

LICENCIATURA EM ENGENHARIA DE SISTEMAS
DE TELECOMUNICAÇÕES E ELECTRÓNICA

Apontamentos de Análise de Sinais



© Prof. José Amaral
Versão 3.0 • 15-04-2003
Secção de Comunicações e Processamento de Sinal
ISEL-CEDET, Gabinete C • jda@isel.pt

Índice

OBJECTIVOS	1	APÊNDICE 2: TRANSFORMADA DE FOURIER DE SINAIS CONTÍNUOS NÃO PERIÓDICOS.....	29
1. SÉRIE DE FOURIER.....	2	APÊNDICE 3: EXEMPLOS DE CÁLCULO DE TF DE SINAIS CONTÍNUOS NÃO PERIÓDICOS..	32
SÉRIE DE FOURIER DE SINAIS CONTÍNUOS PERIÓDICOS.....	2	EXEMPLO1	32
EXEMPLO 3.1	3	EXEMPLO 2.....	33
EXEMPLO 3.2	4	EXEMPLO 3.....	34
2. TRANSFORMADA DE FOURIER. 5	5	EXEMPLO 4.....	35
TRANSFORMADA DE FOURIER DE SINAIS CONTÍNUOS NÃO PERIÓDICOS.....	5	EXEMPLO 5.....	35
EXEMPLO 3.3	5	EXEMPLO 6.....	36
TRANSFORMADA DE FOURIER DE SINAIS CONTÍNUOS PERIÓDICOS	6	EXEMPLO 7.....	37
EXEMPLO 3.4	6	EXEMPLO 8.....	37
EXERCÍCIO 5.1	7	APÊNDICE 4: TRANSFORMADA DE FOURIER DE SINAIS CONTÍNUOS PERIÓDICOS	39
MATLAB 5.1.....	14	FICHA DE AVALIAÇÃO M5.....	41
MATLAB 5.2.....	15	GRUPO C	41
EXEMPLO 1.....	15	EXERCÍCIO 1	41
EXEMPLO 2.....	16	GRUPO A	41
EXEMPLO 3.....	16	EXERCÍCIO 2	41
EXEMPLO 4.....	17		
EXEMPLO 5.....	17		
EXEMPLO 6.....	18		
EXEMPLO 7.....	19		
EXEMPLO 8.....	19		
EXERCÍCIO 5.2.....	20		
EXEMPLO 1.....	20		
EXEMPLO 2.....	20		
EXEMPLO 3.....	20		
MATLAB 5.3.....	22		
EXEMPLO 1.....	22		
EXEMPLO 2.....	23		
EXEMPLO 3.....	23		
APÊNDICE 1: SÉRIE DE FOURIER DE SINAIS CONTÍNUOS PERIÓDICOS	24		
SÉRIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER (STF).....	24		
SÉRIE EXPONENCIAL DE FOURIER (SF)	26		

Espectro de sinais contínuos

TÓPICOS

Série de Fourier de sinais contínuos periódicos

Transformada de Fourier de sinais contínuos não periódicos

Transformada de Fourier de sinais contínuos periódicos

Espectro de um sinal contínuo

Espectro de amplitude

Espectro de fase

Na sequência da analogia entre vectores e sinais estabelecida no Módulo 4, é analisada a possibilidade de representação de um sinal arbitrário por um conjunto de funções de base ortogonais, desenvolvendo-se o conceito para o caso particular da representação de sinais contínuos com base em exponenciais complexas. Introduce-se assim a Análise de *Fourier* de sinais contínuos periódicos e não periódicos, apresentando-se o conceito de espectro de um sinal contínuo.

No Apêndice 1 é deduzida a Série de *Fourier* de sinais contínuos periódicos, sendo apresentado o conceito de espectro de um sinal. No Apêndice 2 é deduzida a Transformada de *Fourier* de sinais contínuos não periódicos, sendo o conceito estendido aos sinais contínuos periódicos no Apêndice 4.

Os conceitos relevantes são apresentados em destaque no início do Módulo, seguindo-se um conjunto de exercícios de aplicação, em que se dá ênfase especial à utilização do *Matlab*. Frise-se por exemplo a opção pela apresentação de exemplos de cálculo de TF (sem recurso ao *Matlab*) em apêndice. Trata-se de uma área que exige uma capacidade de manipulação analítica e domínio do cálculo integral não trivial, e cuja dificuldade é convenientemente superada pelo recurso à biblioteca simbólica do *Matlab*.

Chama-se à atenção para o facto de, tratando-se da análise de sinais contínuos, se ter optado pela utilização da biblioteca simbólica em detrimento da análise numérica. No Módulo 8, nomeadamente após o desenvolvimento do conceito de amostragem de sinais contínuos, apresentar-se-ão as técnicas numéricas alternativas e a devida análise comparativa.

Objectivos

No fim deste módulo o aluno deverá :

1. Compreender o conceito de espectro de um sinal.
2. Saber calcular a SF de sinais contínuos periódicos.
3. Saber calcular a TF de sinais contínuos não periódicos.
4. Saber calcular a TF de sinais contínuos periódicos.

☐
☐
☐
☐



1. Série de Fourier

Série de Fourier de sinais contínuos periódicos

Qualquer sinal contínuo $x(t)$, periódico de período T_0 , pode ser representado completamente através de uma **Série de Fourier (SF)**

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}, \quad -\infty < t < \infty, k \in \mathbb{Z}$$

, sendo os coeficientes da série

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad \forall t_1$$

Temos então uma nova maneira de representar um sinal periódico contínuo. Para além da sua representação como uma função contínua do tempo, $x(t)$, o sinal pode ser representado pela sua SF

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

Ora esta função pode ser interpretada como **uma função discreta da frequência angular**, $\omega = 2\pi f$, que assume valores apenas para $\omega = 0, \pm\omega_0, \pm 2\omega_0, \pm 3\omega_0, \dots$ etc., valores esses correspondentes aos coeficientes da série. Esta representação é designada por **espectro do sinal** $x(t)$. Ao representar um sinal periódico contínuo através da sua SF, estamos a decompor o sinal nas suas várias componentes de frequência.

É imediato, a partir da sua definição,

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) dt$$

, que C_0 representa o valor médio do sinal $x(t)$, ou seja, por outras palavras, C_0 **corresponde à componente dc do sinal**.

Podemos representar o espectro do sinal graficamente, traçando uma **série equispçada de riscas verticais, situadas em $\omega = \pm k\omega_0$ e altura proporcional ao módulo do coeficiente C_k correspondente**. Como os coeficientes C_k são, em princípio, complexos, o que significa

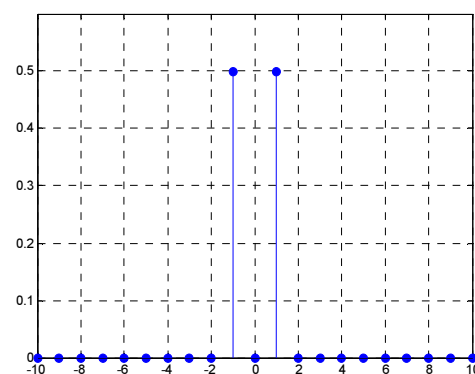
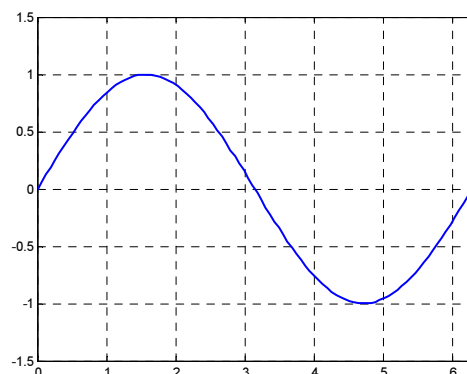


Figura M5.1

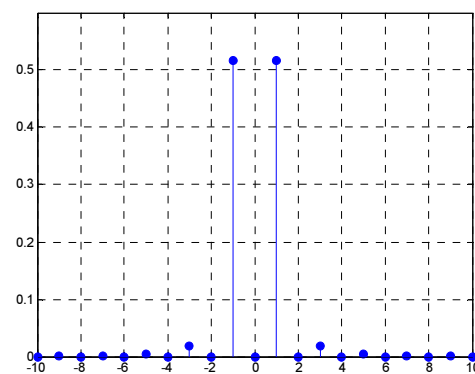
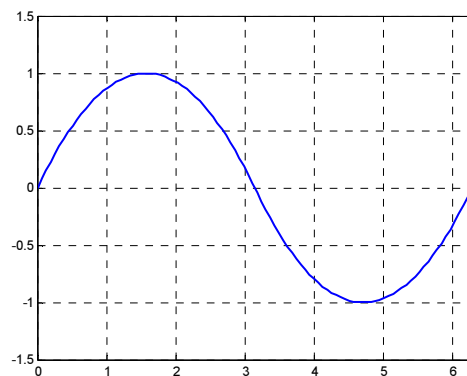


Figura M5.2

que para além da amplitude (módulo), têm também uma fase (argumento), a especificação gráfica de um sinal periódico contínuo $x(t)$ através do seu espectro requer que se tracem dois gráficos, um **espectro de amplitude**, em que se representa o módulo dos coeficientes C_k e um **espectro de fase**, em que se representa o argumento dos coeficientes C_k .

Dado que

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

e

$$C_{-k} = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) e^{jk\omega_0 t} dt$$

os coeficientes C_k e C_{-k} são complexos conjugados no caso em que os sinais sejam reais, pelo que **o espectro de amplitude de um sinal contínuo periódico real é uma função par da frequência e o espectro de fase é uma função ímpar**, ou seja $|C_k| = |C_{-k}|$ e $\arg\{C_k\} = -\arg\{C_{-k}\}$.

Exemplo 3.1

A figura M5.1 mostra o sinal $x(t) = \sin(\omega_0 t)$, com $\omega_0 = 1$, e o seu espectro de amplitude. Note que da relação de Euler

$$\begin{aligned} \sin(\omega_0 t) &= \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \\ &= 0.5je^{-j\omega_0 t} - 0.5je^{j\omega_0 t} \\ &= 0.5e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\omega_0 t} + 0.5e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega_0 t} \end{aligned}$$

é possível reconhecer que $\sin(\omega_0 t)$ pode ser escrito na forma de um somatório da forma

$$\sum C_k e^{jk\omega_0 t}$$

, sendo imediato reconhecer que todos os coeficientes são nulos com excepção de

$$C_{-1} = 0.5e^{j\frac{\pi}{2}} ; C_1 = 0.5e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

É este facto que está traduzido na figura M5.1: o espectro de amplitude mostra uma risca vertical proporcional ao módulo de cada um dos coeficientes, sendo no caso todos nulos com

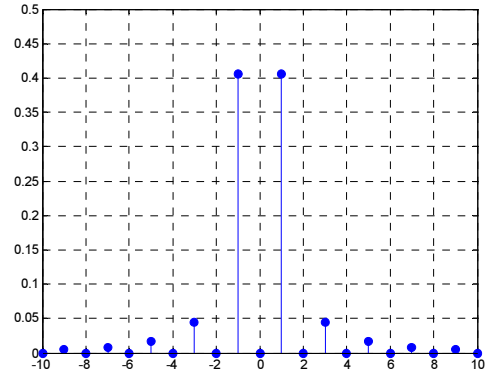
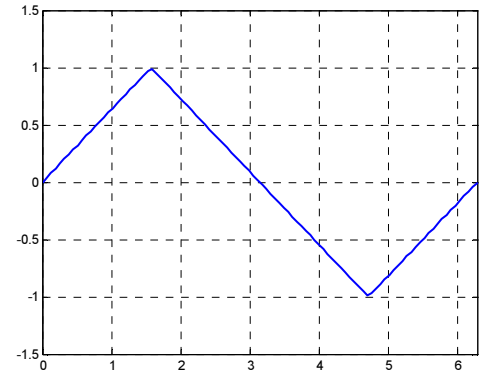


Figura M5.3

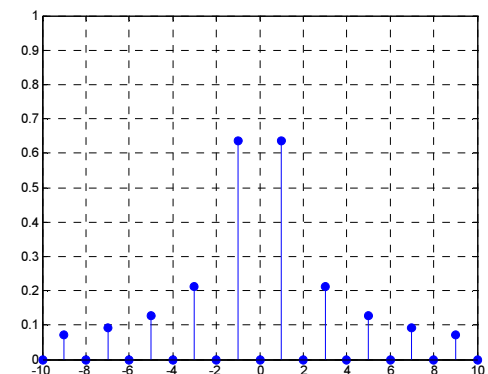
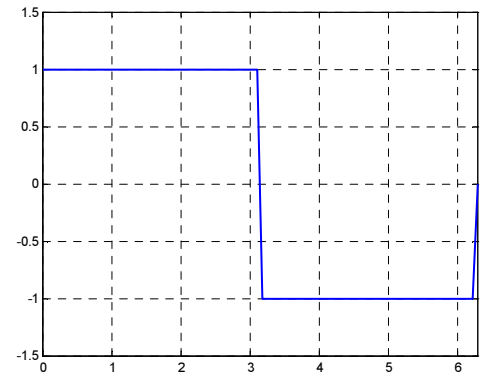


Figura M5.4

excepção dos coeficientes posicionados em $\pm\omega_0 (= \pm 1)$, que têm módulo 0.5.

Exemplo 3.2

As figuras M5.2 a M5.4 mostram a evolução no tempo, durante um período, de sinais contínuos periódicos com período fundamental idêntico ao do sinal do exemplo anterior ($T_0 = 2\pi$), assim como os respectivos espectros de amplitude. Note o surgimento de coeficientes com valor significativo à medida que o comportamento do sinal do tempo se afasta da evolução sinusoidal. Note que o facto de todos os sinais terem a mesma frequência fundamental está claramente traduzido na existência de duas riscas de maior amplitude em ω_0 e $-\omega_0$.

Podemos reconstruir os sinais com base nos 21 coeficientes calculados

$$x(t) \approx \sum_{k=-10}^{10} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

As figuras M5.5 a M5.8 mostram o resultado dessa reconstrução. Note como no 1º caso a reconstrução é exacta, dado que os coeficientes não utilizados são nulos, no segundo caso a reconstrução é muito aproximada dados que os coeficientes não utilizados são de valor desprezável, mas no último caso, pelo facto de não se considerarem as componentes de alta frequência do espectro, o sinal é muito deficientemente reconstruído, dada a existência de zonas do sinal em que há uma muito rápida mudança de comportamento.

