$. Provavelmente terá tendência para criar um ciclo for, sendo até provável que opte pelo cálculo dos coeficientes a_k dentro desse ciclo, escrevendo algo como

```

N=7
t=0:0.01:2*pi;
ak=zeros(1,N);
yk=zeros(N,length(t));
for k=1:N
    ak(k)=2./(k*pi).*(1-cos(k*pi));
    yk(k,:)=ak(k).*sin(k*t);
end
y=zeros(1,length(t));
for k=1:N
    y=y+yk(k,:);
end

```

ou

```

N=7
t=0:0.01:2*pi;
ak=zeros(1,N);
y=zeros(1,length(t));
for k=1:N
    ak(k)=2./(k*pi).*(1-cos(k*pi));
    y=y+ak(k).*sin(k*t);
end

```

Note que pode fazer simplesmente

```

N=7
t=0:0.01:2*pi;
k=1:N;
ak=2./(k*pi).*(1-cos(k*pi))
y=ak*sin(k'*t);

```

A instrução `sin(k'*t)` cria uma matriz em que cada linha vale $\sin(kt)$.

$$\begin{bmatrix} \sin(t_1) & \cdots & \sin(t_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \sin(7t_1) & \cdots & \sin(7t_n) \end{bmatrix}$$

A expressão $\sum_{k=1}^{k=N} a_k \sin(kt)$ pode, e deve, ser interpretada como um produto matricial

$$\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(t_1) & \cdots & \sin(t_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \sin(7t_1) & \cdots & \sin(7t_n) \end{bmatrix}$$

Recordando as regras de cálculo matricial, facilmente reconhecerá que do produto resulta um vector de dimensão $1 \times n$, em que o 1º elemento corresponde a

$$a_1 \sin(t_1) + \cdots + a_7 \sin(7t_1)$$

o segundo elemento corresponde a

$$a_1 \sin(t_2) + \cdots + a_7 \sin(7t_2)$$

etc. Assim, com a expressão `ak*sin(k'*t)`, obtemos o sinal desejado $y(t) = \sum_{k=1}^{k=N} a_k \sin(kt)$.



Exercício 4.2

Considere os sinais representados nas figuras M4.14 a M4.16.

- Determine o valor de a de modo a que os sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$ sejam ortogonais.
- Determine as componentes par e ímpar do sinal $x_2[n]$.
- Represente $x_1[n/2]$.
- Calcule a energia dos sinais $x_1[n]$, e $x_2[n]$.
- Determine os valores dos coeficientes a_1 e a_2 da expressão $x[n] = a_1x_1[n] + a_2x_2[n] + x_e[n]$ de forma a que a energia do sinal $x_e[n]$ seja mínima.

- Para que os sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$ sejam ortogonais é necessário que o seu produto interno seja nulo. Por definição de produto interno entre sinais discretos, temos

$$\begin{aligned} \langle x_1[n], x_2[n] \rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2[n] \\ &= \sum_{n=0}^3 x_1[n]x_2[n] \\ &= (2 \times 5) + (2a \times (-1)) + (3 \times (-2)) \\ &\quad + (-1 \times 3) \\ \langle x_1[n], x_2[n] \rangle &= 10 - 2a - 6 - 3 \\ &= 1 - 2a \end{aligned}$$

logo $\langle x_1[n], x_2[n] \rangle = 0$ implica que

$$\begin{aligned} 1 - 2a &= 0 \\ a &= 0.5 \end{aligned}$$

- Comecemos por representar $x_2[-n]$. Observe a figura M4.17. As componentes par e ímpar de um sinal $x_2[n]$ são dadas por

$$x_{2p}[n] = \frac{x_2[n] + x_2[-n]}{2}$$

$$x_{2i}[n] = \frac{x_2[n] - x_2[-n]}{2}$$

pele que, a partir das figuras M4.16 e M4.17, resultam os sinais representados respectivamente na figura M4.18 e M4.19.

- Queremos representar o sinal $y[n] = x_1[n/2]$. Podemos simplesmente reconhecer que se operou uma expansão de um factor 2 do sinal

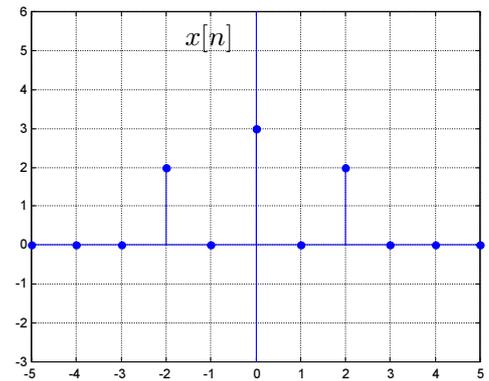


Figura M4.14

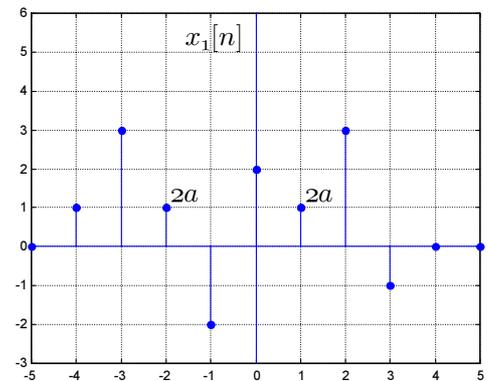


Figura M4.15

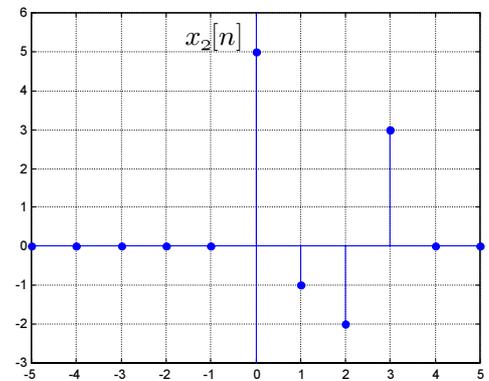


Figura M4.16

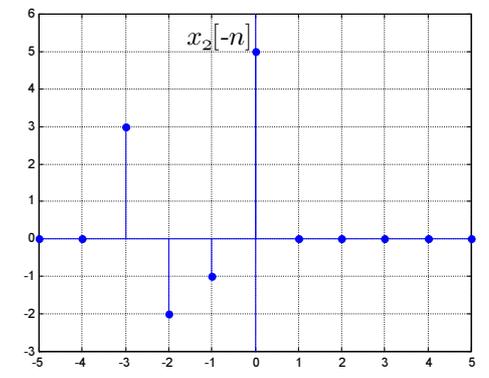


Figura M4.17

$x[n]$ e proceder de imediato à representação do sinal, ou construir previamente a tabela de correspondências

A figura M4.20 mostra $x_1[n/2]$.

n	$y[n] = x_1[n/2]$
-8	$y[-8] = x_1[-4] = 1$
-6	$y[-6] = x_1[-3] = 3$
-4	$y[-4] = x_1[-2] = 1$
...	Etc.

d) A energia do sinal $x_1[n]$ é dada pela expressão

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \sum_{-\infty}^{\infty} x_1^2[n] \\
 &= \sum_{-4}^3 x_1^2[n] \\
 &= 1 + 9 + 1 + 4 + 4 + 1 + 9 + 1 \\
 &= 30
 \end{aligned}$$

Para $x_2[n]$ temos

$$\begin{aligned}
 E_2 &= \sum_0^3 x_2^2[n] \\
 &= 25 + 1 + 4 + 9 = 39
 \end{aligned}$$

e) De forma a que a energia do sinal $x_e[n]$ seja mínima, os coeficientes a_i são calculados pela expressão

$$a_k = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} x[n]x_k[n]}{\sum_{-\infty}^{\infty} x_k^2[n]}$$

Temos então

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{\sum_{-2}^2 x[n]x_1[n]}{E_1} \\
 &= \frac{1}{30} [(2 \times 1) + (3 \times 2) + (2 \times 3)] \\
 &= \frac{14}{30}
 \end{aligned}$$

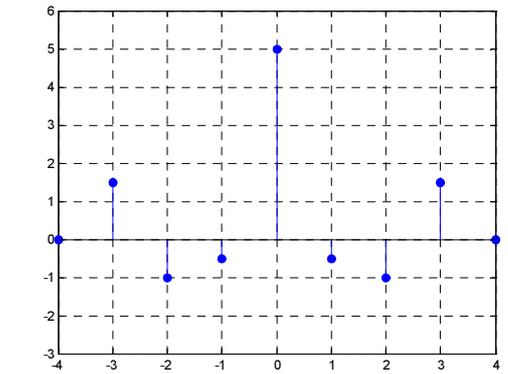


Figura M4.18

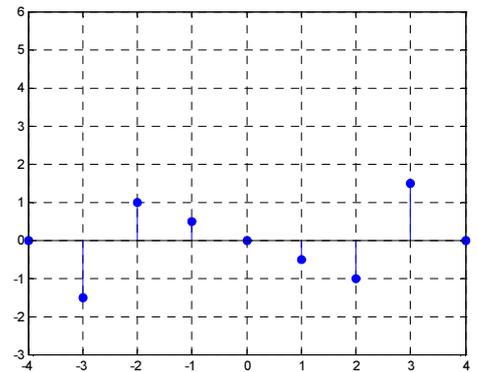


Figura M4.19

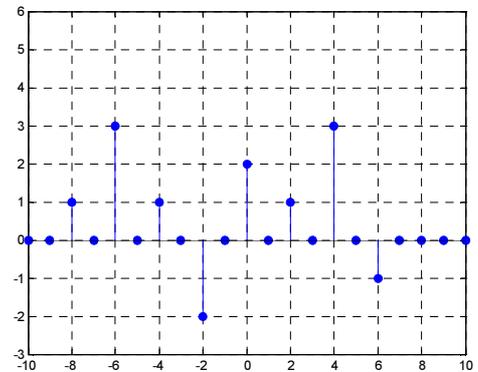
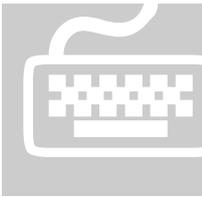