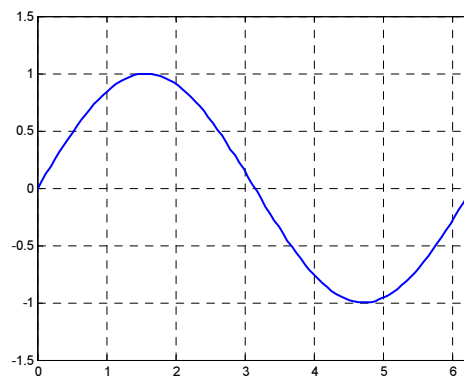


Figura M5.5

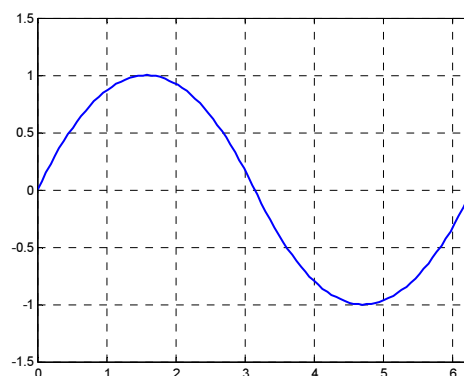


Figura M5.6

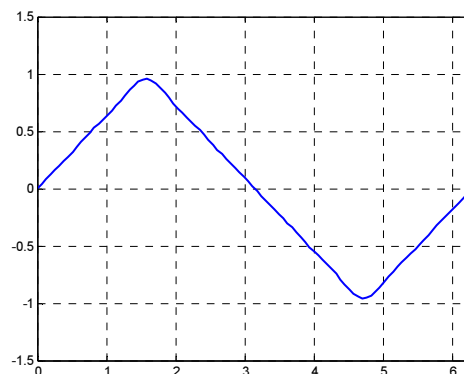


Figura M5.7

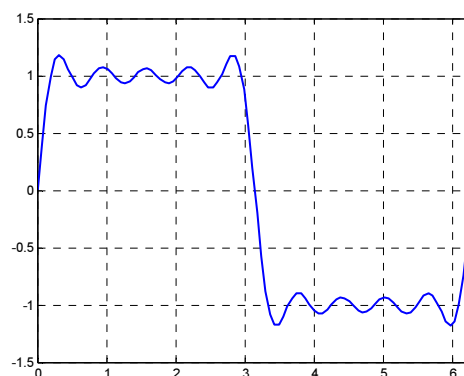


Figura M5.8



2. Transformada de Fourier

Transformada de Fourier de sinais contínuos não periódicos

A **transformada de Fourier (TF)** de um sinal contínuo não periódico, $x(t)$, também designada por **transformada directa de Fourier**, é representada por $X(\omega)$, sendo dada por

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

A relação

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

é designada por **transformada inversa de Fourier** de $X(\omega)$. O par de equações é designado como **par de transformadas de Fourier**.

Nem todos os sinais têm TF. Não sendo aqui relevante o estabelecimento das condições de existência, diga-se que está genericamente dependente da possibilidade do cálculo da relação integral que a define. Saliente-se o facto de que **a TF de um sinal contínuo não periódico, $x(t)$, é um sinal contínuo da frequência $X(\omega)$** . A TF do sinal $X(\omega)$ é designada por **função de densidade espectral**, sendo comum designá-la apenas por **espectro** do sinal. $X(\omega)$ é, em princípio, um sinal complexo, pelo que a sua especificação gráfica requer que se tracem dois gráficos, um **espectro de amplitude**, em que se representa o módulo de $X(\omega)$ e um **espectro de fase**, em que se representa o argumento de $X(\omega)$. Note que a reconstrução em todo o seu domínio de um sinal contínuo não periódico requer a utilização de exponenciais complexas de todos os valores de frequência.

Exemplo 3.3

A figura M5.9 mostra as TF das versões de energia dos sinais apresentados nas figuras M5.1 a M5.4, isto é, sinais que têm o mesmo comportamento dos sinais periódicos aí apresentados, mas apenas num intervalo de tempo correspondente a um período, sendo nulos fora desse intervalo.

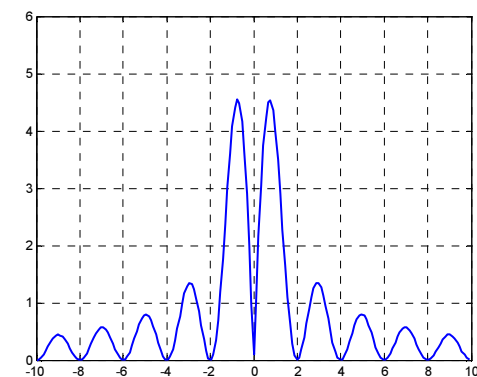
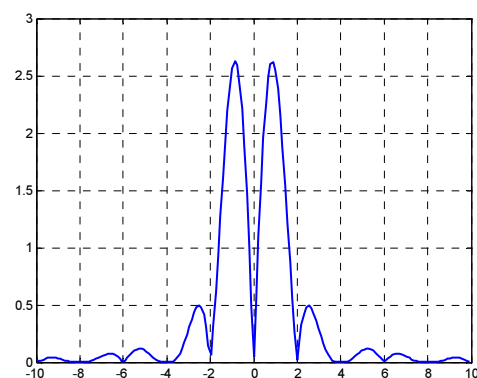
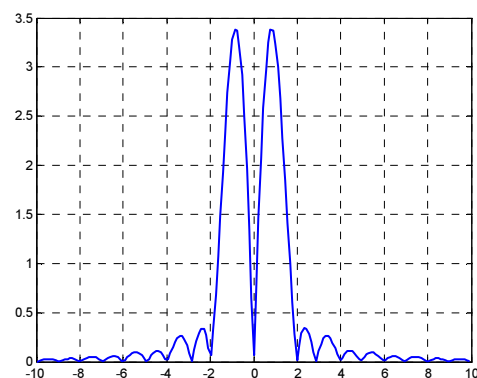
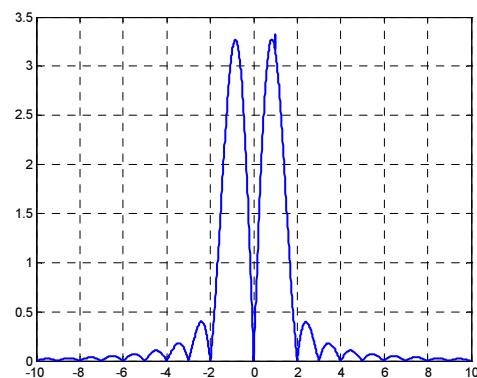


Figura M5.9

Transformada de Fourier de sinais contínuos periódicos

A **TF de um sinal contínuo periódico**, $x(t)$, de período T_0 , é constituída por impulsos de *Dirac* localizados nas frequências múltiplas da frequência fundamental ω_0 , de área igual aos coeficientes da SF do sinal

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta(f - kf_0)$$

$$\text{com } C_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Alternativamente a TF pode ser obtida das amostras da TF de um sinal de energia $x_e(t)$ correspondente a um período do sinal $x(t)$

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_e(\omega) \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_e(f) \delta(f - kf_0)$$

$$\text{ou seja } C_k = \frac{1}{T_0} X_e(k\omega_0)$$

Exemplo 3.4

A figura M5.10 mostra os gráficos da TF dos sinais contínuos periódicos considerados nos exemplos 3.1 e 3.2, constituída por impulsos de *Dirac* localizados nas frequências múltiplas da frequência fundamental ω_0 , a que se sobrepõem a TF das versões de energia de cada um dos sinais, vistas no exemplo 3.3, ficando assim clara a relação

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_e(\omega) \delta(\omega - k\omega_0)$$

(em qualquer dos casos exemplificados $T_0 = 2\pi$). A comparação com as figuras M5.1 a M5.4 esclarece a relação $X_e(k\omega_0) = T_0 C_k$.

Note que um sinal contínuo periódico tem uma representação natural na frequência através de um **sinal discreto** correspondente aos coeficientes da sua SF. A TF desse mesmo sinal é um **sinal contínuo** descrito pelo somatório de impulsos de *Dirac* situados nos múltiplos da frequência fundamental do sinal. A diferença é meramente formal, sendo que, naturalmente, a informação espectral contida numa e outra descrição são exactamente a mesma. No entanto, o tratamento de sinais contínuos, periódicos ou não, através da mesma ferramenta formal, TF, vai permitir que se deduzam relações extremamente importantes nos próximos módulos, nomeadamente no que diz respeito aos conceitos relacionados com a amostragem de sinais contínuos.

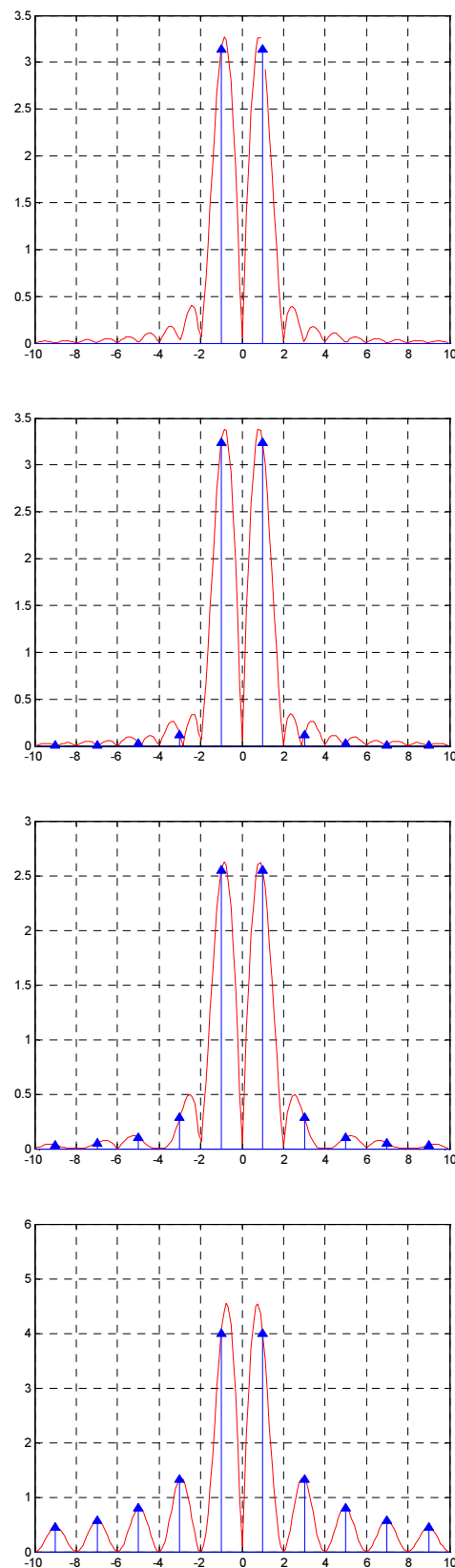


Figura M5.10



Exercício 5.1

Considere o sinal designado por **trem de pulsos rectangulares**, descrito analiticamente por

$$x(t) = \begin{cases} A & kT_0 - \tau/2 \leq t - kT_0 < kT_0 + \tau/2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

, com $k \in \mathbb{Z}$, cuja evolução temporal se mostra na figura M5.11 para uma amplitude $A = 10$ e **duty cycle** $\tau/T_0 = 1/8$.

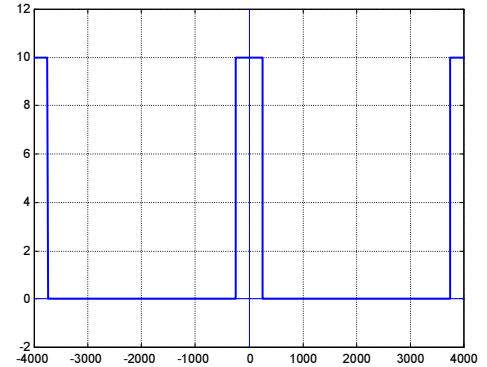


Figura M5.11

- Determine a expressão da SF que representa o sinal.
- Represente o espectro de amplitude e fase do sinal para um *duty cycle* $\tau/T_0 = 1/4$.
- Comente as alterações verificadas no espectro do sinal quando se altera a componente *dc* do trem de pulsos rectangulares.
- Comente as alterações verificadas no espectro do sinal quando se procede a um deslocamento no tempo do trem de pulsos rectangulares.
- Comente as alterações verificadas no espectro do sinal quando se diminui o *duty cycle* do trem de pulsos rectangulares, mantendo constante o período fundamental do sinal.
- Admita agora que a duração de cada pulso se mantém constante e que o *duty cycle* diminui em resultado do aumento do período do sinal. Comente as alterações verificadas no espectro do sinal.
- Esboce os sinais resultantes da reconstrução do trem de pulsos rectangulares a partir de um número finito de coeficientes da SF.

- A SF do sinal é dada pela expressão

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

em que os coeficientes C_k são dados por

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Fazendo $t_1 = -\tau/2$, resulta

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{T_0-\tau/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{A}{-jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} \\ &= -\frac{A}{jk2\pi} (e^{-jk\omega_0 \tau/2} - e^{jk\omega_0 \tau/2}) \\ &= \frac{A}{k\pi} \frac{e^{jk\omega_0 \tau/2} - e^{-jk\omega_0 \tau/2}}{2j} \\ &= \frac{A}{k\pi} \text{sen}(k\omega_0 \tau/2) \\ &= \frac{k\omega_0 \tau A}{2k\pi} \frac{\text{sen}(k\omega_0 \tau/2)}{k\omega_0 \tau/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_k &= \frac{A\tau}{T_0} \frac{\text{sen}(k\omega_0 \tau/2)}{k\omega_0 \tau/2} \\
 &= \frac{A\tau}{T_0} \frac{\text{sen}(k\pi \tau/T_0)}{k\pi \tau/T_0} \\
 &= \frac{A\tau}{T_0} \text{sinc}\left(k \frac{\tau}{T_0}\right)
 \end{aligned}$$

pelo que

$$x(t) = \frac{A\tau}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(k \frac{\tau}{T_0}\right) e^{jk\omega_0 t}$$

b) Para um *duty cycle* $\tau/T_0 = 4$ resulta

$$x(t) = \frac{A}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(k \frac{1}{4}\right) e^{jk\omega_0 t}$$

As figuras M5.12 e M5.13 mostram o espectro de amplitude, como se viu representado através de uma risca vertical proporcional ao módulo de cada um dos coeficientes C_k posicionada, para mais fácil interpretação, em função de k , assim como o espectro de fase, com uma risca vertical proporcional ao argumento de cada um dos coeficientes C_k , posicionada em função de k (Para conveniência de representação fez-se $A = 4$).