Figura M4.20

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{\sum_0^2 x[n]x_2[n]}{E_2} \\
 &= \frac{1}{39} [(3 \times 5) + (2 \times (-2))] \\
 &= \frac{11}{39}
 \end{aligned}$$



Matlab 4.2

Resolva o Exercício 4.3 recorrendo ao *Matlab*.

a) Para que os sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$ sejam ortogonais é necessário que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2[n] = 0$$

Atendendo aos gráficos temos

```
>> syms a
>> x1=[1 3 2*a -2 2 2*a 3 -1];
>> x2=[0 0 0 0 5 -1 -2 3];
>> x=x1*x2'
x =
    1-2*a
>> a=solve(x)
a =
    1/2
>>
```

Note como $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2[n]$, sendo o produto interno entre os vectores, é simplesmente calculado por $x1*x2'$.

b) Recorrendo à função `function [xp,xi,m] = xp_xi(n,x)` escrita em Ficha M2 Exercício 5 temos de imediato

```
>> n=-1:4;
>> x=[0 5 -1 -2 3 0];
>> [xp,xi,m] = xp_xi(n,x);
>> [xp,xi,m] = xp_xi(n,x)
xp =
    0    1.5   -1.0   -0.5    5.0   -0.5   -1.0    1.5    0
xi =
    0   -1.5    1.0    0.5    0   -0.5   -1.0    1.5    0
m =
   -4   -3   -2   -1    0    1    2    3    4
>> stem(m,xp,'filled');grid on;axis([-4,4,-3,6]);
>> stem(m,xi,'filled');grid on;axis([-4,4,-3,6]);
>>
```

Os gráficos resultantes podem ver-se nas figuras M4.18 e M4.19

c) Recorrendo à função `function [m,y] = transf_n(n,x,a,b)` escrita em Exercícios M2 Exemplo 2 temos de imediato

```
>> n=-5:5;
>> x=[0 1 3 1 -2 2 1 3 -1 0 0];
>> a=0.5;
>> b=0;
>> [m,y] = transf_n(n,x,a,b);
>> stem(m,y,'filled');grid on;axis([-10,10,-3,6]);
>>
```

O gráfico resultante pode ver-se na figura M4.20.

d) Atendendo à definição de energia de um sinal discreto $x[n]$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Resulta de imediato, como se viu no Módulo 2,

```
>> x1=[1 3 1 -2 2 1 3 -1];
>> E1=sum(x1.^2)
E1 =
    30

>> x2=[5 -1 -2 3];
>> E2=sum(x2.^2)
E2 =
    39

>>
```

Note que $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[n]$ corresponde ao produto interno do sinal por ele mesmo, podendo ser simplesmente calculado por

```
>> E1=x1*x1'
E1 =
    30
>> E2=x2*x2'
E2 =
    39
>>
```

e) De forma a que a energia do sinal $x_e[n]$ seja mínima, os coeficientes a_i são calculados pela expressão

$$a_k = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} x[n]x_k[n]}{\sum_{-\infty}^{\infty} x_k^2[n]}$$

Assim

```
>> x= [0 0 2 0 3 0 2 0];
>> x1=[1 3 1 -2 2 1 3 -1];
>> x2=[0 0 0 0 5 -1 -2 3];
>> a1=x*x1'/E1
a1 =
    0.4667
>> a2=x*x2'/E2
a2 =
    0.2821
```

Mais uma vez note que $\sum_{-\infty}^{\infty} x[n]x_k[n]$ corresponde a um produto interno podendo ser calculado simplesmente por $x*x_k'$. Note ainda que o denominador da expressão dos coeficientes corresponde à energia dos sinais de base, pelo que se não repetiu o seu cálculo, feito na alínea anterior.



Exercício 4.3

Considere os seguintes sinais

$$x(t) = 4t\Pi\left(\frac{t-1}{2}\right) - 4\Pi\left(\frac{t-3}{2}\right)$$

$$x_1(t) = \frac{8}{t_o} t\Pi\left(\frac{t-t_o/2}{t_o}\right)$$

$$x_2(t) = 4 \operatorname{sgn}(t-2)\Pi\left(\frac{t-2}{4}\right)$$

- Determine o valor de t_o de modo a que os sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sejam ortogonais.
- Calcule a energia dos sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$.
- Represente as componentes par e ímpar do sinal $x(t)$.
- Calcule os valores dos coeficientes a_1 e a_2 da expressão $x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + x_e(t)$ de forma a que a energia do sinal $x_e(t)$ seja mínima.

A partir das expressões analíticas, comecemos por representar graficamente os sinais. As figuras M4.21 a M4.23 traduzem a evolução dos sinais nos intervalo $[-1, 5]$.

- Para que os sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sejam ortogonais é necessário que o seu produto interno seja nulo. Por definição de produto interno entre sinais contínuos, temos

$$\langle x_1(t), x_2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)dt$$

Vamos começar por admitir 3 situações possíveis: $0 < t_o < 2$, $2 < t_o < 4$, e $t_o > 4$. Para cada uma das situações, o sinal produto $x_1(t)x_2(t)$ tem a forma que se mostra nas figuras M4.24 a M4.26.

É evidente a partir da representação gráfica que o produto interno, correspondente para cada uma das hipóteses à área sob o sinal representado, só pode anular-se para a hipótese $2 < t_o < 4$, já que para $0 < t_o < 2$ a área é totalmente negativa, e para $t_o > 4$ a componente negativa é muito menor que positiva.

Embora desnecessário, vamos ainda assim calcular analiticamente o produto interno para cada uma das três hipóteses.

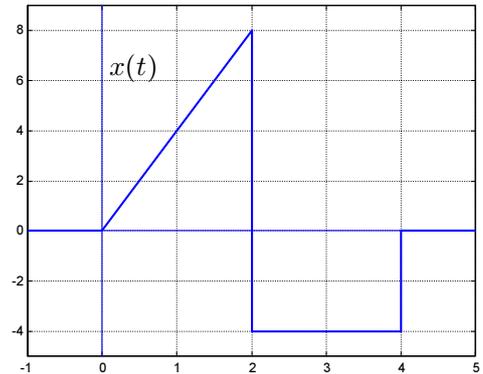


Figura M4.21

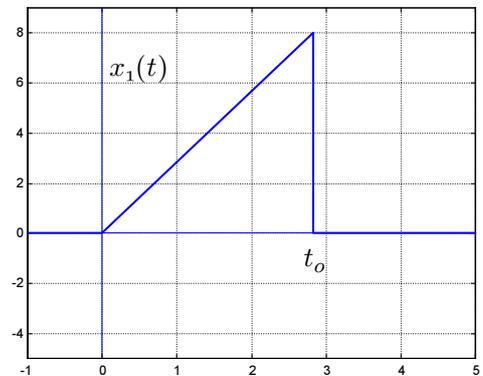


Figura M4.22

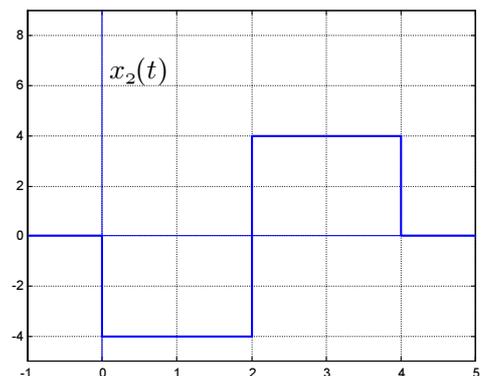


Figura M4.23

1. $0 < t_o < 2$

$$\begin{aligned} \langle x_1(t), x_2(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)dt \\ &= \int_0^{t_o} \frac{8t}{t_o}(-4)dt \\ &= -\frac{32}{t_o} \int_0^{t_o} t dt \\ &= -\frac{32}{t_o} \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^{t_o} \\ &= -16t_o \end{aligned}$$

para que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sejam ortogonais deve ser $16t_o = 0$, não existindo, como previmos, solução.

2. $t_o > 4$

$$\begin{aligned} \langle x_1(t), x_2(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)dt \\ &= \int_0^2 \frac{8t}{t_o}(-4)dt + \int_2^{t_o} \frac{8t}{2t_o}4dt \\ &= \frac{32}{t_o} \left[-\int_0^2 t dt + \int_2^{t_o} t dt \right] \\ &= \frac{32}{t_o} \left[-\left. \frac{t^2}{2} \right|_0^2 + \left. \frac{t^2}{2} \right|_2^{t_o} \right] \\ &= \frac{32}{t_o} (-2 + 8 - 2) \\ &= \frac{128}{t_o} \end{aligned}$$

para que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sejam ortogonais deve ser $128/t_o = 0$, não existindo, como previmos, solução.

3. $2 < t_o < 4$

$$\begin{aligned} \langle x_1(t), x_2(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)dt \\ &= \int_0^2 \frac{8t}{t_o}(-4)dt + \int_2^{t_o} \frac{8t}{t_o}4dt \\ &= \frac{32}{t_o} \left[-\int_0^2 t dt + \int_2^{t_o} t dt \right] \\ &= \frac{32}{t_o} \left[-\left. \frac{t^2}{2} \right|_0^2 + \left. \frac{t^2}{2} \right|_2^{t_o} \right] \\ &= \frac{32}{t_o} \left(-2 + \frac{t_o^2}{2} - 2 \right) \end{aligned}$$

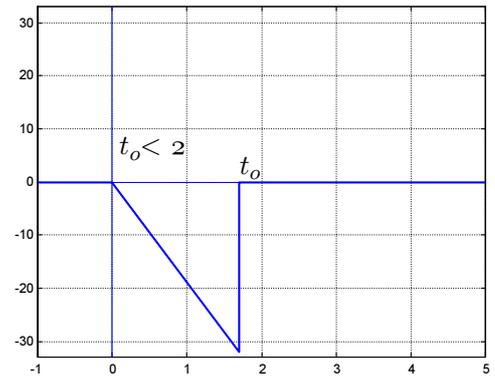


Figura M4.24

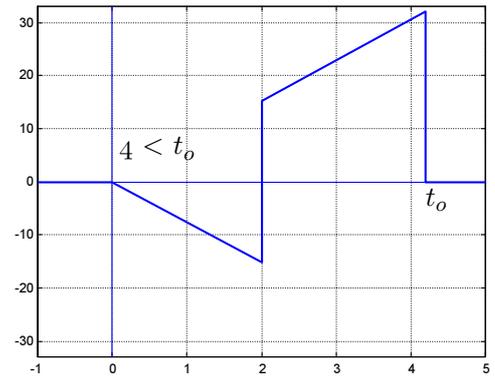


Figura M4.25

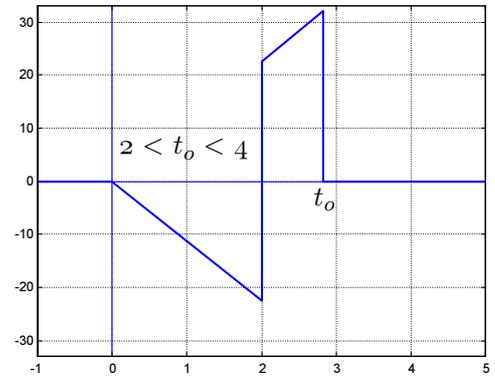


Figura M4.26

para que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sejam ortogonais deve ser

$$\begin{aligned} -2 + \frac{t_o^2}{2} - 2 &= 0 \\ t_o^2 &= 8 \\ t_o &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

b) A energia do sinal $x_1(t)$ é dada pela expressão

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2(t) dt \\ &= \int_0^{t_o} \left(\frac{8t}{t_o}\right)^2 dt \\ &= \frac{64}{t_o^2} \int_0^{t_o} t^2 dt \\ &= \frac{64}{t_o^2} \frac{t^3}{3} \Big|_0^{t_o} \\ &= \frac{64}{3} t_o \\ &= \frac{128}{3} \sqrt{2} \end{aligned}$$

para $x_2(t)$ temos

$$\begin{aligned} E_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_2^2(t) dt \\ &= \int_0^2 (-4)^2 dt + \int_2^4 4^2 dt \\ &= 16 \int_0^4 dt \\ &= 16 t \Big|_0^4 \\ &= 64 \end{aligned}$$

c) Começemos por representar $x(-t)$, o que é trivial a partir da figura M4.21, e se mostra na figura M4.27. As componentes par e ímpar de um sinal contínuo $x(t)$ são dadas por

$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

$$x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

pele que, facilmente a partir das figuras M4.21 e M4.27 resultam os sinais representados nas figuras M4.28 e M4.29.

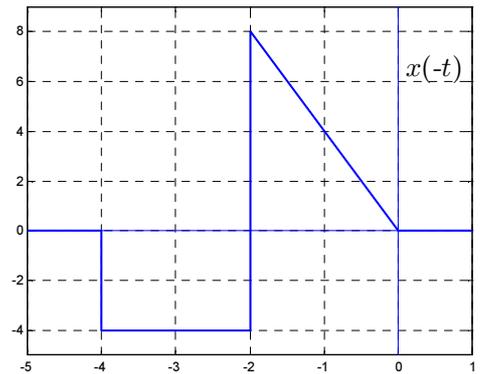


Figura M4.27

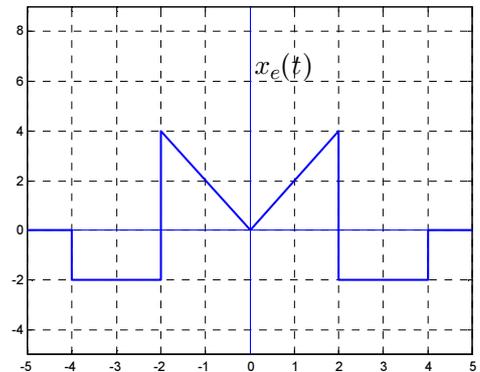


Figura M4.28

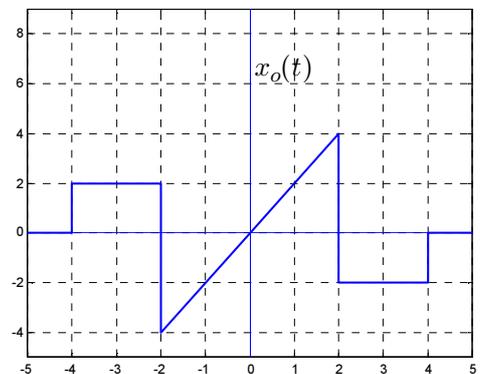


Figura M4.29

d) De forma a que a energia do sinal $x_e(t)$ seja mínima, os coeficientes a_k são calculados pelas expressão

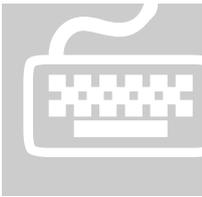
$$a_k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)y_k^*(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} y_k y_k^*(t)dt}$$

Temos então

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\int_0^{t_0} x(t)x_1(t)dt}{\int_0^{t_0} x_1^2(t)dt} \\ &= \frac{\int_0^2 4t \frac{8t}{t_0} dt + \int_2^{t_0} (-4) \frac{8t}{t_0} dt}{E_1} \\ &= \frac{3}{16} \left(\int_0^2 t^2 dt - \int_2^{t_0} t dt \right) \\ &= \frac{3}{16} \left(\left. \frac{t^3}{3} \right|_0^2 - \left. \frac{t^2}{2} \right|_2^{t_0} \right) \\ &= \frac{3}{16} \left(\frac{8}{3} - \frac{t_0^2}{2} + 2 \right) \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{\int_0^4 x(t)x_2(t)dt}{\int_0^4 x_2^2(t)dt} \\ &= \frac{\int_0^2 4t(-4)dt + \int_2^4 (-4)4dt}{E_2} \\ &= -\frac{1}{64} 16 \left(\int_0^2 t dt + \int_2^4 dt \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\left. \frac{t^2}{2} \right|_0^2 + \left. t \right|_2^4 \right) \\ &= -\frac{1}{4} (2 + 4 - 2) \\ &= -1 \end{aligned}$$



Matlab 4.3

Resolva o Exercício 4.3 recorrendo ao *Matlab*.