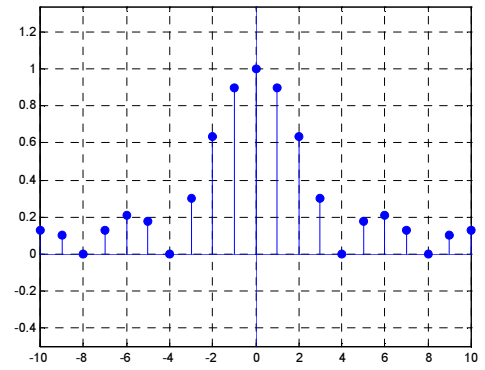


Figura M5.12

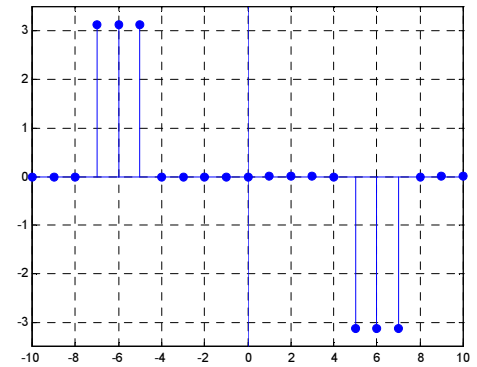


Figura M5.13

c) Quando se altera a componente *dc* do trem de impulsos, por exemplo adicionando a constante B ao sinal, $y(t) = B + x(t)$, resulta para os coeficientes

$$\begin{aligned}
 C_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{T_0-\tau/2} (B + x(t)) e^{-jk\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{T_0-\tau/2} B e^{-jk\omega_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{T_0-\tau/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{B}{T_0} \int_{-\tau/2}^{T_0-\tau/2} e^{-jk\omega_0 t} dt + \frac{A\tau}{T_0} \frac{\text{sen}(k\omega_0 \tau/2)}{k\omega_0 \tau/2}
 \end{aligned}$$

Como o integral

$$\int_{-\tau/2}^{T_0-\tau/2} e^{-jk\omega_0 t} dt$$

se anula excepto para $k = 0$, resulta

$$C_k = \begin{cases} \frac{A\tau}{T_0} \frac{\text{sen}(k\omega_0 \tau/2)}{k\omega_0 \tau/2} & k \neq 0 \\ B + \frac{A\tau}{T_0} & k = 0 \end{cases}$$

As figuras M5.14 a M5.17 mostram o sinal $y(t) = -0.6 + x(t)$ e respectivos espectros para

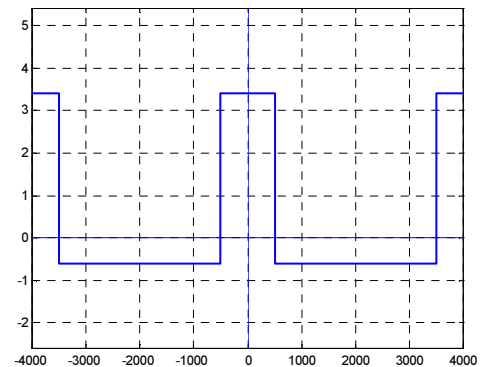


Figura M5.14

$A = 4$ e $\tau/T_0 = 1/4$. Podemos concluir que a alteração do valor médio do sinal apenas afecta o coeficiente C_0 . A conclusão não se aplica apenas ao sinal em análise podendo ser deduzida de modo mais geral para qualquer tipo de sinal.

A alteração do valor médio de um sinal afecta o coeficiente C_0 da representação em SF desse sinal, deixando inalterados os restantes coeficientes.

d) Quando se procede a um deslocamento no tempo do trem de impulsos, $y(t) = x(t - t_1)$, resulta para os coeficientes

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1 - \tau/2}^{T_0 + t_1 - \tau/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{A}{-jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{t_1 - \tau/2}^{t_1 + \tau/2} \\ &= -\frac{Ae^{-jk\omega_0 t_1}}{jk2\pi} (e^{-jk\omega_0 \tau/2} - e^{jk\omega_0 \tau/2}) \end{aligned}$$

logo

$$C_k = \left(\frac{A\tau}{T_0} \frac{\sin(k\omega_0 \tau/2)}{k\omega_0 \tau/2} \right) e^{-jk\omega_0 t_1}$$

Como se vê, **os coeficientes C_k têm o mesmo módulo mas a sua fase é alterada proporcionalmente a t_1** . Note que a alteração é periódica dada a periodicidade da função $e^{-jn\omega_0 t_1}$. As figuras M5.18 a M5.20 mostram o sinal $y(t) = x(t - t_1)$ e respectivos espectros para $A = 4$ e $\tau/T_0 = 1/4$.

e) Sendo os coeficientes C_k dados pela expressão

$$C_k = \frac{A\tau}{T_0} \operatorname{sinc}\left(k \frac{\tau}{T_0}\right)$$

é evidente que a diminuição do *duty cycle* do trem de impulsos tem duas consequências:

1. A amplitude do espectro diminui, dado que os coeficientes são multiplicados por $A\tau/T_0$.
2. A densidade de riscas em cada lobo da $\operatorname{sinc}()$ que envolve o espectro aumenta, dado que, como é evidente do argumento da função $\operatorname{sinc}()$, as riscas estão equispaçadas de τ/T_0 .

A figura M5.21 mostra comparativamente as alterações sofridas pelo espectro de um trem de

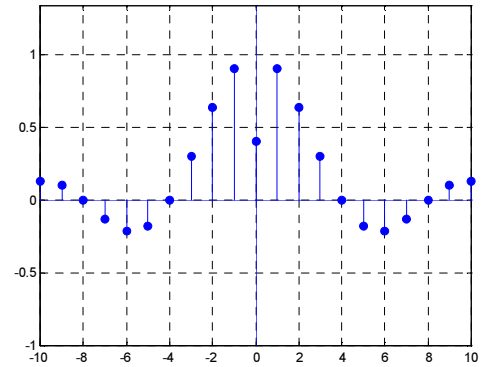


Figura M5.15

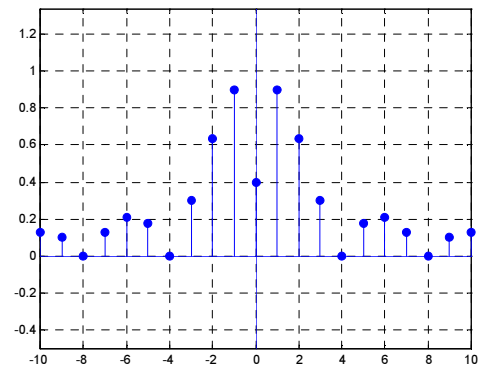


Figura M5.16

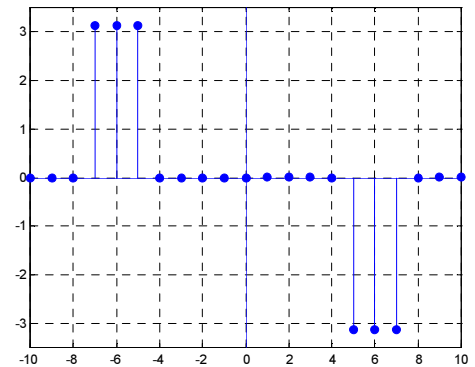


Figura M5.17

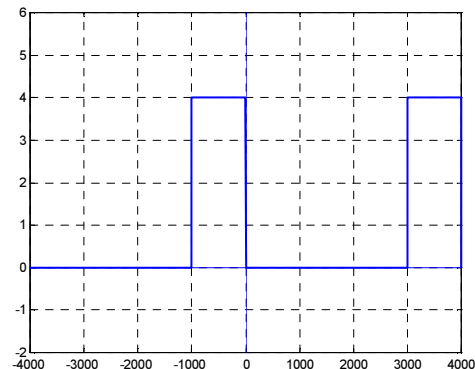


Figura M5.18

pulsos rectangulares em resultado da diminuição do *duty cycle*, respectivamente para $\tau/T_0 = 1/4$, $1/8$ e $1/16$.

f) Sendo os coeficientes C_k dados pela expressão

$$C_k = \frac{A\tau}{T_0} \operatorname{sinc}\left(k \frac{\tau}{T_0}\right)$$

é evidente que quando a duração de cada pulso se mantém constante e o *duty cycle* diminui em resultado do aumento do período do sinal, se registam duas alterações no espectro:

1. A amplitude do espectro diminui, dado que os coeficientes são multiplicados por $A\tau/T_0$.
2. A densidade, na frequência, de riscas do espectro aumenta, dado que as riscas estão equiespaçadas de τ/T_0 .

A figura M5.22 mostra comparativamente as alterações sofridas pelo espectro de um trem de pulsos rectangulares em resultado da diminuição do *duty cycle*, respectivamente para $\tau/T_0 = 1/4$, $1/8$ e $1/16$, em resultado do aumento do período fundamental, com $A = 10$. Para tornar mais claro que em resultado da diminuição da frequência fundamental, $f_0 = 1/T_0$, as riscas do espectro do sinal se registam para frequências cada vez mais próximas umas das outras (múltiplas de f_0), a representação foi feita sobre um eixo de abcissas em que se representa a frequência. Se fizéssemos crescer o período indefinidamente, no limite, com T_0 a tender para infinito, teríamos apenas um pulso rectangular, e as riscas do espectro estariam infinitesimalmente próximas, tendendo o espectro discreto para um espectro contínuo na frequência.

g) A reconstrução do sinal a partir de um número finito de coeficientes da série exponencial de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-n}^n C_k e^{jk\omega_0 t}$$

conduz a uma aproximação do sinal original, que será tanto mais correcta quanto maior for o número de coeficientes. Sendo

$$C_k = \frac{A\tau}{T_0} \operatorname{sinc}\left(k \frac{\tau}{T_0}\right)$$

, com, por exemplo, $A = 4$ e $\tau/T_0 = 8$, resulta para os coeficientes

$$C_0 = \frac{A}{8} \operatorname{sinc}(0) = 0.5000 \quad C_1 = \frac{A}{8} \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{8}\right) = 0.4872$$

$$C_2 = \frac{A}{8} \operatorname{sinc}\left(\frac{2}{8}\right) = 0.4502$$

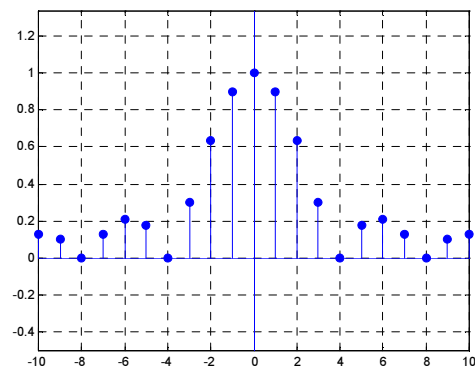


Figura M5.19

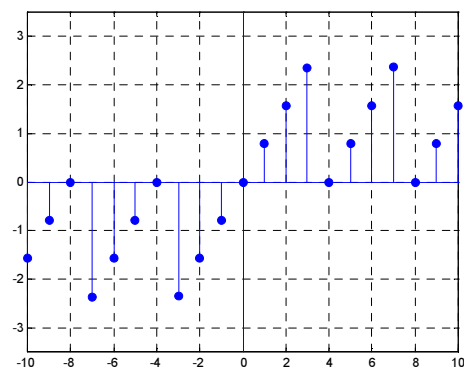


Figura M5.20

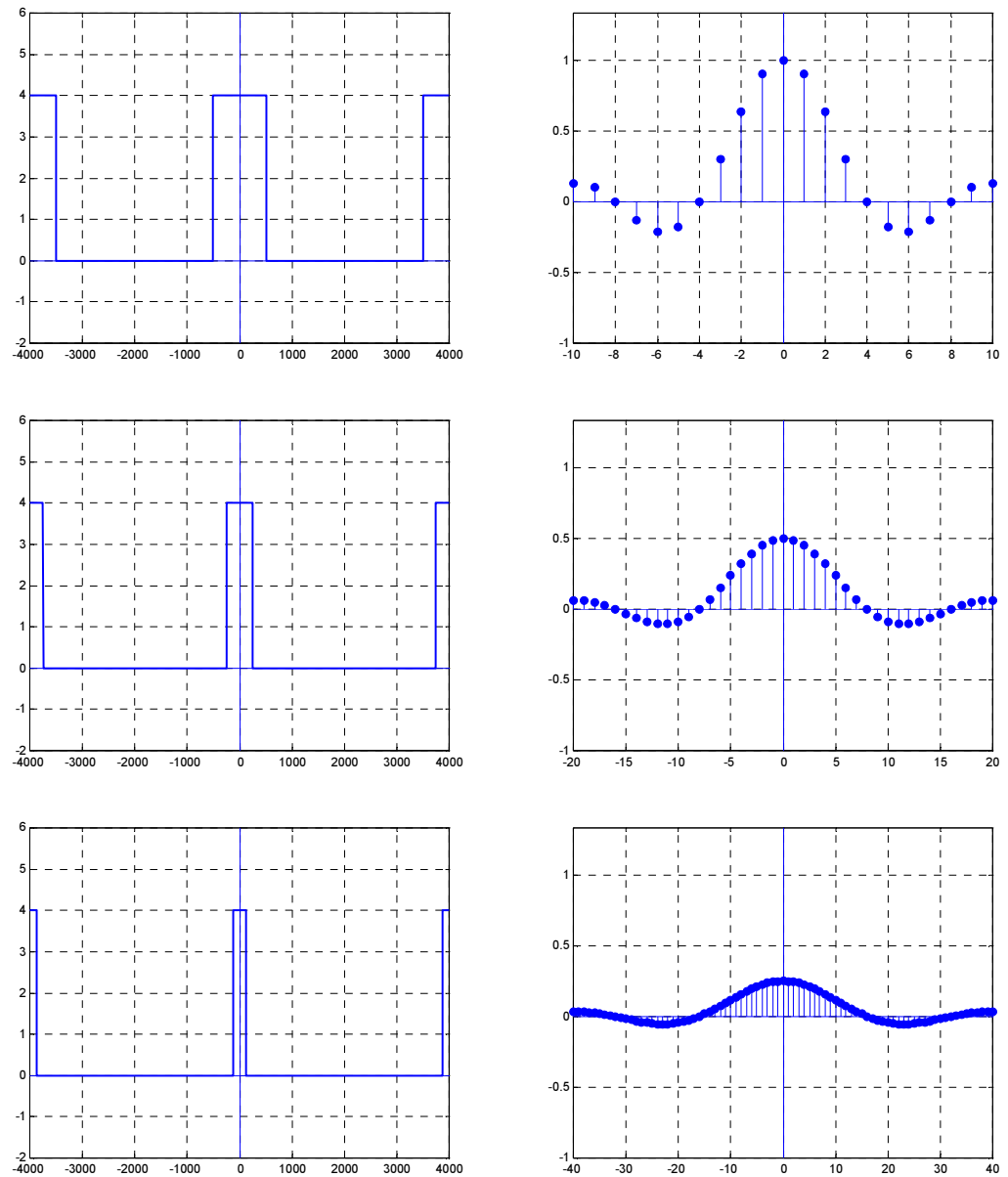


Figura M5.21

$$C_3 = \frac{A}{8} \operatorname{sinc}\left(\frac{3}{8}\right) = 0.3921 \quad \text{etc.}$$

Sendo

$$x(t) = \sum_{k=-n}^n C_k e^{jk\omega_0 t}$$

, resulta para o sinal reconstruído com um número crescente de coeficientes

1. Apenas com C_0

$$x(t) = C_0 = 0.5$$

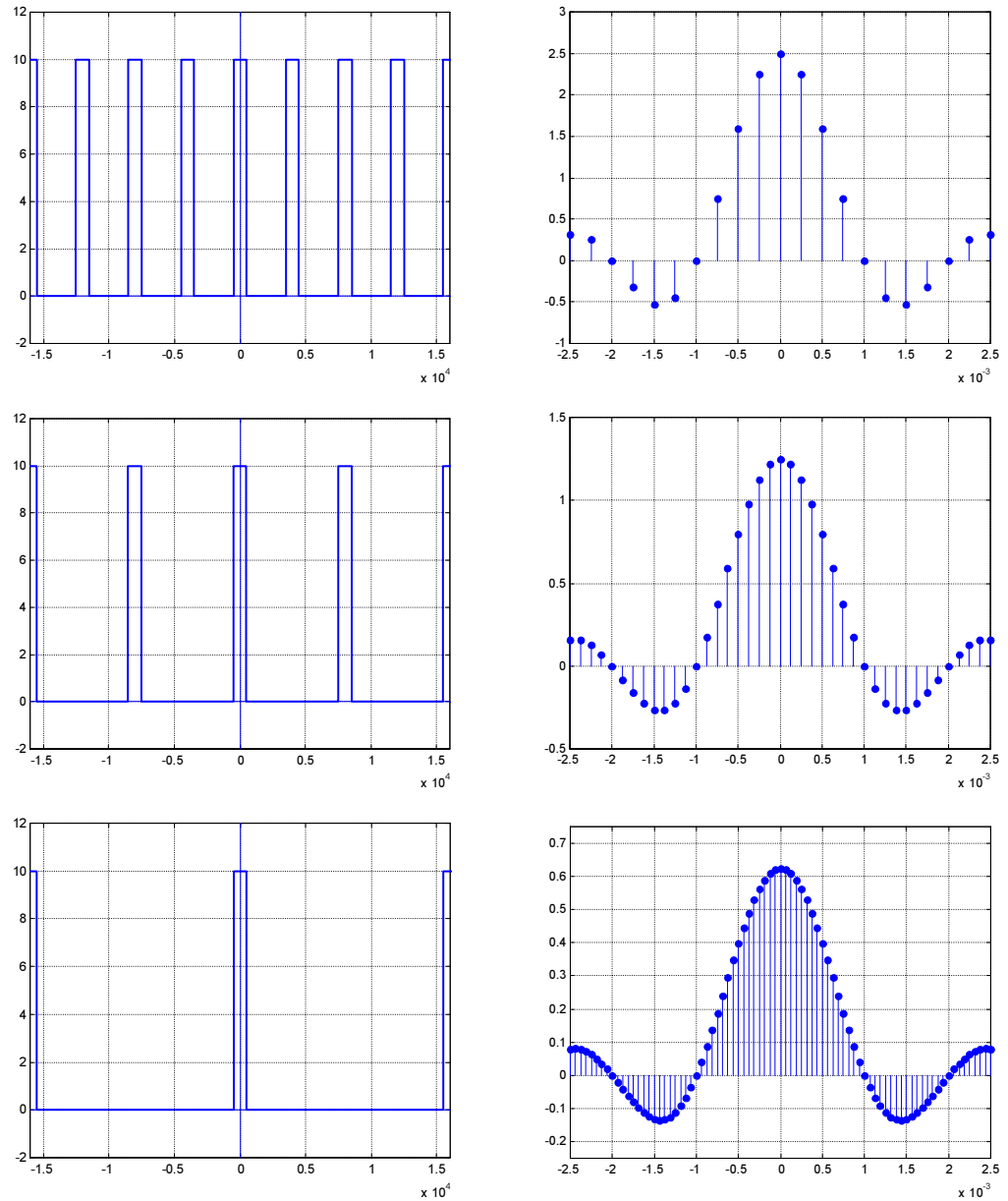


Figura M5.22

2. Com C_0 , C_1 e C_{-1}

$$\begin{aligned} x(t) &= C_0 + C_1 e^{j\omega_0 t} + C_{-1} e^{-j\omega_0 t} \\ &= 0.5 + 0.97 \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

3. Com C_0 , C_1 , C_{-1} , C_2 e C_{-2}

$$\begin{aligned} x(t) &= C_0 + C_1 e^{j\omega_0 t} + C_{-1} e^{-j\omega_0 t} + C_2 e^{j2\omega_0 t} + C_{-2} e^{-j2\omega_0 t} \\ &= 0.5 + 0.97 \cos(\omega_0 t) + 0.90 \cos(2\omega_0 t) \end{aligned}$$

etc. Note que as expressões escritas sob a forma de uma série de co-senos correspondem à série trigonométrica de Fourier. Neste caso particular $a_k = C_k + C_{-k} = 2C_k$ e $b_k = j(C_k - C_{-k}) = 0$ pelo que

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2C_k \cos(k\omega_0 t).$$

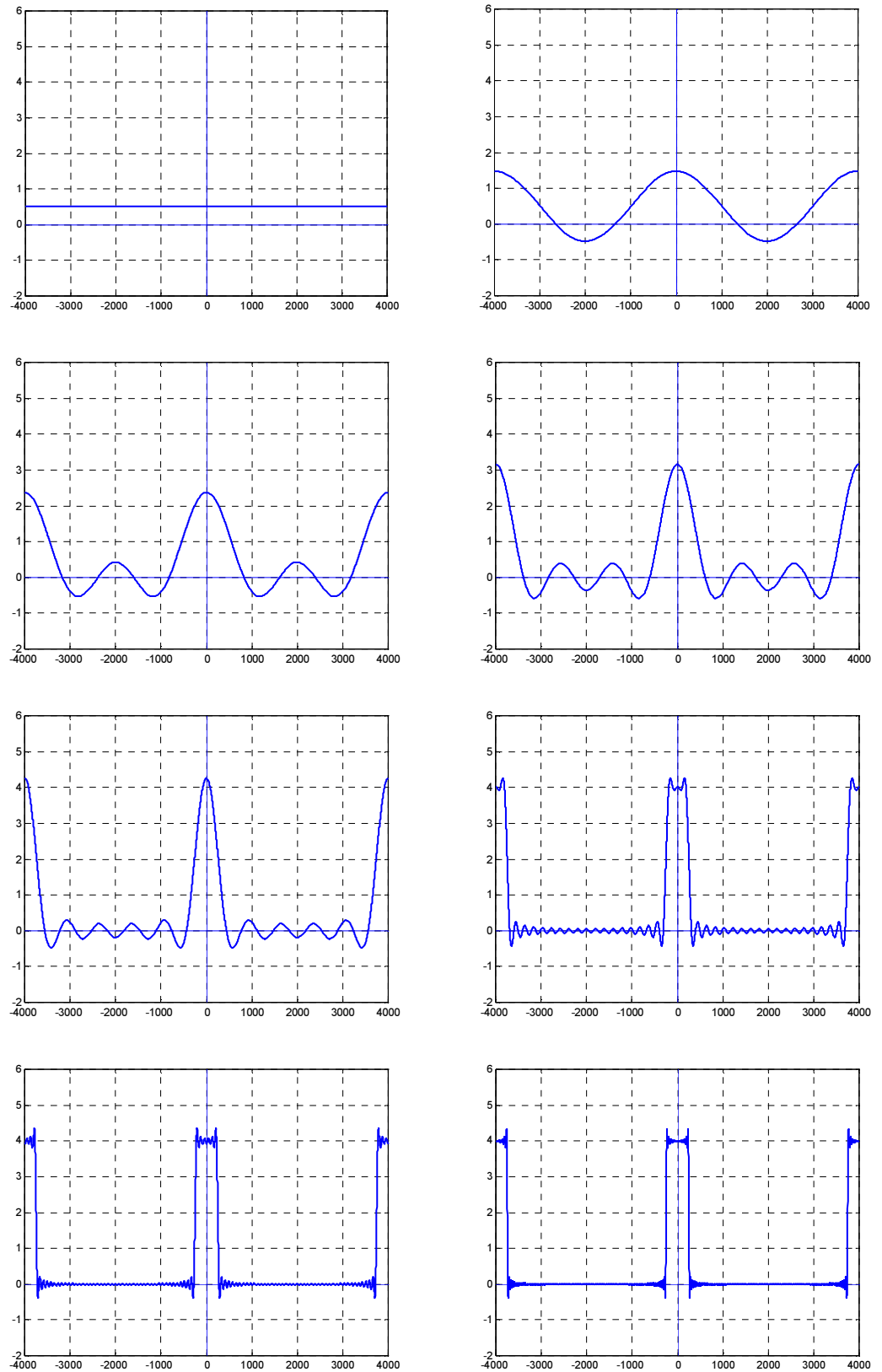
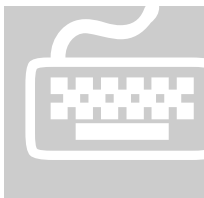


Figura M5.23

A figura M5.23 exemplifica o sinal reconstruído utilizando um número finito de pares de coeficientes, de cima par baixo e da esquerda para a direita, C_0 e C_0 mais 1, 2, 3, 5 e 20, 50, e 100 pares de coeficientes.



Matlab 5.1

Resolva a alínea a) e b) do Exercício 5.1 recorrendo ao *Matlab*.

Atendendo à definição dos coeficientes da SF

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Temos para o sinal em causa

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Recorrendo à biblioteca de cálculo simbólico, temos

```
syms A tau t T0
xb=sym('exp(-j*k*2*pi/T0*t)');
Ck=(1/T0)*int(A*xb,t,-tau/2,tau/2);
Ck=simplify(Ck)
pretty(Ck)
```

$$C_k = \frac{A \sin\left(\frac{\tau k \pi}{T_0}\right)}{k \pi}$$

, que podemos reescrever na forma de uma `sinc()`

$$C_k = A \frac{\sin(k\pi \tau/T_0)}{k\pi} = \frac{A\tau}{T_0} \frac{\sin(k\pi \tau/T_0)}{k\pi \tau/T_0} = \frac{A\tau}{T_0} \operatorname{sinc}\left(k \frac{\tau}{T_0}\right)$$

b) Já que sabemos que os coeficientes C_k são dados pela expressão acima, podemos abandonar o cálculo simbólico e recorrer ao cálculo numérico, contornando assim o inconveniente de ter de calcular

$$\lim_{k \rightarrow 0} A \frac{\sin(k\pi \tau/T_0)}{k\pi}$$

Assim, e considerando $A = 4$ e $\tau/T_0 = 1/4$, temos $C_k = \operatorname{sinc}(k/4)$, pelo que podemos fazer simplesmente

```
k=-10:10;
Ckg=sinc(k/4)
figure(1);stem(k,Ckg,'filled');grid on
```

para obter o gráfico relativo aos primeiros 20 pares de coeficientes, como se mostra na figura M5.24. Note que, não sendo conhecido T_0 , não é possível dispor os coeficientes em função da frequência. Sabendo que cada um dos coeficientes existe para um múltiplo da frequência fundamental, ou seja $0 \pm \omega_0 \pm 2\omega_0 \pm 3\omega_0 \dots$, podemos considerar que ao eixo horizontal da figura M5.24 corresponde uma escala da frequência normalizada $\omega/\omega_0 = f/f_0$, e interpretar convenientemente o posicionamento das riscas na frequência..

Note que, porque no caso em análise os coeficientes são reais, foi possível descrever o espectro do sinal recorrendo ao traçado de apenas um gráfico. No caso mais geral será necessário traçar o espectro de amplitude e o espectro de fase.

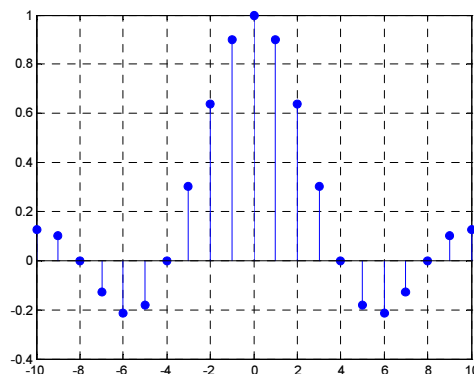
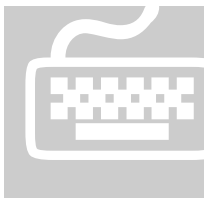


Figura M5.24



Matlab 5.2

Recorra ao *Matlab* para calcular as TF de sinais contínuos não periódicos deduzidas analiticamente no Apêndice 3.

Exemplo 1

Calcule a TF do sinal contínuo pulso rectangular centrado, de amplitude A e duração τ

$$x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

Represente o sinal e respectivo espectro. Admita $A = 10$ e $\tau = 2 \times 10^{-3}$.

Recorrendo à biblioteca de cálculo simbólico

```
syms A tau t
x=sym('A*(Heaviside(t+tau/2)-Heaviside(t-tau/2))');
X=simplify(fourier(x))
X =
      2*A*sin(1/2*tau*w)/w
pretty(X)
```

$$\frac{A \sin(1/2 \tau w)}{w}$$

Temos então

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{2A}{\omega} \sin(\omega \tau/2) \\ &= A\tau \operatorname{sinc}\left(\tau \frac{\omega}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

Podemos agora representar o sinal e respectivo espectro

```
A=10;tau=2e-3;
xg=subs(x);
tg=linspace(-3e-3,3e-3,400);
xg=subs(xg,t,tg);
figure(1);
plot(tg,xg,'LineWidth',2);
grid on; axis([-3e-3 3e-3 -2 12]);
```

Redefinindo o objecto $X(\omega)$ para evitar o levantamento da indeterminação na origem, temos

```
X=sym('A*tau*sinc(tau*w/2/pi)');
Xg=subs(X);
wg=linspace(-1.5e4,1.5e4,1000);
Xg=subs(Xg,w,wg);
figure(2);
plot(wg,Xg,'LineWidth',2);grid on;
axis([-1.5e4 1.5e4 -10e-3 25e-3]);
```

A figura M5.25 mostra o sinal e respectivo espectro. Note que o traçado dos gráficos implica a redefinição da função de *Heaviside* de modo a que $\operatorname{Heaviside}(0)$ seja igual a 1. Note ainda que, na maior parte dos casos, é mais prático fazer o traçado dos gráficos recorrendo ao cálculo numérico a partir das expressões obtidas para as TF através do cálculo simbólico.