A partir das expressões analíticas, comecemos por representar graficamente os sinais, recorrendo ao cálculo simbólico.

```

syms t t0
x=sym('4*t*(Heaviside(t)-Heaviside(t-2))-4*(Heaviside(t-2)-Heaviside(t-4))')
x1=sym('8/t0*t*(Heaviside(t)-Heaviside(t-t0))')
x2=sym('(4*(-1+2*Heaviside(t-2)))*(Heaviside(t)-Heaviside(t-4))')

tg=-1:0.01:5;
xg=subs(x,t,tg);
figure(1);plot(tg,xg,'LineWidth',2);
grid on; axis([-1 5 -4.5 8.5])

xg=subs(x1,t,tg);
xg=double(subs(xg,t0,2.9));
figure(2);plot(tg,xg,'LineWidth',2);
grid on; axis([-1 5 -4.5 8.5])

xg=subs(x2,t,tg);
figure(3);plot(tg,xg,'LineWidth',2);
grid on; axis([-1 5 -4.5 8.5])

```

Obtemos assim as figuras M4.21 a M4.23, que traduzem a evolução dos sinais no intervalo $[-1, 5]$ (arbitrou-se $t_0 = 2.9$ com meros objectivos de representação.). A determinação de t_0 a partir das expressões acima definidas para cada um dos sinais é um problema demasiado genérico para que se possa encontrar uma solução por recurso ao cálculo simbólico. Nomeadamente é incontornável o desconhecimento de $\text{Heaviside}(t_0)$. É por isso necessário subdividir o problema nas 3 situações possíveis; $0 < t_0 < 2$, $2 < t_0 < 4$, e $t_0 > 4$, tal como foi feito no Exercício 4.3. Prosseguindo a partir daí temos

1. $0 < t_0 < 2$. Nesta situação $x_1(t)x_2(t) = -4x_1(t)$ pelo que o produto interno resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} -4x_1(t)dt$$

```

int(-4*x1,t,-inf,inf)
ans =
    -16*t0

```

, pelo que não existe possibilidade do produto interno se anular.

2. $t_0 > 4$. Nesta situação resulta para o produto interno

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)dt = \int_0^2 \frac{8t}{t_0}(-4)dt + \int_2^4 \frac{8t}{t_0}4dt$$

```

int(sym('-32*t/t0'),t,0,2)+int(sym('32*t/t0'),2,4)
ans =
    128/t0

```

, pelo que não existe possibilidade do produto interno se anular.

3. $2 < t_0 < 4$. Nesta situação resulta para o produto interno

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)dt = \int_0^2 \frac{8t}{t_0}(-4)dt + \int_2^{t_0} \frac{8t}{t_0}4dt$$

```

r=simplify(int(sym('-32*t/t0'),t,0,2)+int(sym('32*t/t0'),2,t0))
r =
    16*(-8+t0^2)/t0
solve(r)
ans =
    [ 2*2^(1/2)]
    [-2*2^(1/2)]

```

A raiz positiva constitui solução do problemas proposto. Temos então $t_0 = 2\sqrt{2}$.

b) As energias dos sinais são triviais de calcular a partir da definição

```

x1=sym('8/sqrt(8)*t*(Heaviside(t)-Heaviside(t-sqrt(8)))');
x2=sym('(4*(-1+2*Heaviside(t-2)))*(Heaviside(t)-Heaviside(t-4))');
E1=int(x1.^2,-inf,inf)
E1 =
    128/3*2^(1/2)
E2=int(x2.^2,-inf,inf)
E2 =
    64

```

c) A representação das componentes par e ímpar do sinal $x(t)$ é trivial a partir da definição

```

syms t t0
x=sym('4*t*(Heaviside(t)-Heaviside(t-2))-4*(Heaviside(t-2)-Heaviside(t-4))')
xf=subs(x,t,-t);
xp=(x+xf)/2;
xi=(x-xf)/2;

tg=-5:0.01:5;
xg=subs(xp,t,tg);
figure(1);plot(tg,xg,'LineWidth',2);
grid on; axis([-5 5 -4.5 8.5])

xg=subs(xi,t,tg);
figure(2);plot(tg,xg,'LineWidth',2);
grid on; axis([-5 5 -4.5 8.5])

```

Obtemos assim as figuras M4.28 e M4.29.

d) A partir da definição dos coeficientes temos de imediato

```

syms t t0
x=sym('4*t*(Heaviside(t)-Heaviside(t-2))-4*(Heaviside(t-2)-Heaviside(t-4))')
x1=sym('8/sqrt(8)*t*(Heaviside(t)-Heaviside(t-sqrt(8)))');
x2=sym('(4*(-1+2*Heaviside(t-2)))*(Heaviside(t)-Heaviside(t-4))');

a1=int(x*x1,t,-inf,inf)/E1
a1 =
    1/8
a2=int(x*x2,t,-inf,inf)/E2
a2 =
    -1

```

Note a utilização dos valores da energia calculados na alínea anterior.



Demo 1: Ortogonalidade entre senos

É fácil demonstrar que os sinais $\text{sen}(n\omega_0 t)$ e $\text{sen}(m\omega_0 t)$, com n e m inteiros e diferentes entre si, são ortogonais em qualquer intervalo $[t_1, t_1 + 2\pi/\omega_0]$.

Para que dois sinais, $y_1(t)$ e $y_2(t)$, sejam ortogonais no intervalo $[t_1, t_2]$ o seu produto interno deve ser nulo

$$\int_{t_1}^{t_2} y_1(t)y_2(t)dt = 0$$

Devemos ter então

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_1}^{t_1+2\pi/\omega} \text{sen}(n\omega_0 t) \text{sen}(m\omega_0 t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_1+2\pi/\omega} \cos((n-m)\omega_0 t) - \cos((n+m)\omega_0 t) dt \\ &= \frac{1}{2\omega_0} \left[\frac{1}{n-m} \text{sen}((n-m)\omega_0 t) - \frac{1}{n+m} \text{sen}((n+m)\omega_0 t) \right]_{t_1}^{t_1+2\pi/\omega_0} \end{aligned}$$

É desnecessário desenvolver a expressão para verificar que é nula. Como n e m são inteiros, então $n-m$ e $n+m$ também o são, pelo que o valor dos senos em ambos os limites de integração é igual, já que é calculado em $k\omega t_0$ e $k\omega t_0 + 2k\pi$, anulando-se mutuamente.

Concluimos assim que as funções $\text{sen}(n\omega_0 t)$ e $\text{sen}(m\omega_0 t)$, com n e m inteiros, e diferente entre si, são ortogonais em qualquer intervalo $[t_1, t_1 + 2\pi/\omega_0]$.



Apêndice 1: Espaço de vectores

Considere os vectores representados na figura M4.30. Como \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_3 são colineares, qualquer deles pode ser especificado exactamente em função do outro. Por exemplo, especificando \mathbf{V}_1 em função de \mathbf{V}_3 , podemos escrever

$$\mathbf{V}_1 = a\mathbf{V}_3$$

, em que a é um coeficiente real que pode ser calculado se forem conhecidos os módulos dos vectores \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_3

$$a = \frac{|\mathbf{V}_1|}{|\mathbf{V}_3|}$$

Se os dois vectores fossem iguais seria $a = 1$. Sendo diferentes, a afasta-se tanto mais da unidade quanto mais \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_3 se diferenciarem. Neste sentido podemos dizer que o coeficiente a é uma **medida de semelhança** entre os dois vectores.

Considere os vectores \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 . Temos agora uma situação mais geral de dois vectores não colineares. Podemos ainda assim exprimir um em função do outro

$$\mathbf{V}_1 = a\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_e$$

A solução não é única. Observe a figura M4.31. Podemos escrever quaisquer das três relações

$$\mathbf{V}_1 = a\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_{e1}$$

$$\mathbf{V}_1 = b\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_{e2}$$

$$\mathbf{V}_1 = c\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_{e3}$$

É óbvio da figura M4.31, e poder-se-ia demonstrar analiticamente, que a primeira das relações, em que \mathbf{V}_{e1} é perpendicular a \mathbf{V}_2 , corresponde à situação em que o vector \mathbf{V}_{e1} tem o menor módulo.

Interpretando o vector \mathbf{V}_{e1} como o erro cometido quando pretendemos representar o vector \mathbf{V}_1 em função do vector \mathbf{V}_2 , passaremos a designá-lo por **vector de erro**. Podemos concluir que na representação de um vector, \mathbf{V}_1 , através de outro, \mathbf{V}_2 , devemos, de modo a minimizar o erro cometido, decompor \mathbf{V}_1 em duas componentes: uma perpendicular a \mathbf{V}_2 , que constitui o vector de erro; e outra segundo a direcção de \mathbf{V}_2 , que, por isso mesmo, é designada por **componente do primeiro vector segundo a direcção do segundo**.

$$\mathbf{V}_1 = a\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_e$$

Observe a figura M4.32. Quanto menor for o vector de erro, maior será a componente do primeiro vector segundo a direcção do segundo vector, mais se assemelhando os dois vectores.