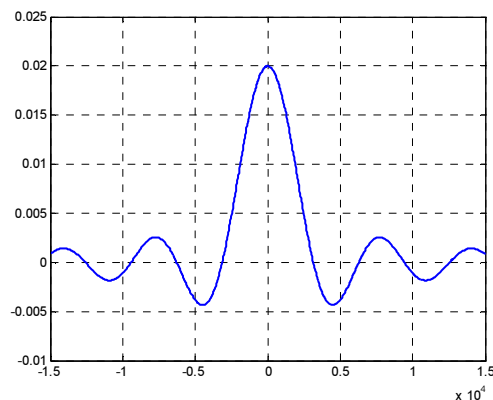
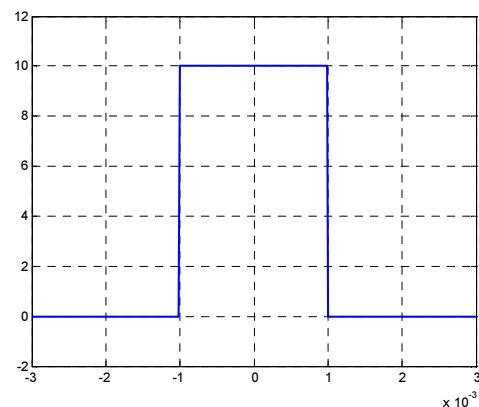


Figura M5.25

Dado o carácter repetitivo do código destinado a obter os gráficos dos sinais em análise, e por que se julga que os exemplos vistos até aqui são suficientemente genéricos, passar-se-á a explicitar o referido código apenas quando se julgar que introduz algo de novo.

Exemplo 2

Calcule a TF do impulso de *Dirac* de área A

$$x(t) = A\delta(t)$$

Recorrendo à biblioteca de cálculo simbólico

```
syms A t w
x=sym('A*Dirac(t)');
X=simplify(fourier(x))
X =
    A
```

Temos então

$$X(\omega) = A$$

O traçado dos gráficos é imediato, Por exemplo, para $A = 2.5$ podemos fazer

```
xg=subs(x,A,2.5);
tg=-1:1e-3:1;
xg=subs(xg,t,tg);
figure(1);
plot(tg,xg,'LineWidth',2);
grid on; axis([-1 1 -0.5 5]);
hold on;
stem(tg(find(xg>0)),xg(xg>0),'^','filled');
hold off;
```

A figura M5.26 mostra o sinal impulso de *Dirac*, $x(t) = A\delta(t)$, com $A = 2.5$, e respectiva TF $X(\omega) = A$.

Exemplo 3

Calcule a TF inversa de um impulso de *Dirac* na frequência, de área $2\pi A$,

$$X(\omega) = 2\pi A\delta(\omega)$$

Recorrendo à biblioteca de cálculo simbólico

```
syms A t w
X=sym('2*pi*A*Dirac(w)');
x=simplify(ifourier(X))
x =
    A
```

Temos então

$$x(t) = A$$

A figura M5.27 mostra o sinal constante no tempo $x(t) = A$ e respectiva TF $X(\omega) = 2\pi A\delta(\omega)$

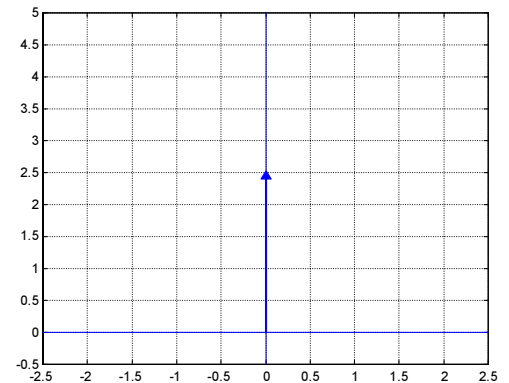


Figura M5.26

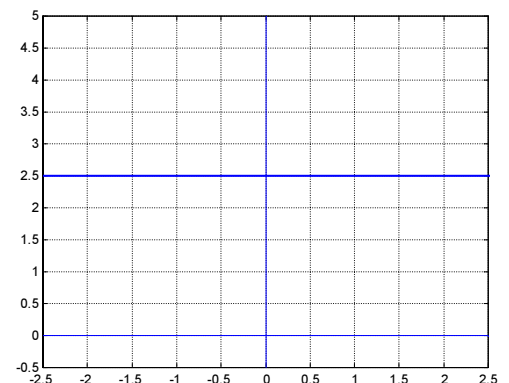
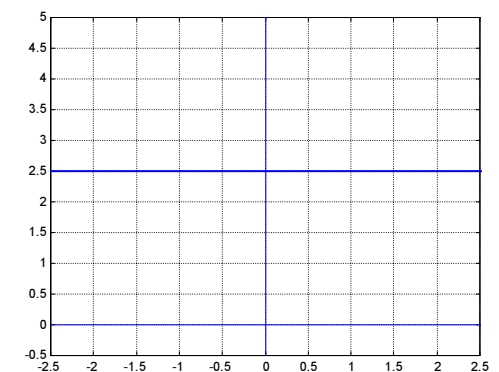


Figura M5.27

Exemplo 4

Calcule a TF do sinal

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

Recorrendo à biblioteca de cálculo simbólico

```
syms a t w
x=sym('exp(-abs(a)*t)
      *Heaviside(t)');
X=simplify(fourier(x,t,w))
X =
      1/(abs(a)+i*w)
```

Temos então

$$X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}, \quad a > 0$$

Note que desta vez a transformada obtida é uma função complexa. O espectro de amplitude é dado por

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

e o espectro de fase é dado por

$$\arg\{X(\omega)\} = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

A partir destas expressões podemos traçar facilmente os respectivos gráficos

```
a=0.5; xg=subs(X);
wg=-pi:0.01:pi;
xg=subs(xg,w,wg);
figure(1);
plot(wg,abs(xg),'LineWidth',2);
grid on; axis([-pi pi 0 2.5]);
figure(2);
plot(wg,angle(xg),'LineWidth',2);
grid on; axis([-pi pi -pi/2
               pi/2]);
```

A figura M5.28 mostra o sinal $x(t) = e^{-at}u(t)$, com $a = 0.5$, e correspondentes espectros de amplitude e fase.

Exemplo 5

Calcule a TF do sinal.

$$x(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t), \quad a > 0$$

Recorrendo à biblioteca de cálculo simbólico

```
syms a t w
x=sym('exp(-
abs(a)*t)*Heaviside(t)-
exp(abs(a)*t)*Heaviside(-t)');
X=simple(fourier(x,t,w))
pretty(X)
```

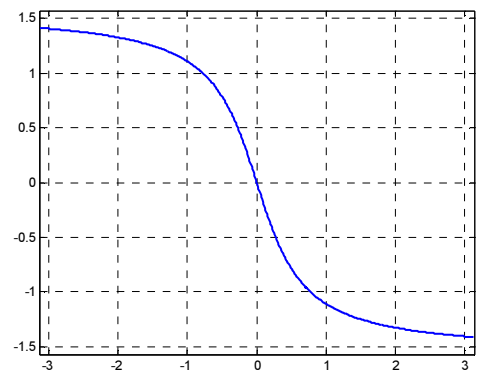
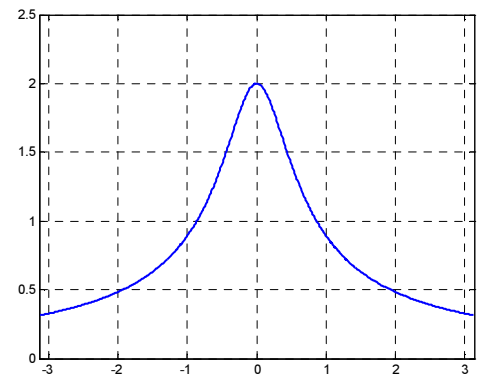
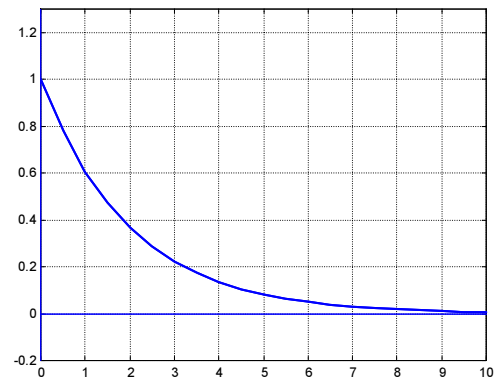


Figura M5.28

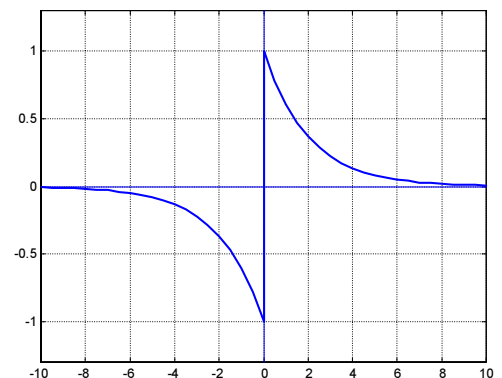


Figura M5.29

$$X = \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2}$$

Temos então

$$X(\omega) = -j \frac{2\omega}{a^2 + \omega^2}$$

A figura M5.29 mostra o sinal $x(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)$, com $a = 0.5$, e a figura M5.30 o correspondente espectro de amplitude e fase. Note que transformada é uma função imaginária pura, o módulo é uma função par e o argumento é uma função ímpar.

Exemplo 6

Calcule a TF do sinal

$$x(t) = \text{sign}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

Tendo em atenção que $\text{sign}(t) = 2u(t) - 1$, e recorrendo à biblioteca de cálculo simbólico

```
syms t w
x=sym('2*Heaviside(t)-1');
X=simplify(fourier(x,t,w))
X =
-2*i/w
```

Temos então

$$X(\omega) = -\frac{2j}{\omega}$$

A figura M5.31 mostra o sinal $x(t) = \text{sign}(t)$, e a figura M5.30 o correspondente espectro de amplitude e fase. Note que transformada é uma função imaginária pura, o módulo é uma função par e o argumento é uma função ímpar.

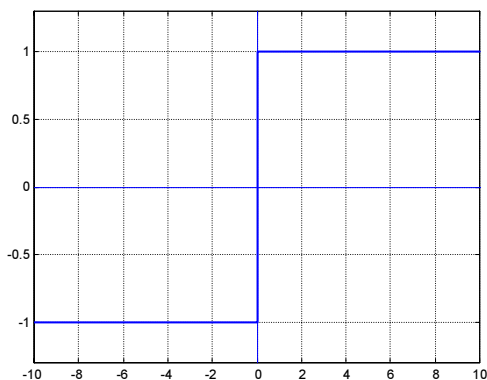


Figura M5.31

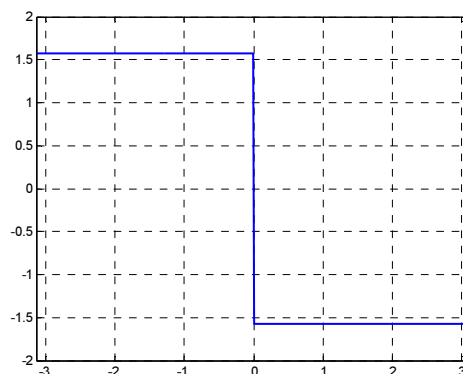
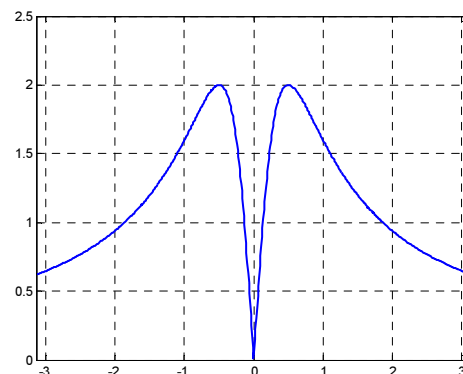


Figura M5.30

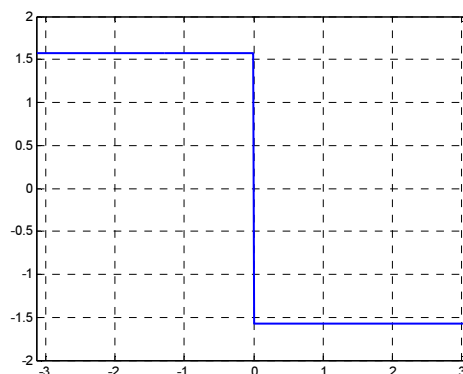
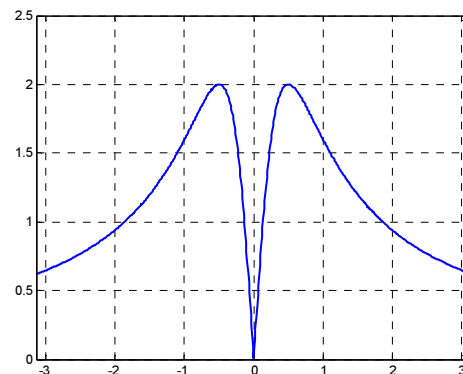


Figura M5.32

Exemplo 7

Calcule a TF do sinal escalão unitário

$$u(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1 & , t \geq 0 \end{cases}$$

Recorrendo à biblioteca de cálculo simbólico

```
syms t w
x=sym('Heaviside(t)');
X=fourier(x,t,w)
X =
pi*Dirac(w)-i/w
```

Temos então

$$X(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

A figura M5.33 mostra o sinal $x(t) = u(t)$, e a figura M5.34 o correspondente espectro de amplitude e fase.

Exemplo 8

Calcule a TF do sinal pulso triangular centrado

$$x(t) = A \Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

Recorrendo à biblioteca de cálculo simbólico

```
syms t w tau A
x=sym('(A+A*t/tau)*(Heaviside(t+tau)-Heaviside(t))+(A-A*t/tau)*(Heaviside(t)-Heaviside(t-tau))');
X=simplify(fourier(x,t,w));
pretty(X)
X =
      A (cos(tau w) - 1)
    -2 -----
           2
      tau w
```

Temos então

$$\begin{aligned} X(\omega) &= 2A \frac{1 - \cos(\omega\tau)}{\omega^2\tau} \\ &= A\tau \operatorname{sinc}^2\left(\tau \frac{\omega}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

A figura M5.35 mostra o espectro do sinal para $A = 2$ e $\tau = 2$.

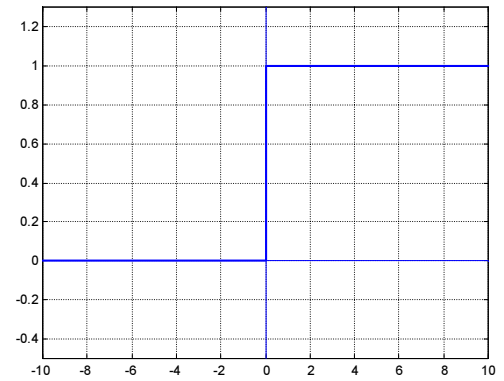


Figura M5.33

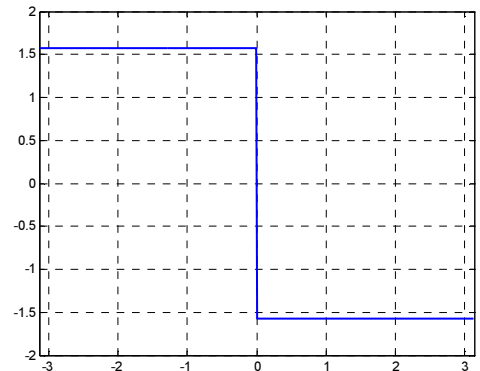
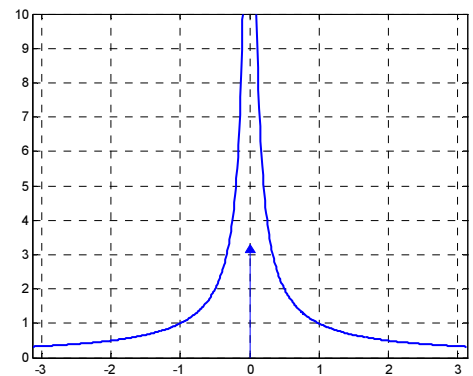


Figura M5.34

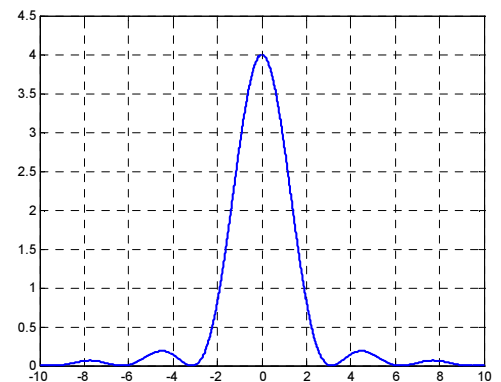


Figura M5.35



Exercício 5.2

Exemplo 1

Calcule a TF de um **trem de pulsos rectangulares**

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A \Pi\left(\frac{t - kT_0}{\tau}\right)$$

Consideremos o pulso rectangular, $x_e(t)$, correspondente ao trem de pulsos rectangulares no período $[-T_0/2, T_0/2]$. A sua TF é dada, como vimos, por

$$X_e(\omega) = A\tau \operatorname{sinc}\left(\tau \frac{\omega}{2\pi}\right)$$

Assim sendo, podemos de imediato dizer que a TF do trem de pulso rectangulares é

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_e(\omega) \delta(\omega - k\omega_0) \\ &= \frac{2\pi A\tau}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\tau \frac{\omega}{2\pi}\right) \delta(\omega - k\omega_0) \end{aligned}$$

, o que corresponde a um trem de impulsos de *Dirac*, posicionados nos múltiplos da frequência fundamental do sinal, modulados pela TF do sinal de energia coincidente com um período do sinal.

Exemplo 2

Calcule a TF de um **trem de impulsos de Dirac**.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A \delta(t - kT_0)$$

Consideremos o impulso de *Dirac*, $x_e(t)$, correspondente ao trem de impulso de *Dirac* no período $[-T_0/2, T_0/2]$. Como vimos, a TF de um impulso de *Dirac* é uma constante

$$X_e(\omega) = A$$

Assim sendo, podemos de imediato dizer que a TF do trem de impulsos é

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_e(\omega) \delta(\omega - k\omega_0) \\ &= \frac{2\pi A}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \end{aligned}$$

A TF de um trem de impulsos no tempo de período T_0 e área A é um trem de impulsos na frequência de período $\omega_0 = 2\pi/T_0$ e área $2\pi A/T_0$.

Exemplo 3

Calcule a TF dos sinais

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos(\omega_0 t) \\ x_2(t) &= \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Consideremos o sinal de energia, $x_e(t)$, correspondente ao sinal $x_1(t) = \cos(\omega_0 t)$ no intervalo $[0, T_0]$. Os coeficientes da SF do sinal $x_e(t)$ são

$$\begin{aligned}
 C_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(\omega_0 t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} e^{-jk\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{2T_0} \left(\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-j(k-1)\omega_0 t} dt + \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-j(k+1)\omega_0 t} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2T_0} \left[\frac{e^{-j(k-1)\omega_0 t}}{-j(k-1)\omega_0} + \frac{e^{-j(k+1)\omega_0 t}}{-j(k+1)\omega_0} \right]_{-T_0/2}^{T_0/2}
 \end{aligned}$$

Dada a periodicidade da exponencial complexa, os integrais anulam-se excepto para $k-1=0$ e $k+1=0$. Nestes caso temos

$$C_1 = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt = \frac{1}{2}, \quad C_{-1} = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt = \frac{1}{2}$$

Todos os restantes coeficientes são nulos. Assim sendo, a TF resulta

$$\begin{aligned}
 TF[\cos(\omega_0 t)] &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta(\omega - k\omega_0) \\
 &= \pi \delta(\omega + \omega_0) + \pi \delta(\omega - \omega_0) \\
 &= \frac{1}{2} \delta(f + f_0) + \frac{1}{2} \delta(f - f_0)
 \end{aligned}$$

Para o sinal $x_2(t) = \sin(\omega_0 t)$, temos, e ignorando algumas passagens na dedução, semelhante à anterior

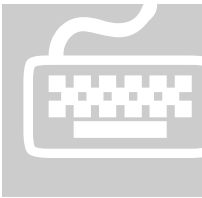
$$\begin{aligned}
 C_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin(\omega_0 t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} e^{-jk\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{2jT_0} \left[\frac{e^{-j(k-1)\omega_0 t}}{-j(k-1)\omega_0} - \frac{e^{-j(k+1)\omega_0 t}}{-j(k+1)\omega_0} \right]_{-T_0/2}^{T_0/2}
 \end{aligned}$$

resultando agora

$$C_1 = \frac{1}{2j}, \quad C_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

sendo os restantes coeficientes nulos. Assim sendo, a TF resulta

$$\begin{aligned}
 TF[\sin(\omega_0 t)] &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta(\omega - k\omega_0) \\
 &= \pi j \delta(\omega + \omega_0) - \pi j \delta(\omega - \omega_0) \\
 &= -\frac{1}{2j} \delta(f + f_0) + \frac{1}{2j} \delta(f - f_0)
 \end{aligned}$$



Matlab 5.3

Recorra ao *Matlab* para calcular as TF de sinais contínuos periódicos deduzidas analiticamente no Exercício 5.2.

Exemplo 1

Calcule a TF de um trem de pulsos rectangulares

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A \Pi\left(\frac{t - kT_0}{\tau}\right)$$

O recurso à biblioteca de cálculo simbólico para o cálculo da TF de sinais contínuos periódicos especificados por somatórios, conduz na maioria dos casos a expressões analíticas excessiva complexas e desnecessariamente complicadas de analisar. Para o exemplo em causa poderíamos fazer

```
syms t k T0 tau w
x=sym('A*(Heaviside(t+(tau/2)+k*T0)-Heaviside(t-(tau/2)+k*T0))');
xp=symsum(x,k,-inf,inf);
X=simplify(fourier(xp,t,w))
X =
sum(-i*A*(exp(1/2*i*(tau+2*k*T0)*w)-exp(1/2*i*(-tau+2*k*T0)*w))/w,k = -inf
.. inf)
```

, procedendo de seguida à simplificação da expressão. É um trabalho absolutamente desnecessário. Uma vez que sabemos que a TF do sinal é do tipo

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_e(\omega) \delta(\omega - k\omega_0)$$

, em que $X_e(\omega)$ é a TF do sinal de energia correspondente a um período

$$x_e(t) = A \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

, basta fazer

```
syms t tau w
x=sym('A*(Heaviside(t+(tau/2))-Heaviside(t-(tau/2)))');
X=simplify(fourier(x,t,w))
X =
2*A*sin(1/2*w*tau)/w
```

, para ficar-mos a conhecer

$$X_e(\omega) = A\tau \operatorname{sinc}\left(\tau \frac{\omega}{2\pi}\right)$$

, de onde resulta de imediato

$$X(\omega) = \frac{2\pi A\tau}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\tau \frac{\omega}{2\pi}\right) \delta(\omega - k\omega_0)$$

Também a questão da representação gráfica deve ser abordada de modo pragmático. A expressão acima traduz um **trem de impulso de Dirac** (também designado por **pente de Dirac's**) na frequência

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

, situados nos múltiplos da frequência fundamental ω_0 , cuja área é “modulada” proporcionalmente à TF da versão de energia do sinal

$$X(\omega) \propto \frac{2\pi}{T_0} X_e(\omega) = \frac{2\pi A\tau}{T_0} \operatorname{sinc}\left(\tau \frac{\omega}{2\pi}\right) \\ \propto A\tau\omega_0 \operatorname{sinc}\left(\tau \frac{\omega}{2\pi}\right)$$

Podemos então fazer,

```
A=10;;T0=8e3;tau=T0/8;w0=2*pi/T0;
w=-20*w0:w0/200:20*w0;
Xeg=abs((2*pi/T0)*A*tau*sinc(tau*w/2/pi));
figure(1);plot(w,Xeg,'r');hold on
w=-20*w0:w0:20*w0;
Xg=abs((2*pi/T0)*A*tau*sinc(tau*w/2/pi));
stem(w(find(Xg>10*eps)),Xg(Xg>10*eps),'^','filled');
hold off
grid on;axis([-20*w0 20*w0 0 10]);
```

A figura M5.36 mostra um trem de pulsos rectangulares de amplitude $A = 10$ e *duty cycle* $\tau/T_0 = 1/8$ e respectivo módulo da TF.

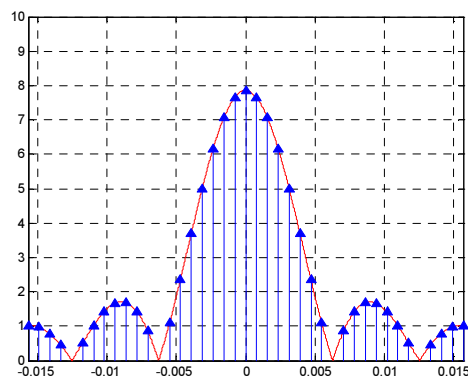
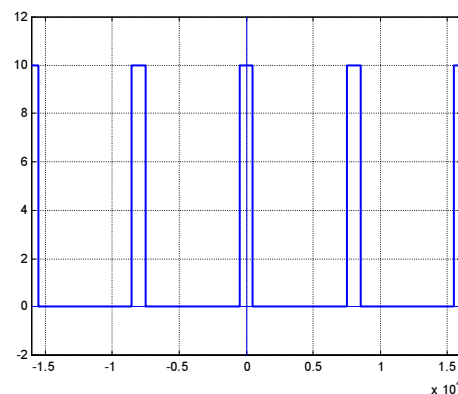


Figura M5.36

Exemplo 2

Calcule a TF de um trem de impulsos de *Dirac*

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A\delta(t - kT_0)$$

Tendo em atenção os comentários feitos no exemplo anterior

```
syms A t w
x=sym('A*Dirac(t)');
X=simplify(fourier(x,t,w))
X =
    A
```

Logo, é imediato que

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_e(\omega) \delta(\omega - k\omega_0) \\ = A \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

Exemplo 3

As TF dos sinais $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ e $x(t) = \sin(\omega_0 t)$, são imediatas

```
syms w t w0
X=fourier(sym('cos(w0*t)'),t,w)
X =
    pi*Dirac(w-w0)+pi*Dirac(w+w0)
X=fourier(sym('sin(w0*t)'),t,w)
X =
    -i*pi*Dirac(w-w0)+i*pi*Dirac(w+w0)
```



Apêndice 1: Série de Fourier de sinais contínuos periódicos

Série trigonométrica de Fourier (STF)

Como ficou demonstrado em Módulo 4 Demo1, os sinais $\sin(n\omega_0 t)$ e $\sin(m\omega_0 t)$, com n e m inteiros, são ortogonais em qualquer intervalo $[t_1, t_1 + 2\pi/\omega_0]$. Pode ser demonstrado de modo muito semelhante que os sinais $\cos(n\omega_0 t)$ e $\cos(m\omega_0 t)$, com n e $m \in \mathfrak{I}$, e distintos entre si, são também ortogonais em qualquer intervalo $[t_1, t_1 + 2\pi/\omega_0]$. Pode ainda ser demonstrado que o conjunto constituído simultaneamente por todos os sinais $\sin(n\omega_0 t)$ e $\cos(n\omega_0 t)$, com $n \in \mathfrak{I}$, forma um conjunto ortogonal completo, $\{y_k(t)\}$, num intervalo $[t_1, t_1 + T_0]$, em que, por conveniência de notação, fizemos $2\pi/\omega_0 = T_0$, podendo qualquer sinal arbitrário $x(t)$ ser representado no intervalo $[t_1, t_1 + T_0]$ em termos desses sinais base

$$x(t) = \sum_{k=0}^n a_k y_k(t)$$

, sendo que, de modo a minimizar o erro quadrático médio, os coeficientes a_k são dados por

$$a_k = \frac{\int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) y_k^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_1+T_0} y_k(t) y_k^*(t) dt}$$

Atendendo a que

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \sin^2(k\omega_0 t) dt &= \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4k\omega_0} \sin(2k\omega_0 t) \right) \Big|_{t_1}^{t_1+T_0} \\ &= \frac{t_1 + T_0}{2} - \frac{1}{4k\omega_0} \sin(2k\omega_0(t_1 + T_0)) - \frac{t_1}{2} + \frac{1}{4k\omega_0} \sin(2k\omega_0 t_1) \\ &= \frac{T_0}{2} + \frac{1}{4k\omega_0} (\sin(t_1) - \sin(t_1 + 4k\pi)) \\ &= \frac{T_0}{2} \end{aligned}$$

, com $k \neq 0$. Atendendo a que

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \cos^2(k\omega_0 t) dt &= \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4k\omega_0} \sin(2k\omega_0 t) \right) \Big|_{t_1}^{t_1+T_0} \\ &= \frac{t_1 + T_0}{2} + \frac{1}{4k\omega_0} \sin(2k\omega_0(t_1 + T_0)) - \frac{t_1}{2} - \frac{1}{4k\omega_0} \sin(2k\omega_0 t_1) \\ &= \frac{T_0}{2} + \frac{1}{4k\omega_0} (-\sin(t_1) + \sin(t_1 + 4k\pi)) \\ &= \frac{T_0}{2} \end{aligned}$$

, com $k \neq 0$. Atendendo ainda a que, e distinguindo os coeficientes das funções co-seno dos coeficientes das funções seno, passando a designar estes últimos por b_k ,

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{\int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt}{\int_{t_1}^{t_1+T_0} \cos^2(k\omega_0 t) dt} \\
 &= \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt
 \end{aligned}$$

, com $k \neq 0$, e

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{\int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt}{\int_{t_1}^{t_1+T_0} \sin^2(k\omega_0 t) dt} \\
 &= \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt
 \end{aligned}$$

, com $k \neq 0$. Atendendo finalmente a que

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{\int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) \cos(0) dt}{\int_{t_1}^{t_1+T_0} \cos^2(0) dt} \\
 &= \frac{\int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) dt}{\int_{t_1}^{t_1+T_0} dt} \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) dt
 \end{aligned}$$

, podemos então dizer que **qualquer sinal arbitrário** $x(t)$ **pode ser representado num intervalo** $[t_1, t_1 + T_0]$ **em termos dos sinais** $\sin(k\omega_0 t)$ **e** $\cos(k\omega_0 t)$,

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t))$$

, **chamada representação de** $x(t)$ **em Série Trigonométrica de Fourier (STF)**, sendo os coeficientes

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) dt \\
 a_k &= \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt & b_k &= \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt
 \end{aligned}$$

Atendendo às relações gerais entre as funções seno e co-seno e às expressões dos coeficientes, podemos, alternativamente, escrever a STF do sinal $x(t)$ no intervalo $[t_1, t_1 + T_0]$ na forma

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

com $\alpha_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ e $\theta_k = -\arctan(b_k/a_k)$.