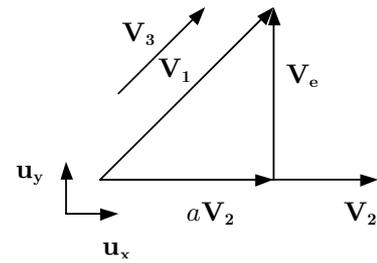


Figura M4.30

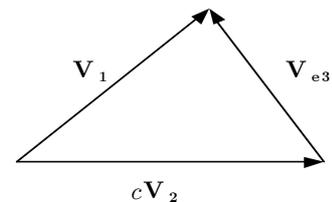
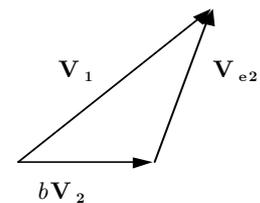
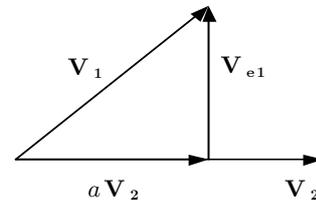


Figura M4.31

Se os vectores forem ortogonais a projecção de um sobre o outro é nula. O coeficiente de semelhança entre eles é nulo, $a = 0$, não podendo um ser representado em função do outro. Sendo θ o ângulo entre os dois vectores, podemos escrever

$$\cos(\theta) = \frac{|a\mathbf{V}_2|}{|\mathbf{V}_1|}, \quad \text{sen}(\theta) = \frac{|\mathbf{V}_e|}{|\mathbf{V}_1|}$$

, logo, a componente de um vector segundo outro pode ser expressa em função do ângulo entre os dois vectores

$$|a\mathbf{V}_2| = |\mathbf{V}_1| \cos(\theta)$$

Ficando claro que no caso em que os dois vectores não são colineares o coeficiente de semelhança entre eles, para além da relação entre os módulos depende também do ângulo por eles formado

$$a = \frac{|\mathbf{V}_1|}{|\mathbf{V}_2|} \cos(\theta)$$

Recorde da cadeira de Análise Vectorial que se define o **produto interno entre dois vectores**, \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 , como

$$\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = |\mathbf{V}_1| |\mathbf{V}_2| \cos(\theta)$$

, em que θ é o ângulo entre os dois vectores. Assim sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 &= a |\mathbf{V}_2| |\mathbf{V}_2| \\ &= a \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2 \end{aligned}$$

, pelo que podemos escrever o coeficiente de semelhança entre os dois vectores na forma

$$a = \frac{\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2} \quad (1)$$

Considere a figura M4.34. Os vectores \mathbf{u}_x e \mathbf{u}_y nela representados, por serem um conjunto de vectores ortogonais de cardinal igual à dimensão do espaço, diz-se um **espaço vectorial ortogonal**.

Qualquer vector em \mathcal{R}^2 pode ser representado em função destes dois vectores. Por exemplo, para o vector \mathbf{V}_1 será

$$\mathbf{V}_1 = V_{1x} \mathbf{u}_x + V_{1y} \mathbf{u}_y$$

em que $V_{1x} \mathbf{u}_x$ e $V_{1y} \mathbf{u}_y$ são as componentes do vector \mathbf{V}_1 segundo \mathbf{u}_x e \mathbf{u}_y respectivamente.

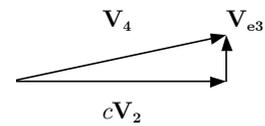
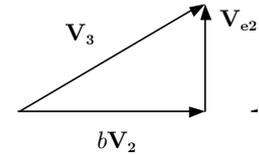
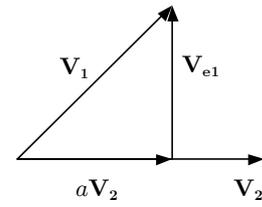


Figura M4.32

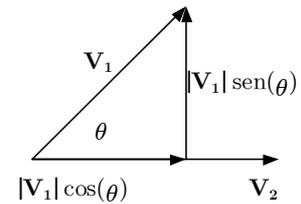


Figura M4.33

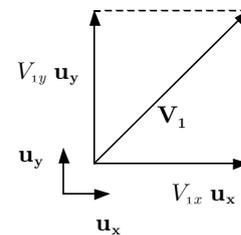


Figura M4.34

Como vimos

$$V_{1x} = \frac{\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{u}_x}{\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x}$$

e

$$V_{2x} = \frac{\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{u}_y}{\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_y}$$

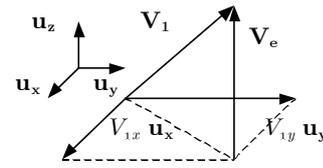


Figura M4.35

Porque \mathbf{u}_x e \mathbf{u}_y podem representar qualquer vector em \mathcal{R}^2 , o espaço vectorial por eles definido diz-se um **espaço vectorial completo**.

Admita agora que \mathbf{V}_1 não pertencia ao espaço definido por \mathbf{u}_x e \mathbf{u}_y , conforme se exemplifica na figura M4.35. Nesta situação \mathbf{V}_1 só poderia ser definido em função de \mathbf{u}_x e \mathbf{u}_y a menos de um vector de erro

$$\mathbf{V}_1 = V_{1x} \mathbf{u}_x + V_{1y} \mathbf{u}_y + \mathbf{V}_e$$

Para obter-mos um espaço vectorial completo seria necessário um outro vector, perpendicular aos dois primeiros, \mathbf{u}_z ,

$$\mathbf{V}_1 = V_{1x} \mathbf{u}_x + V_{1y} \mathbf{u}_y + V_{1z} \mathbf{u}_z$$

com

$$V_{1z} = \frac{\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{u}_z}{\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z}$$

Generalizando a um espaço n-dimensional, podemos dizer que, dado um espaço vectorial ortogonal completo $\{\mathbf{u}_m\}$, com $m = 1, 2, \dots, n$

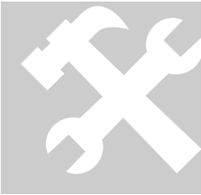
$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ |\mathbf{u}_i|^2 & , i = j \end{cases}$$

, qualquer vector, \mathbf{V} , pode ser representado neste espaço

$$\mathbf{V} = V_1 \mathbf{u}_1 + V_2 \mathbf{u}_2 + \dots + V_n \mathbf{u}_n$$

sendo

$$V_i = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i}$$



Apêndice 2: Espaço de sinais

Considere dois sinais reais, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, e admita que quer exprimir $x_1(t)$ em função de $x_2(t)$ num intervalo $[t_1, t_2]$ através duma relação do tipo

$$x_1(t) = ax_2(t) + x_e(t)$$

de modo a que o sinal $ax_2(t)$ seja **o mais semelhante possível** a $x_1(t)$, ou seja, de modo a cometer o menor erro possível. Por analogia com o espaço de vectores podemos dizer que procuramos o **sinal colinear** com $x_1(t)$ que melhor o aproxima. Sendo a **função de erro**

$$x_e(t) = x_1(t) - ax_2(t)$$

um critério para minimizar o erro cometido pela aproximação no intervalo $[t_1, t_2]$ seria o de minimizar o erro médio cometido nesse intervalo

$$C = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x_e(t) dt$$

Na medida em que esta função pretende medir o custo da aproximação, no sentido em que o seu valor deverá ser tanto maior quanto maior for o erro cometido na aproximação, e portanto maior o prejuízo (custo) de se fazer a aproximação, vamos chamar-lhe **função de custo**. Acontece que a função de custo **erro médio** não é uma boa função de custo dado que os erros positivos cometidos pela aproximação no intervalo $[t_1, t_2]$ contribuirão para atenuar os erros negativos, resultando num valor final do custo que não traduz a desadequação da aproximação escolhida. De modo a evitar esta situação podemos, por exemplo, avaliar o quadrado da função de erro, utilizando como função de custo a função **erro quadrático médio**

$$C = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (x_e(t))^2 dt$$

Note que o que vamos fazer é minimizar a potência média do erro no intervalo $[t_1, t_2]$. Vamos então procurar o coeficiente de semelhança entre as duas funções a aproximar que minimiza o erro quadrático médio

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (x_e(t))^2 dt \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (x_1(t) - ax_2(t))^2 dt \end{aligned}$$

Sendo que

$$\frac{dC}{da} = 0$$

implica

$$\frac{d}{da} \left(\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [x_1(t) - ax_2(t)]^2 dt \right) = 0$$

ou seja

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{da} [x_1(t) - ax_2(t)]^2 dt &= 0 \\ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{da} (x_1^2(t) + a^2 x_2^2(t) - 2ax_1(t)x_2(t)) dt &= 0 \\ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (2ax_2^2(t) - 2x_1(t)x_2(t)) dt &= 0 \\ \frac{2}{t_2 - t_1} \left[a \int_{t_1}^{t_2} x_2^2(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} x_1(t)x_2(t) dt \right] &= 0 \end{aligned}$$

então o **coeficiente de semelhança óptimo**, segundo um critério de minimização do erro quadrático médio, é

$$a = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x_1(t)x_2(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} x_2^2(t) dt}$$

Por analogia com a equação (1) obtida para os vectores

$$a = \frac{\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2}$$

definimos o **produto interno entre dois sinais** $x_1(t)$ e $x_2(t)$, no intervalo $[t_1, t_2]$, como

$$\langle x_1(t), x_2(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x_1(t)x_2(t) dt$$

Resulta ainda por analogia, que dois sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são **sinais ortogonais**, no intervalo $[t_1, t_2]$, se

$$\int_{t_1}^{t_2} x_1(t)x_2(t) dt = 0$$

Facilmente se deduziria que para o caso de dois sinais discretos, $x_1[n]$ e $x_2[n]$, o coeficiente de semelhança óptimo, segundo um critério de minimização do erro quadrático médio, no intervalo $[n_1, n_2]$, é

$$a = \frac{\sum_{n_1}^{n_2} x_1[n]x_2[n]}{\sum_{n_1}^{n_2} x_2^2[n]}$$

sendo o produto interno, no intervalo $[n_1, n_2]$, definido por

$$\langle x_1[n], x_2[n] \rangle = \sum_{n_1}^{n_2} x_1[n]x_2[n]$$

Prossigamos com a analogia entre vectores e sinais. Uma vez que está definido o produto interno entre sinais, podemos agora definir um **espaço de sinais ortogonal**. Considere-se um conjunto de n sinais ortogonais $\{y_k(t)\}$, com $k = 1, 2, \dots, n$, num intervalo $[t_1, t_2]$

$$\langle y_i(t), y_j(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} y_i(t) y_j(t) dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ m_i & i = j \end{cases}$$