Série Exponencial de Fourier (SF)

Considere-se um coeficiente C_k tal que $a_0 = C_0$, $a_k = C_k + C_{-k}$, e $b_k = j(C_k - C_{-k})$, ou seja

$$C_0 = a_0 \quad ; \quad C_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k)$$

Substituindo os coeficientes a_k e b_k na expressão da STF resulta

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} ((C_k + C_{-k}) \cos(k\omega_0 t) + j(C_k - C_{-k}) \sin(k\omega_0 t)) \\ &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k (\cos(k\omega_0 t) + j \sin(k\omega_0 t)) + C_{-k} (\cos(k\omega_0 t) - j \sin(k\omega_0 t))) \\ &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k e^{jk\omega_0 t} + C_{-k} e^{-jk\omega_0 t}) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

Obtemos uma nova representação da STF do sinal $x(t)$ no intervalo $[t_1, t_1 + T_0]$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

Sendo

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt - j \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt \right) \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) (\cos(k\omega_0 t) - j \sin(k\omega_0 t)) dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

confirmando-se a hipótese

$$\begin{aligned} C_0 &= a_0 \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) dt \end{aligned}$$

Esta última representação da STF recebe uma designação própria, sendo conhecida por **Série Exponencial de Fourier (SF)**, podendo ser deduzida, de modo alternativo ao que foi feito, tomando como funções ortogonais de base o conjunto $\{e^{jk\omega_0 t}\}$. Na verdade é fácil demonstrar que o conjunto de sinais $\{e^{jk\omega_0 t}\}$, com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, é ortogonal num intervalo $[t_1, t_1 + T_0]$. Como vimos, para que dois sinais, complexos, $y_1(t)$ e $y_2(t)$, sejam ortogonais no intervalo $[t_1, t_2]$ o seu produto interno deve ser nulo

$$\int_{t_1}^{t_2} y_1(t) y_2^*(t) dt = 0$$

Resulta então

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{t_1}^{t_1+T_0} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_1+T_0} e^{j(n-m)\omega_0 t} dt \\
&= \frac{1}{j(n-m)\omega_0} e^{j(n-m)\omega_0 t} \Big|_{t_1}^{t_1+T_0} \\
&= \frac{1}{j(n-m)\omega_0} \left[e^{j(n-m)\omega_0(t_1+T_0)} - e^{j(n-m)\omega_0 t_1} \right] \\
&= \frac{1}{j(n-m)\omega_0} e^{j(n-m)\omega_0 t_1} \left[e^{j(n-m)\omega_0 T_0} - 1 \right] \\
&= \frac{1}{j(n-m)\omega_0} e^{j(n-m)\omega_0 t_1} \left[e^{j2\pi(n-m)} - 1 \right]
\end{aligned}$$

Com n e m inteiros $e^{j2\pi(n-m)} = 1$, pelo que o integral se anula para $n \neq m$, como queríamos demonstrar. Para $n = m$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_1+T_0} e^{j(n-m)\omega_0 t} dt &= \int_{t_1}^{t_1+T_0} dt \\
&= t \Big|_{t_1}^{t_1+T_0} \\
&= T_0
\end{aligned}$$

Pode demonstrar-se que o conjunto de sinais $\{e^{jk\omega_0 t}\}$, com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, para além de ser ortogonal num intervalo $[t_1, t_1 + T_0]$

$$\langle y_n(t), y_m(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_1+T_0} e^{j(n-m)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ T_0 & n = m \end{cases}$$

é ainda um conjunto completo, pelo que qualquer sinal arbitrário $x(t)$ pode ser representado no intervalo $[t_1, t_1 + T_0]$ em termos desses sinais base

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

, sendo que, de modo a minimizar o erro quadrático médio, os coeficientes C_k são dados por

$$\begin{aligned}
C_k &= \frac{\int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) y_k^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_1+T_0} y_k y_k^*(t) dt} \\
&= \frac{\int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt}{\int_{t_1}^{t_1+T_0} e^{jk\omega_0 t} e^{-jk\omega_0 t} dt} \\
&= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt
\end{aligned}$$

,tal como tínhamos deduzido anteriormente. Como se viu, **a série trigonométrica e a série exponencial de Fourier podem ser entendidas como duas representações da mesma série** sendo os coeficientes relacionados por

$$a_0 = C_0$$

$$C_0 = a_0$$

$$a_k = C_k + C_{-k}$$

$$C_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k)$$

$$b_k = j(C_k - C_{-k})$$

Dado que se trata de duas representações da mesma série, é desnecessário referir constantemente a representação em série trigonométrica e em série exponencial. Por ser mais útil nos conceitos apresentados nas secções que se seguem, passaremos a utilizar preferencialmente a série exponencial, designando-a simplesmente por **Série de Fourier (SF)**.

Embora qualquer sinal arbitrário $x(t)$ possa ser representado num intervalo $[t_1, t_1 + T_0]$ através duma SF, fora desse intervalo o sinal pode assumir qualquer valor. Os coeficientes da série são calculados de modo a minimizar o erro quadrático médio da representação dentro do intervalo, não existindo fora do intervalo qualquer garantia de semelhança entre o sinal e a sua série. No entanto, se o sinal for periódico de período T_0 a representação do sinal, sendo válida no intervalo referente a um período, é válida em todo o seu domínio, atendendo à própria definição de sinal periódico e à periodicidade inerente aos sinais de base que estão a ser utilizados

$$\begin{aligned} e^{jk\omega_0(t+T_0)} &= e^{j(k\omega_0 t + k2\pi)} \\ &= e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

Podemos então dizer que **qualquer sinal contínuo** $x(t)$, **periódico de período** T_0 , **pode ser representado completamente através duma SF**

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \quad , -\infty < t < \infty, k \in \mathfrak{Z}$$

, com

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad , \forall t_1$$



Apêndice 2: Transformada de Fourier de sinais contínuos não periódicos

Seja um qualquer sinal $x(t)$, e consideremos um novo sinal $x_{T_0}(t)$ resultante da repetição periódica, de período T_0 , do sinal original, sendo T_0 suficientemente grande para que não haja sobreposição do sinal, tal como se ilustra na figura M5.37. Se fizermos crescer o período indefinidamente, no limite, com T_0 a tender para infinito, os dois sinais serão idênticos

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t) = x(t)$$

Qualquer dos dois sinais pode ser representado por uma SF, a diferença, como sabemos, consiste no facto de que enquanto a SF que representa $x_{T_0}(t)$ o faz em todo o seu domínio, dado que se trata de um sinal periódico, a SF que representa $x(t)$ apenas o faz num intervalo finito. Consideremos então a SF que representa $x_{T_0}(t)$

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

, com

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{T_0}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Esta série representa igualmente $x(t)$, mas apenas no intervalo $[-T_0/2, T_0/2]$. Se fizermos crescer o período indefinidamente, a série representará o sinal $x(t)$ num intervalo sucessivamente maior, e, no limite, os dois sinais serão idênticos, e a série representará o sinal $x(t)$ em todo o seu domínio. Comecemos por considerar algumas mudanças de notação. Seja $\omega_k = k\omega_0$, explicitemos o facto dos coeficientes da série serem funções da frequência fundamental $C_k = C_k(\omega_k)$, e façamos $C(\omega_k) = T_0 C_k(\omega_k)$. Resulta então que a SF do sinal $x_{T_0}(t)$ pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} x_{T_0}(t) &= \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(\omega_k) e^{j\omega_k t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(\omega_k) e^{j\omega_k t} \omega_0 \end{aligned}$$

com

$$C(\omega_k) = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{T_0}(t) e^{-j\omega_k t} dt$$

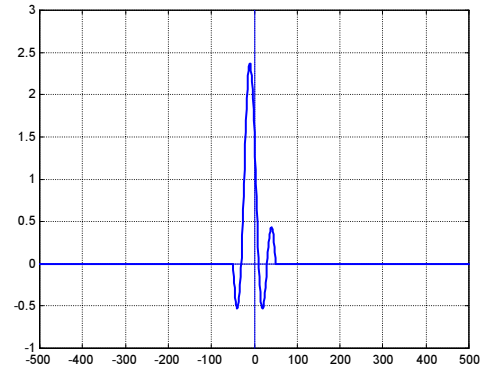


Figura M5.37

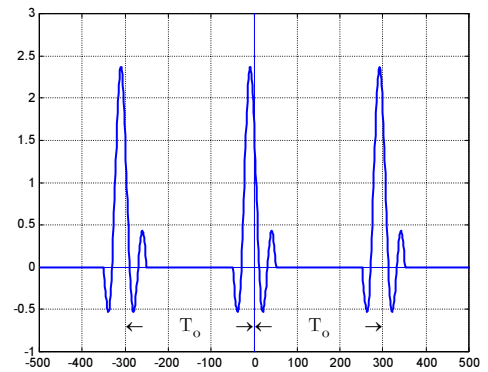


Figura M5.38

A equação

$$x_{T_0}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(\omega_k) e^{j\omega_k t} \omega_0$$

representa uma soma de componentes discretas de frequência. Interpretamos a expressão graficamente, recorrendo à figura M5.39.

Ignoremos o facto de $C(\omega_k) e^{j\omega_k t}$ ser uma grandeza complexa, o que não altera o fundamental do que se pretende clarificar, e representemo-la, como se fosse uma grandeza real, em função da frequência. Trata-se de uma quantidade que existe para valores discretos da frequência, com cada uma das componentes de frequência separada de ω_0 , $\omega = \pm \omega_0, \pm 2\omega_0, \pm 3\omega_0, \dots$. Então a quantidade

$$C(\omega_k) e^{j\omega_k t} \omega_0$$

pode ser interpretada como a área de um rectângulo de base ω_0 e altura $C(\omega_k) e^{j\omega_k t}$, centrado em ω_k , sendo

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C(\omega_k) e^{j\omega_k t} \omega_0$$

correspondente ao somatório das áreas de todos os rectângulos, ou seja, aproximadamente, como se esboça na figura M5.39, à área sob a curva envolvente representada a tracejado. A aproximação será tanto maior quanto menor for ω_0 , ou seja, será tanto maior quanto maior for o período T_0 . No limite, com T_0 a tender para infinito, as riscas do espectro estarão infinitesimalmente próximas, tendendo o espectro discreto para um espectro contínuo na frequência, $\omega_k \rightarrow \omega$, com o incremento infinitesimal ω_0 a poder ser representada por $d\omega$, e o somatório correspondente ao cálculo da área sob a curva a dar lugar verdadeiramente a um integral

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(\omega_k) e^{j\omega_k t} \omega_0 \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Podemos então dizer que no limite, quando T_0 tende para infinito, o sinal $x(t)$ pode ser representado completamente, em todo o seu domínio, em função de exponenciais complexas de todos os valores de frequência

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

com

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Podemos então dizer que **um sinal contínuo não periódico tem um espectro contínuo**. $C(\omega)$ é designado por **função de densidade espectral**. Por conveniência de notação passaremos a designar a função de densidade espectral do sinal $x(t)$ por $X(\omega)$.

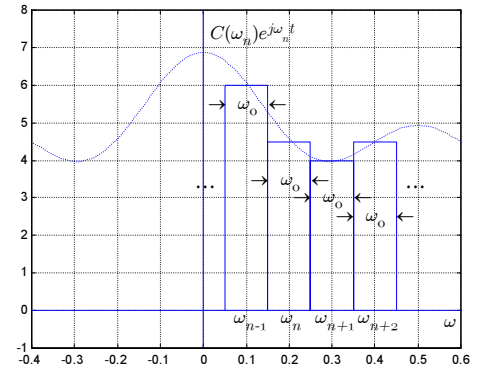


Figura M5.39

O par de equações

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

é conhecido como **par de transformadas de Fourier**, respectivamente a **transformada directa de Fourier** de $x(t)$ e a **transformada inversa de Fourier** de $X(\omega)$, usando-se também as notações

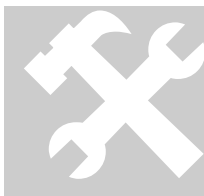
$$TF[x(t)] = \mathcal{F}[x(t)] = X(\omega)$$

$$TF^{-1}[X(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = x(t)$$

Sendo $d\omega = 2\pi df$, alternativamente, as definições resultam de imediato

$$TF[x(t)] = X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$TF^{-1}[X(f)] = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$



Apêndice 3: Exemplos de cálculo de TF de sinais contínuos não periódicos

Exemplo1

Calcule a TF do pulso rectangular centrado

$$x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right).$$

Por definição

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= A \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt \\ &= A \frac{1}{-j2\pi f} e^{-j\omega t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} \\ &= \frac{A}{j\omega} (e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}) \\ &= \frac{2A}{\omega} \frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{2j} \\ &= \frac{2A}{\omega} \operatorname{sen}\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) \\ &= A\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi} \tau\right) \\ &= A\tau \operatorname{sinc}(\tau f) \end{aligned}$$

Note que é uma função real e par. Naturalmente que a transformada inversa do sinal

$$X(\omega) = A\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi} \tau\right)$$

deverá ser o pulso rectangular cuja transformada directa lhe deu origem. Ou seja

$$TF^{-1}[X(\omega)] = TF^{-1}\left[A\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi} \tau\right)\right] = A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

não sendo necessário proceder ao cálculo explícito segundo a definição. Note que, sendo a transformada inversa por definição

$$\begin{aligned} TF^{-1}[X(\omega)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{A\tau}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi} \tau\right) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

o conhecimento *a priori* do resultado

$$TF^{-1}[X(\omega)] = A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

nos permite afirmar que

$$\frac{A\tau}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\tau\right) e^{j\omega t} d\omega = A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

pele que ficamos a conhecer o resultado do integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\tau\right) e^{j\omega t} d\omega = \frac{2\pi}{\tau} \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

que poderá ser útil em futuros desenvolvimentos analíticos.