Para termos a garantia que qualquer sinal $x(t)$ pode ser representado neste espaço este deve ser completo, ou seja, não poderá existir nenhum sinal $y_o(t)$ tal que

$$\int_{t_1}^{t_2} y_o(t) y_m(t) dt = 0 \quad , m = 1, 2, \dots, n$$

dado que se tal se verificar $y_o(t)$ é ortogonal a todos os sinais do conjunto $\{y_k(t)\}$ e portanto deverá também ser considerado um elemento do conjunto. De qualquer modo, é sempre possível representar $x(t)$ a menos de um sinal de erro

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + \dots + a_n y_n(t) + x_e(t) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k y_k(t) + x_e(t) \end{aligned}$$

Minimizando o erro quadrático médio num intervalo $[t_1, t_2]$

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \left(\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[x(t) - \sum_{k=1}^n a_k y_k(t) \right]^2 dt \right) = 0$$

resulta,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_k} \left(\int_{t_1}^{t_2} \left[x(t) - \sum_{k=1}^n a_k y_k(t) \right]^2 dt \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial a_k} \left(\int_{t_1}^{t_2} \left[x^2(t) + \left(\sum_{k=1}^n a_k y_k(t) \right)^2 - 2x(t) \sum_{k=1}^n a_k y_k(t) \right] dt \right) &= 0 \end{aligned}$$

Dado que todas as derivadas parciais em ordem a a_k de todos os termos que não dependerem deste coeficiente são nulos, e todos os integrais de produtos cruzados de sinais de base de diferentes índices, já que por definição os sinais são ortogonais, são igualmente nulos, resulta simplesmente

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \left(\int_{t_1}^{t_2} \left[a_k^2 y_k^2(t) - 2x(t) a_k y_k(t) \right] dt \right) = 0$$

pelo que **os coeficientes ótimos, no sentido da minimização do erro quadrático médio, são dados por**

$$a_k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) y_k(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} y_k^2(t) dt}$$

Admitido que o espaço de sinais $\{y_k(t)\}$ é normado, isto é, que

$$\int_{t_1}^{t_2} y_k^2(t) dt = m_k = 1$$

resulta simplesmente

$$\begin{aligned} a_k &= \int_{t_1}^{t_2} x(t)y_k(t)dt \\ &= \langle x(t), y_k(t) \rangle \end{aligned}$$

Para os coeficientes óptimos o erro quadrático médio é

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[x(t) - \sum_{i=1}^n a_i y_i(t) \right]^2 dt \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[x^2(t) + \left(\sum_{i=1}^n a_i y_i(t) \right)^2 - 2x(t) \sum_{i=1}^n a_i y_i(t) \right] dt \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n a_i y_i(t) \right)^2 dt - \int_{t_1}^{t_2} 2x(t) \sum_{i=1}^n a_i y_i(t) dt \right] \end{aligned}$$

atendendo novamente à ortogonalidade dos sinais de base, e substituindo os coeficientes pelo seu valor óptimo, resulta simplesmente

$$C = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt - \sum_{k=1}^n a_k^2 m_k \right] \quad (6)$$

Podemos considerar duas situações em que o erro se anula.

1. Se o espaço de sinais for completo então o sinal é completamente representável por uma combinação linear dos sinais de base

$$x(t) = \sum_{k=1}^n a_k y_k(t)$$

resulta então de (6) que

$$\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = \sum_{k=1}^n a_k^2 m_k$$

que para o caso do espaço ser normado é simplesmente

$$\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = \sum_{k=1}^n a_k^2$$

ou seja

$$\|x(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$$

2. Se aumentarmos indefinidamente o número de termos do somatório em (6) este poderá convergir para o integral

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 m_k = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt$$

Diz-se nesta situação que a série **converge em média**. O sinal é então completamente representável pela série infinita

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k(t)$$

Na situação mais geral em que os sinais sejam complexos, há que ter o devido cuidado no desenvolvimento analítico. Resumem-se seguidamente os resultados que se alcançariam.

Por analogia com o espaço de vectores, definimos o produto interno entre sinais num intervalo $[t_1, t_2]$, como

$$\langle x_1(t), x_2(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x_1(t) x_2^*(t) dt$$

Considere-se um conjunto de n sinais ortogonais complexos $\{y_k(t)\}$, com $k = 1, 2, \dots, n$, num intervalo $[t_1, t_2]$

$$\langle y_i(t), y_j(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} y_i(t) y_j^*(t) dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ m_i & i = j \end{cases}$$

Este espaço ortogonal de sinais diz-se completo se não existir nenhum sinal $y_k(t)$ tal que

$$\int_{t_1}^{t_2} y_k(t) y_m^*(t) dt = 0 \quad , m = 1, 2, \dots, n$$

Qualquer sinal $x(t)$ é representável neste espaço a menos de um erro

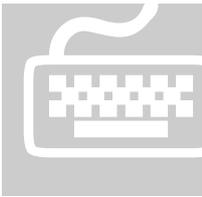
$$x(t) = \sum_{k=1}^n a_k y_k(t) + x_e(t)$$

em que os coeficientes óptimos, no sentido da minimização do erro quadrático médio, são dados por

$$a_k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) y_k^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} y_k y_k^*(t) dt}$$

Se o espaço for normado e completo, então

$$\|x(t)\|^2 = \sum_{k=1}^n a_k a_k^*$$



Exercícios M4

Exemplo 1

Considere os seguintes sinais

$$x_1[n] = -2\delta[n+2] - 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2]$$

$$x_2[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1]$$

$$x[n] = -\delta[n+2] + 2\delta[n] + \delta[n-1]$$

- Represente os sinais.
- Verifique se os sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$ são ortogonais.
- Calcule a energia dos sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$.
- Represente as componentes par e ímpar do sinal $x[n]$.
- Determine os valores dos coeficientes a_1 e a_2 da expressão $x[n] = a_1x_1[n] + a_2x_2[n] + x_e[n]$ de forma a que a energia do sinal $x_e[n]$ seja mínima.
- Calcule a energia do erro $x_e[n]$ nas condições da alínea anterior.
- Represente $x_1[2n-6]$.

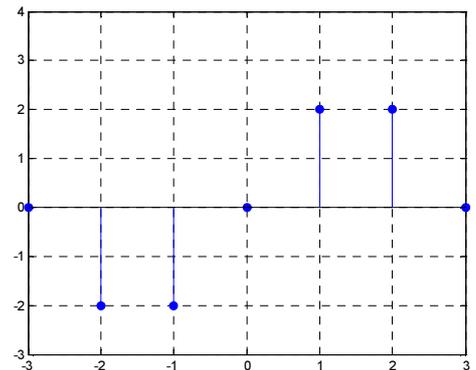


Figura M4.36

- A partir da representação analítica temos

```
n = [-3 -2 -1 0 1 2 3];
x1 = [ 0 -2 -2 0 2 2 0];
x2 = [ 0 0 1 2 1 0 0];
x = [ 0 -1 0 2 1 0 0];

figure(1); stem(n, x1, 'filled')
grid on; axis([-3 3 -3 4])
figure(2); stem(n, x2, 'filled')
grid on; axis([-3 3 -3 4])
figure(3); stem(n, x, 'filled')
grid on; axis([-3 3 -3 4])
```

Os sinais mostram-se nas figuras M4.36 a M4.38

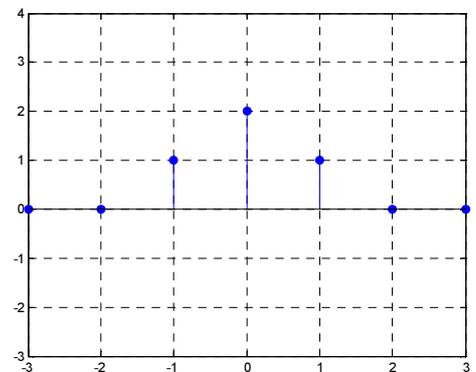


Figura M4.37

- Atendendo à definição deve ser

$$\sum_{n_1}^{n_2} x_1[n]x_2^*[n] = 0$$

podemos verificar que o produto interno é nulo

```
>> x1*x2'
ans =
    0
```

- A partir da definição

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

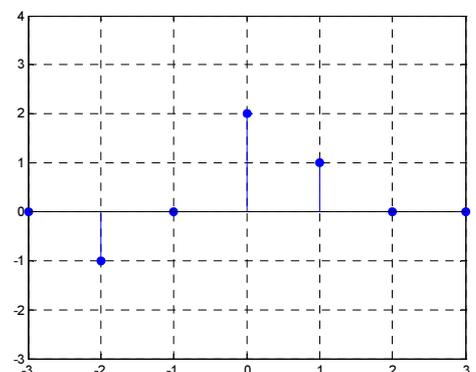


Figura M4.38

, a energia dos sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$ é

```
>> E1=x1*x1'
E1 =
    16
>> E2=x2*x2'
E2 =
     6
```

d) Recorrendo à função `function [xp,xi,m] = xp_xi(n,x)` escrita em Ficha M2 Exercício 5 temos de imediato

```
[xp,xi,m] = xp_xi(n,x);

figure(4);stem(m,xp,'filled');
grid on; axis([-3 3 -3 4])
figure(5);stem(m,xi,'filled');
grid on; axis([-3 3 -3 4])
```

Os gráficos resultantes podem ver-se nas figuras M4.39 e M4.40

e) De forma a que a energia do sinal $x_e[n]$ seja mínima, os coeficientes a_k são calculados pela expressão

$$a_k = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} x[n]x_k[n]}{\sum_{-\infty}^{\infty} x_k^2[n]}$$

Assim

```
>> a1=x*x1'/E1
a1 =
    0.2500
>> a2=x*x2'/E2
a2 =
    0.8333
```

f) Sendo $x_e[n] = x[n] - (a_1x_1[n] + a_2x_2[n])$ temos

```
>> xa=a1*x1+a2*x2;
>> xe=x-xa;
>> Ee=xe*xe'
Ee =
    0.8333
```

c) Recorrendo à função `function [m,y] = transf_n(n,x,a,b)` escrita em Exercícios M2 Exemplo 2 temos de imediato

```
[m,y] = transf_n(n,x1,2,6)
figure(6);stem(m,y,'filled');
grid on; axis([0 6 -3 4])
```

O gráfico resultante pode ver-se na figura M4.41.

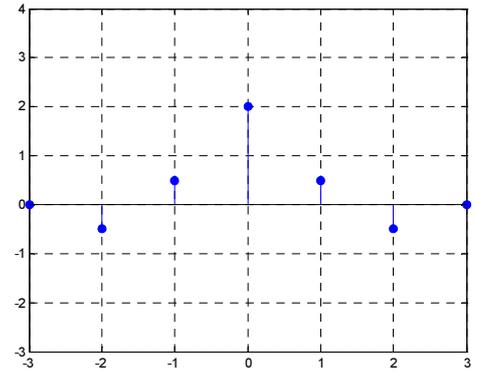


Figura M4.39

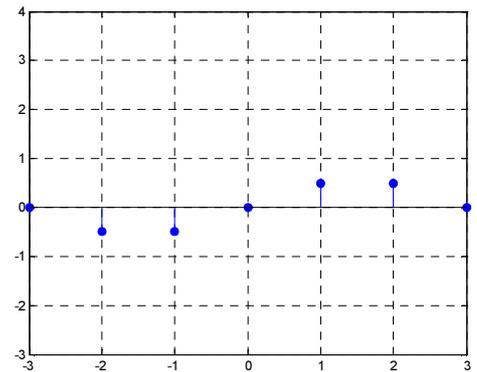


Figura M4.40

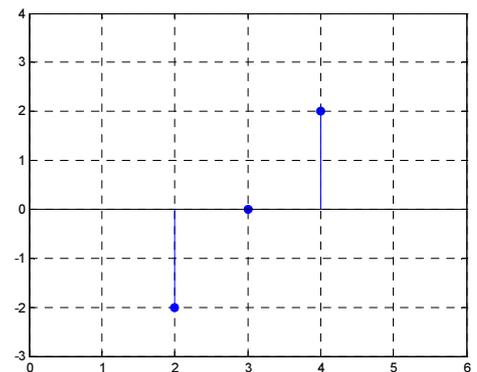


Figura M4.41

Exemplo 2

Considere os seguintes sinais

$$x_1[n] = \sum_{k=0}^2 2\delta[n-4-k]$$

$$x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^3 m\delta[n-m-10k]$$

- Represente os sinais.
- Verifique se os sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$ são ortogonais.
- Determine a energia dos sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$.
- Represente as componentes par e ímpar do sinal $x_2[n]$.
- Represente o sinal $x_2[2n-5]$

a) A simplicidade dos sinais permite a sua representação a partir de uma conveniente interpretação das expressões analíticas, não justificando a escrita de um código de representação sistemático que seria necessariamente mais complexo. Assim o primeiro sinal é obviamente constituído por 3 impulsos unitários (resultantes de $k = [0, 1, 2]$), situados em $n = 4, 5, 6$, todos de amplitude 2, ou seja, da expansão do somatório resulta

$$x_1[n] = 2\delta[n-4] + 2\delta[n-5] + 2\delta[n-6]$$

O segundo sinal tem um somatório interior de cuja expansão (para $k = 0$) resulta

$$x_{02}[n] = 0\delta[n] + 1\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 3\delta[n-3]$$

Da expansão do somatório exterior resulta a repetição periódica deste sinal, com $N = 10$, havendo uma réplica, para $k = 1$

$$x_{12}[n] = 0\delta[n-10] + 1\delta[n-11] + 2\delta[n-12] + 3\delta[n-13]$$

etc.

Assim, podemos, por exemplo, escrever

```
N=10;
n=-2*N:2*N-1;
x1=[zeros(1,2*N+4) 2 2 2 zeros(1,2*N-7)];
figure(1);stem(n,x1,'filled')
grid on
axis([-2*N 2*N -2 4])
xb=[0 1 2 3 zeros(1,N-4)];
x2=[xb xb xb xb];
figure(2);stem(n,x2,'filled')
grid on
axis([-2*N 2*N -2 4])
```

De onde resultam as figuras M4.42 e M4.43 que traduzem o comportamento dos sinais no intervalo $n = [-20, 20[$.

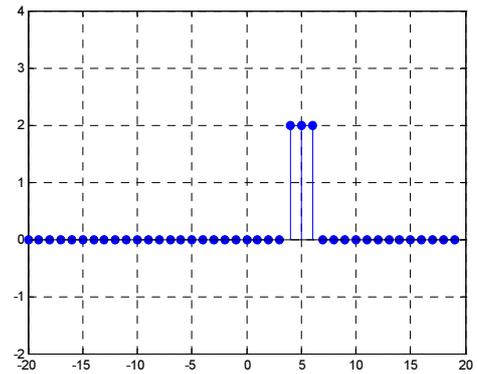


Figura M4.42

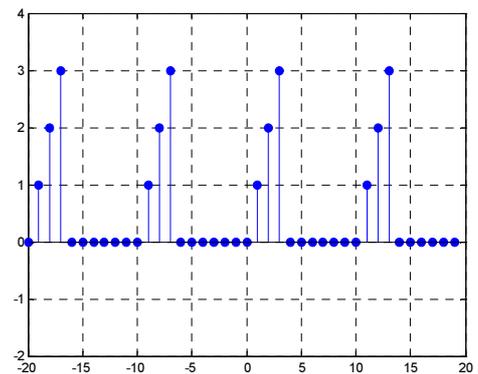


Figura M4.43

b) A conclusão de que os sinais são ortogonais é imediata uma vez que qualquer deles é nulo nos pontos em que o outro toma valores não nulos. Ainda assim, e atendendo à definição

$$\sum_{n_1}^{n_2} x_1[n]x_2^*[n] = 0$$

podemos verificar que o produto interno é nulo

```
x1*x2'
ans =
    0
```

c) A partir da definição

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

, a energia do sinal $x_1(t)$ é

```
E1=x1*x1'
E1 =
    12
```

Sendo um sinal periódico, a energia do sinal $x_2(t)$ é infinita.

d) Recorrendo à função `function [xp,xi,m] = xp_xi(n,x)` escrita em Ficha M2 Exercício 5 temos de imediato

```
[xp,xi,m] = xp_xi(n,x2);
figure(3);stem(m,xp,'filled');
grid on; axis([-2*N 2*N -2 4])
figure(4);stem(m,xi,'filled');
grid on; axis([-2*N 2*N -2 4])
```

Os gráficos resultantes podem ver-se nas figuras M4.44 e M4.45

c) Recorrendo à função `function [m,y] = transf_n(n,x,a,b)` escrita em Exercícios M2 Exemplo 2 temos de imediato

```
[m,y] = transf_n(n,x2,2,5)
figure(5);stem(m,y,'filled');
grid on;
axis([min(m) max(m) -2 4])
```

O gráfico resultante pode ver-se na figura M4.46.