Passando a usar uma seta bidireccional para significar a aplicação da TF directa e inversa, ou seja, escrevendo o par

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{TF} X(\omega) \\ x(t) &\xleftarrow{TF^{-1}} X(\omega) \end{aligned}$$

resumidamente na forma

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

Para o exemplo que temos vindo a analisar temos então o par de *Fourier*

$$A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow A\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\tau\right)$$

Exemplo 2

Calcule a TF do impulso de *Dirac* de área A

$$x(t) = A\delta(t)$$

Por definição

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= A \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

Como sabemos $\delta(t)x(t) = \delta(t)x(0)$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

então

$$\begin{aligned} X(\omega) &= A \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= A \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot 1 dt \\ &= A \end{aligned}$$

Concluimos assim que **a TF do impulso de Dirac contém todas as componentes de frequência com a mesma amplitude, ou seja, tem uma densidade espectral uniforme em todo o espectro de frequências.**

Naturalmente que a transformada inversa do sinal $X(\omega) = A$ deverá ser o impulso de *Dirac* cuja transformada directa lhe deu origem $TF^{-1}[X(\omega)] = A \delta(t)$. Ou seja, dado que conhecemos *a priori* o resultado da transformada inversa

$$\begin{aligned} TF^{-1}[X(\omega)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \\ &= A\delta(t) \end{aligned}$$

ficamos a saber que

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

que poderá ser extremamente útil em desenvolvimentos analíticos futuros. Para o exemplo que temos vindo a analisar temos então o par de *Fourier*

$$A\delta(t) \leftrightarrow A$$

Exemplo 3

Calcule a TF inversa do impulso de *Dirac* na frequência, de área $2\pi A$,

$$X(\omega) = 2\pi A\delta(\omega)$$

Por definição

$$\begin{aligned} TF^{-1}[X(\omega)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= A \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

À semelhança da alínea anterior, sendo $\delta(\omega)x(\omega) = \delta(\omega)x(0)$ e $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega = 1$ resulta

$$\begin{aligned} TF^{-1}[X(\omega)] &= A \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= A \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) \cdot 1 d\omega \\ &= A \end{aligned}$$

Naturalmente que a transformada directa do sinal $x(t) = A$ deverá ser o impulso de *Dirac* na frequência cuja transformada inversa lhe deu origem. Ou seja, deverá ser

$$\begin{aligned} TF[x(t)] &= A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt \\ &= 2\pi A\delta(\omega) \end{aligned}$$

o que nos permite a obtenção da relação

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt$$

Note que esta relação pode se obtida da relação obtida na alínea anterior

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

, atendendo a que $\delta(x) = \delta(-x)$. Podemos sintetizar o resultado escrevendo

$$\delta(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j\omega u} d\omega$$

Voltando à questão principal desta alínea, concluímos que a TF de uma constante é uma componente de frequência em $\omega = 0$. O resultado era espectável se pensarmos que uma constante no tempo pode ser interpretado como um sinal *dc*. Para o exemplo que temos vindo a analisar temos então o par de *Fourier*

$$A \leftrightarrow 2\pi A\delta(\omega)$$

Exemplo 4

Calcule a TF do sinal

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad , a > 0$$

Por definição

$$\begin{aligned} TF[x(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t(a+j\omega)} dt \\ &= -\frac{1}{a+j\omega} e^{-t(a+j\omega)} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned}$$

Para o exemplo que temos vindo a analisar temos então o par de *Fourier*

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega} \quad , a > 0$$

Exemplo 5

Calcule a TF do sinal.

$$x(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t) \quad , a > 0$$

Por definição

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t))e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}u(-t)e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-t(a+j\omega)} dt - \int_{-\infty}^0 e^{t(a-j\omega)} dt \\
&= \frac{1}{a+j\omega} - \frac{1}{a-j\omega} e^{t(a-j\omega)} \Big|_{-\infty}^0 \\
&= \frac{1}{a+j\omega} - \frac{1}{a-j\omega} \\
&= -j \frac{2\omega}{a^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

Temos então o par de *Fourier*

$$e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t) \leftrightarrow -j \frac{2\omega}{a^2 + \omega^2}, \quad a > 0$$

Exemplo 6

Calcule a TF do sinal

$$x(t) = \text{sign}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

Por definição

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(t)e^{-j\omega t} dt \\
&= -\int_{-\infty}^0 e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt
\end{aligned}$$

As dificuldades na resolução do primeiro integral levam-nos a procurar calcular a transformada de outro modo. Observe as figuras M5.40 e M5.41 em que se mostra o sinal referido no Exemplo 5 para valores de a sucessivamente mais próximos de zero. Note que no limite, com $a = 0$, a exponencial tende para $\text{sign}(t)$.

$$\lim_{a \rightarrow 0} (e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)) = \text{sign}(t)$$

Calculando a TF de ambos os membros da equação resulta

$$\begin{aligned}
TF \left[\lim_{a \rightarrow 0} (e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)) \right] &= TF[\text{sign}(t)] \\
\lim_{a \rightarrow 0} TF[e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)] &= X(\omega) \\
\lim_{a \rightarrow 0} \left(-j \frac{2\omega}{a^2 + \omega^2} \right) &= X(f)
\end{aligned}$$

logo

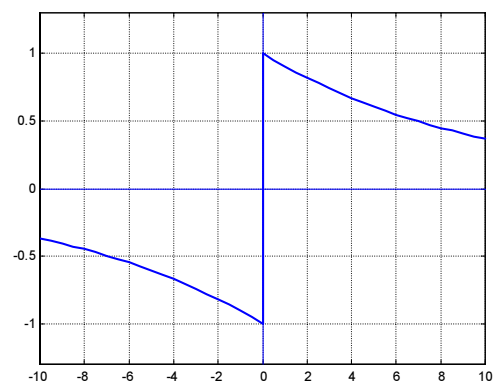


Figura M5.40

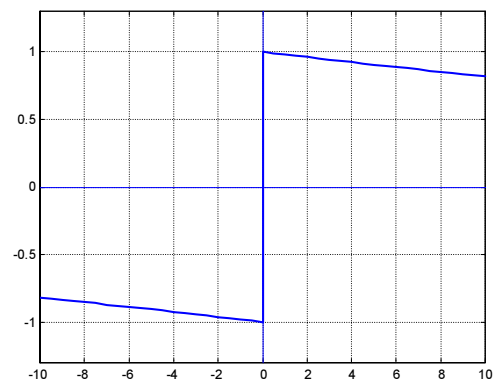


Figura M5.41

$$X(\omega) = -\frac{2j}{\omega}$$

Temos então o par de *Fourier*

$$\text{sign}(t) \leftrightarrow -\frac{2j}{\omega}$$

Exemplo 7

Calcule a TF do sinal escalão unitário

$$u(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1 & , t \geq 0 \end{cases}$$

O cálculo da transformada a partir da definição introduz um grau de dificuldade que podemos contornar. A transformada pode ser mais facilmente calculada se tivermos em atenção que o sinal $u(t)$ pode ser definida a partir do sinal $\text{sign}(t)$. Sendo

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign}(t)$$

resulta

$$\begin{aligned} TF[u(t)] &= TF\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign}(t)\right] \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \end{aligned}$$

Temos então o par de *Fourier*

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Exemplo 8

Calcule a TF do sinal pulso triangular centrado

$$x(t) = A \Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

Por definição de TF

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A \Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\tau}^0 \left(\frac{A}{\tau} t + A\right) e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\tau} \left(-\frac{A}{\tau} t + A\right) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

, fazendo $t = -u$ (logo $dt = -du$) no primeiro integral

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-\tau}^0 \left(\frac{A}{\tau} t + A \right) e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\tau} \left(-\frac{A}{\tau} t + A \right) e^{-j\omega t} dt \\
&= -\int_{\tau}^0 \left(-\frac{A}{\tau} u + A \right) e^{j\omega u} du + \int_0^{\tau} \left(-\frac{A}{\tau} t + A \right) e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_0^{\tau} \left(-\frac{A}{\tau} u + A \right) e^{j\omega u} du + \int_0^{\tau} \left(-\frac{A}{\tau} t + A \right) e^{-j\omega t} dt
\end{aligned}$$

, fazendo agora $u = t$

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_0^{\tau} \left(-\frac{A}{\tau} t + A \right) e^{j\omega t} dt + \int_0^{\tau} \left(-\frac{A}{\tau} t + A \right) e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_0^{\tau} \left(-\frac{A}{\tau} t + A \right) (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) dt \\
&= 2 \int_0^{\tau} \left(-\frac{A}{\tau} t + A \right) \cos(\omega t) dt
\end{aligned}$$

e integrando por partes

$$\begin{aligned}
u &= -\frac{A}{\tau} t + A & v &= \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \\
u' &= -\frac{A}{\tau} & v' &= \cos(\omega t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P[uv'] &= uv - P[u'v] \\
&= \left(-\frac{A}{\tau} t + A \right) \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) - P \left[-\frac{A}{\tau} \frac{1}{2\pi f} \sin(\omega t) \right] \\
&= \left(-\frac{A}{\tau} t + A \right) \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{A}{\tau \omega^2} \cos(\omega t)
\end{aligned}$$

, resulta

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= 2 \left[\left(-\frac{A}{\tau} t + A \right) \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{A}{\tau (2\pi f)^2} \cos(\omega t) \right]_0^{\tau} \\
&= -2 \frac{A}{\tau \omega^2} \cos(\omega \tau) + 2 \frac{A}{\tau \omega^2} \\
&= 2 \frac{A}{\tau \omega^2} (1 - \cos(\omega \tau)) \\
&= 2 \frac{A}{\tau \omega^2} 2 \sin^2 \left(\frac{\omega \tau}{2} \right) \\
&= A \tau \frac{\sin^2(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= A \tau \operatorname{sinc}^2(\tau f) \\
&= A \tau \operatorname{sinc}^2 \left(\tau \frac{\omega}{2\pi} \right)
\end{aligned}$$

Temos então o par de *Fourier*

$$A \Lambda \left(\frac{t}{\tau} \right) \leftrightarrow A \tau \operatorname{sinc}^2 \left(\tau \frac{\omega}{2\pi} \right)$$



Apêndice 4: Transformada de Fourier de sinais contínuos periódicos

Vimos em Apêndice 1 como podemos representar um sinal contínuo periódico através da SF e em Apêndice 2 como podemos representar um sinal contínuo não periódico através da TF. Vamos agora ver como podemos estender o conceito de transformada de *Fourier* a sinais contínuos periódicos.

Consideremos um qualquer sinal contínuo $x(t)$, periódico de período T_0 . Como sabemos, este pode ser representado completamente através de uma SF

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

Calculando a transformada de Fourier de ambos os membros

$$\begin{aligned} TF[x(t)] &= TF\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}\right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt\right) \end{aligned}$$

Dado que C_k não é uma função de t , uma vez que resulta da integração no domínio desta variável

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

, temos

$$\begin{aligned} TF[x(t)] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(C_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(C_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jt(\omega - k\omega_0)} dt\right) \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta(\omega - k\omega_0) \end{aligned}$$

Concluimos assim que a TF pode representar quer um sinal contínuo periódico quer um não periódico. **A TF de um sinal contínuo $x(t)$, periódico de período T_0 , é constituída por impulsos de Dirac localizados nas frequências múltiplas da frequência fundamental f_0 , de área igual aos coeficientes da SF do sinal**

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta(f - kf_0)$$

com

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Seja um sinal de energia $x_e(t)$ correspondente a um período de um sinal $x_p(t)$, periódico de período T_0 ,

$$x_e(t) = \begin{cases} x_p(t) & , |t| < T_0/2 \\ 0 & , |t| > T_0/2 \end{cases}$$

Os coeficientes da série de *Fourier* de $x_p(t)$ são

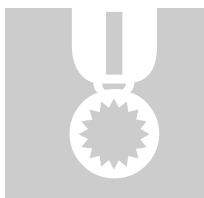
$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} X_e(k\omega_0) \end{aligned}$$

Concluimos assim que **a TF de um sinal contínuo $x(t)$, periódico de período T_0 , pode ser obtida das amostras da curva envolvente do seu espectro, envolvente esta correspondente à TF de um sinal de energia $x_e(t)$ correspondente a um período do sinal $x(t)$**

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_e(k\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0)$$

ou seja

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_e(\omega) \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_e(f) \delta(f - kf_0)$$



Ficha de Avaliação M5

N:						Nome:					Turma:				
----	--	--	--	--	--	-------	--	--	--	--	--------	--	--	--	--

Data limite de entrega 05-05-2003

(A ficha deve ser colocada, até à data limite, no recipiente apropriado existente junto ao Gabinete C – CEDET)

Grupo C

Exercício 1

Determine a expressão das TF dos seguintes sinais

- a) $x(t) = e^{j\omega_0 t}$
- b) $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$
- c) $x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t)$
- d) $x(t) = te^{-at}u(t)$, $a > 0$
- e) $x(t) = \cos^2(\omega_0 t)$
- f) $x(t) = \frac{1}{t}$

Grupo A

Exercício 2

Considere um trem de pulsos triangulares descrito analiticamente por

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A\Lambda\left(\frac{t - kT_0}{\tau}\right) , k \in \mathfrak{Z}$$

- a) Represente o sinal para $A = 1$, $\tau = 2$ e $T_0 = 8$.
- b) Determine a expressão dos coeficientes da SF do sinal, C_k , calculando explicitamente

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt , \forall t_1$$

- c) Verifique a relação entre a expressão dos C_k calculada na alínea anterior e a TF, $X_e(\omega)$, do sinal de energia, $x_e(t)$, correspondente a um período de $x(t)$. (pag. M5-19)
- d) Represente o espectro de amplitude do sinal. Admita $|k| \leq 10$, $A = 1$, $\tau = 2$ e $T_0 = 8$.
- e) Determine a expressão da TF do sinal.
- f) Represente o módulo da TF do sinal (admita $|\omega| \leq 10\omega_0$).