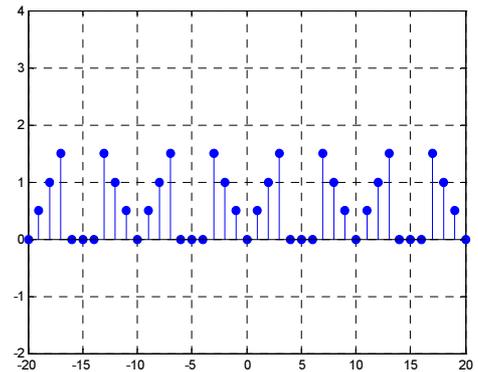


Figura M4.44

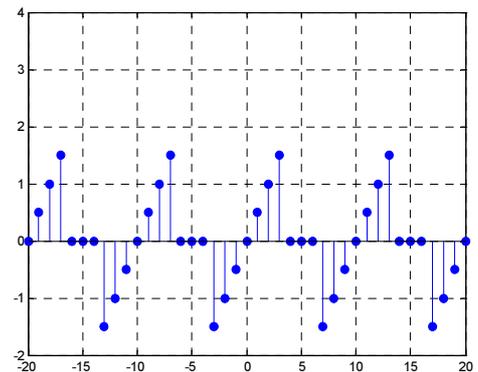


Figura M4.45

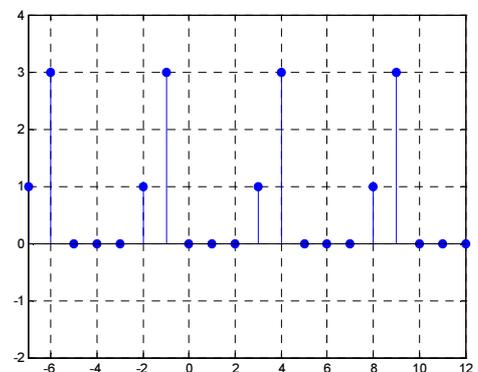


Figura M4.46

Exemplo 3

Considere os sinais

$$x(t) = 10t \Pi\left(\frac{t-1.5}{3}\right)$$

$$y(t) = 5 \operatorname{sgn}(t-1.5) \Pi\left(\frac{t-1.5}{3}\right)$$

- Represente os sinais.
- Determine as componentes par e ímpar do sinal $y(t)$.
- Calcule a energia dos sinais $y_p(t)$ e $y_i(t)$.
- Determine os valores dos coeficientes a_1 e a_2 da expressão $x(t) = a_1 y_p(t) + a_2 y_i(t) + x_e(t)$ de forma a que a energia do sinal $x_e(t)$ seja mínima.

- A partir das expressões analíticas dos sinais $x(t)$ e $y(t)$, e recorrendo ao cálculo simbólico

```
syms t t0
x=sym('10*t*(Heaviside(t)-Heaviside(t-3))')
y=sym('5*(-1+2*Heaviside(t-1.5))*(Heaviside(t)-Heaviside(t-3))')

tg=-1:0.01:5;
xg=subs(x,t,tg);
figure(1);plot(tg,xg,'LineWidth',2);
grid on; axis([-1 5 -1 31])

xg=subs(y,t,tg);
xg=double(subs(xg,t0,2.9));
figure(2);plot(tg,xg,'LineWidth',2);
grid on; axis([-1 5 -6 6])
```

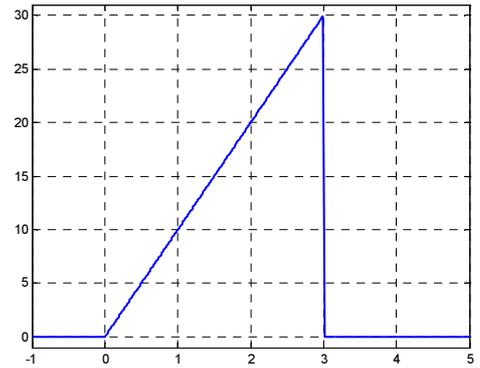


Figura M4.47

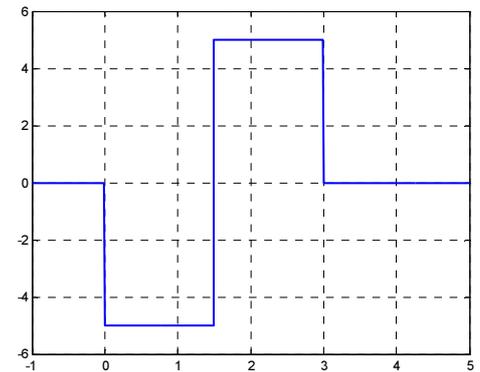


Figura M4.48

Obtemos as figuras M4.47 a M4.48, que mostram a evolução dos sinais no intervalo $[-1, 5]$

- A representação das componentes par e ímpar do sinal $y(t)$, a partir da definição

$$y_p(t) = \frac{y(t) + y(-t)}{2}$$

$$y_i(t) = \frac{y(t) - y(-t)}{2}$$

, é imediata

```
yf=subs(y,t,-t);
yp=(y+yf)/2;
yi=(y-yf)/2;

tg=-5:0.01:5;
yg=subs(yp,t,tg);
figure(3);plot(tg,yg,'LineWidth',2);
grid on; axis([-5 5 -6 6])

yg=subs(yi,t,tg);
figure(4);plot(tg,yg,'LineWidth',2);
grid on; axis([-5 5 -6 6])
```

Obtemos assim as figuras M4.49 e M4.50.

c) A partir da definição

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt$$

, as energias dos sinais são triviais de calcular

```
Ep=double(int(yp.^2,-inf,inf))
Ep =
    37.5000
Ei=double(int(yi.^2,-inf,inf))
Ei =
    37.5000
```

d) A partir da definição dos coeficientes

$$a_k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)y_k^*(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} y_k y_k^*(t)dt}$$

, temos de imediato

```
a1=double(int(x*yp,t,-inf,inf)/Ep)
a1 =
    1.5000
a2=double(int(x*yi,t,-inf,inf)/Ei)
a2 =
    1.5000
```

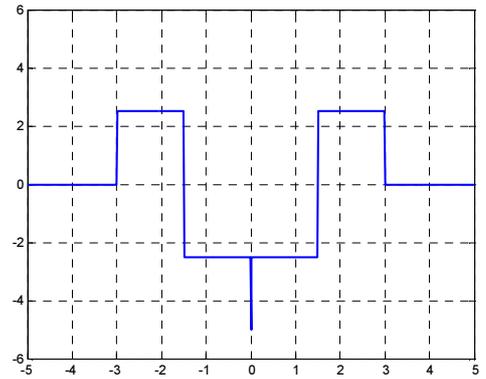


Figura M4.49

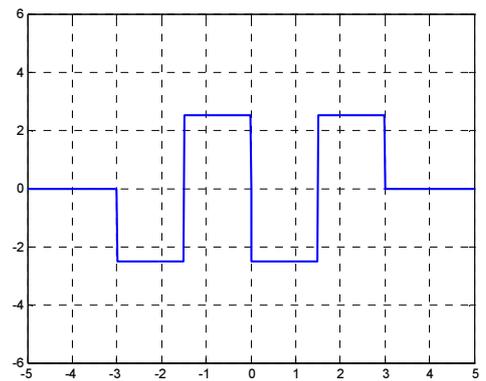


Figura M4.50



Ficha de Avaliação M4

N: Nome: Turma:

Data limite de entrega 21-04-2003

(A ficha deve ser colocada, até à data limite, no recipiente apropriado existente junto ao Gabinete C - CEDET)

Grupo C

Exercício 1

Considere os seguintes sinais

$$x_1[n] = \sum_{k=-2}^2 k \delta[n-k]$$

$$x_2[n] = \sum_{k=-2}^2 \delta[n-k]$$

$$x[n] = \sum_{k=-2}^2 (1-2k) \delta[n-k]$$

- Represente os sinais.
- Verifique se os sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$ são ortogonais.
- Calcule e represente as componentes par e ímpar do sinal $x[n]$.
- Determine os valores dos coeficientes a_1 e a_2 da expressão $x[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + x_e[n]$ de forma a que a energia do sinal $x_e[n]$ seja mínima.
- Represente o sinal $x[3n-4]$
- Calcule e represente a convolução entre os sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$.

Grupo B

Exercício 2

Considere os seguintes sinais

$$x(t) = 4t \left(\Pi \left(\frac{t-a/2}{a} \right) - \Pi \left(\frac{t-(3+a)/2}{3-a} \right) \right)$$

$$x_1(t) = 10t \Pi \left(\frac{t-1.5}{3} \right)$$

$$x_2(t) = 5 \operatorname{sgn}(t-a) \Pi \left(\frac{t-1.5}{3} \right)$$

- Represente os sinais (considere qualquer $1.5 < a < 3$).
- Determine o valor de a de modo a que os sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sejam ortogonais.
- Determine e represente as componentes par e ímpar do sinal $x(t)$.
- Calcule a energia dos sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$.
- Determine os valores dos coeficientes a_1 e a_2 da expressão $x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + x_e(t)$ de forma a que a energia do sinal $x_e(t)$ seja mínima.

Grupo A

Exercício 3

Considere os seguintes sinais

$$x[n] = 4 \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta[n-k]$$

$$x_2[n] = \sum_{l=0}^1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta[n-2k-l]$$

$$x_3[n] = \sum_{l=0}^3 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta[n-4k-l]$$

- Represente os sinais.
- Verifique se os sinais $x_1[n]$, $x_2[n]$ e $x_3[n]$ são ortogonais.
- Determine os valores dos coeficientes a_1 , a_2 e a_3 da expressão

$$x[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + a_3 x_3[n] + x_e[n]$$

de forma a que a energia do sinal $x_e[n]$ seja mínima..

- Represente o sinal $x_3[2n-2]$