

LICENCIATURA EM ENGENHARIA DE SISTEMAS
DE TELECOMUNICAÇÕES E ELECTRÓNICA

Apontamentos de Análise de Sinais



© Prof. José Amaral
Versão 3.0 • 25-04-2003
Secção de Comunicações e Processamento de Sinal
ISEL-CEDET, Gabinete C • jda@isel.pt

Índice

OBJECTIVOS	1	SIMETRIA	22
1. PROPRIEDADES DA TF	2	SOBREPOSIÇÃO.....	23
DUALIDADE	2	TRANSLAÇÃO NO TEMPO.....	24
EXEMPLO 3.1	2	ESCALAMENTO NO TEMPO.....	24
SIMETRIA.....	2	TRANSLAÇÃO NA FREQUÊNCIA	25
EXEMPLO 3.2	2	DIFERENCIAÇÃO NO TEMPO.....	26
SOBREPOSIÇÃO.....	3	CONVOLUÇÃO	26
TRANSLAÇÃO NO TEMPO.....	3	MULTIPLICAÇÃO.....	27
EXEMPLO 3.3	3	INTEGRAÇÃO NO TEMPO.....	28
ESCALAMENTO NO TEMPO.....	4	APÊNDICE 2: TEOREMA DE	
EXEMPLO 3.4	4	PARSEVAL.....	30
TRANSLAÇÃO NA FREQUÊNCIA	4	SINAIS DE ENERGIA	30
EXEMPLO 3.5	4	SINAIS DE POTÊNCIA	31
DIFERENCIAÇÃO NO TEMPO.....	5	FICHA DE AVALIAÇÃO M6.....	32
EXEMPLO 3.6	5	GRUPO C	32
CONVOLUÇÃO	6	EXERCÍCIO 1	32
EXEMPLO 3.7	6	EXERCÍCIO 2	32
MULTIPLICAÇÃO.....	6	EXERCÍCIO 3	32
EXEMPLO 3.8	6		
INTEGRAÇÃO NO TEMPO.....	7		
EXEMPLO 3.9	7		
2. RELAÇÕES DE PARSEVAL.....	8		
SINAIS DE ENERGIA	8		
SINAIS DE POTÊNCIA	8		
MATLAB 6.1.....	9		
EXEMPLO 1.....	9		
EXEMPLO 2.....	10		
EXEMPLO 3.....	11		
EXEMPLO 4.....	12		
EXEMPLO 5.....	13		
EXEMPLO 6.....	14		
EXEMPLO 7.....	16		
EXERCÍCIO 6.1	17		
EXEMPLO 1.....	17		
EXEMPLO 2.....	17		
MATLAB 6.2.....	19		
EXEMPLO 1.....	19		
APÊNDICE 1: PROPRIEDADES DA			
TF	22		
DUALIDADE	22		

Propriedades da TF

TÓPICOS

Propriedades da TF

Teorema de Parseval

A transformada de *Fourier* tem um conjunto de propriedades importantes, que se expõem de seguida, e nos permitem, quando devidamente utilizadas, quer facilitar o cálculo de TF, que pode encerrar alguma complexidade analítica excessiva, quer uma mais profunda compreensão das propriedades dos sinais e seu interrelacionamento no tempo e na frequência.

O conhecimento e domínio da utilização das propriedades da TF permite simplificar significativamente o cálculo de TF de sinais, que, com base nas propriedades, facilmente se relacionam com TF de sinais já conhecidos. Note que este procedimento é na maior parte dos casos significativamente mais rápido do que a manipulação analítica das expressões resultantes do cálculo por recurso à biblioteca simbólica do *Matlab*. Algumas das propriedades, como sejam a propriedade da translação na frequência, da convolução, e da multiplicação, têm, para além da utilidade referida, um especial significado, associado ao estudo da amostragem, modulação, e estudo de sistemas lineares, que será evidenciado em próximos módulos.

Objectivos

No fim deste módulo o aluno deverá :

1. Conhecer e dominar a utilização das propriedades da TF.
2. Saber calcular potência de um sinal com base na informação espectral.



1. Propriedades da TF

Resumem-se aqui as propriedades da TF deduzidas no Apêndice 1.

Dualidade

A propriedade da **dualidade** da TF diz-nos que

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

Exemplo 3.1

A figura M6.1 mostra o sinal $x(t) = \Pi(t/4)$ e o respectivo espectro $X(\omega) = 4 \operatorname{sinc}(4\omega/2\pi)$. Com base na propriedade da dualidade, a TF do sinal $y(t) = 4 \operatorname{sinc}(4t/2\pi)$ é imediata, sendo $Y(\omega) = 2\pi \Pi(-\omega/4)$. A figura M6.2 mostra o sinal $y(t)$ e o respectivo espectro.

Simetria

Se $x(t)$ for um sinal real o seu espectro de amplitude é uma função par e o seu espectro de fase é uma função ímpar

$$|X(\omega)| = |X(-\omega)|$$

$$\arg\{X(\omega)\} = -\arg\{X(-\omega)\}$$

Se $x(t)$ for um sinal real e par a sua TF é real

$$X(\omega) = 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt$$

Se $x(t)$ for um sinal real e ímpar a sua TF é imaginária

$$X(\omega) = -2j \int_0^{\infty} x(t) \operatorname{sen}(\omega t) dt$$

Exemplo 3.2

Reveja os exemplos de cálculo da TF no Módulo 5 Matlab 5.2 e os comentários aí feitos relativamente à simetria dos sinais e respectivos espectros.

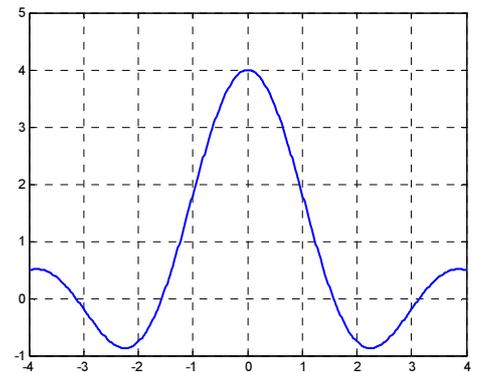
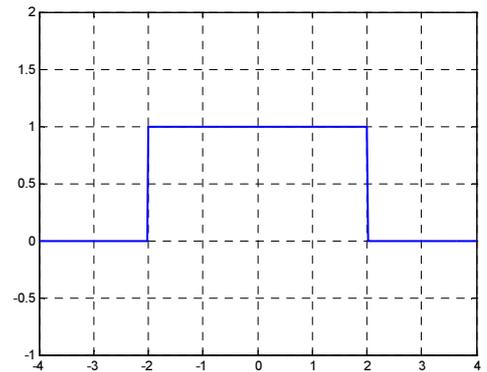


Figura M6.1

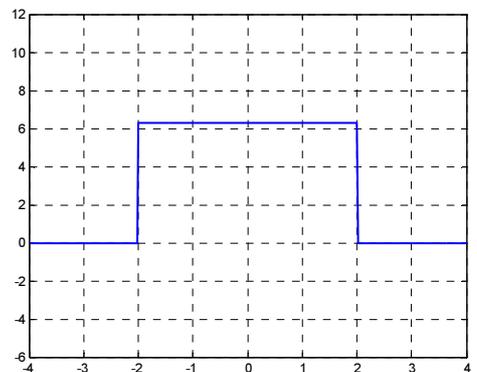
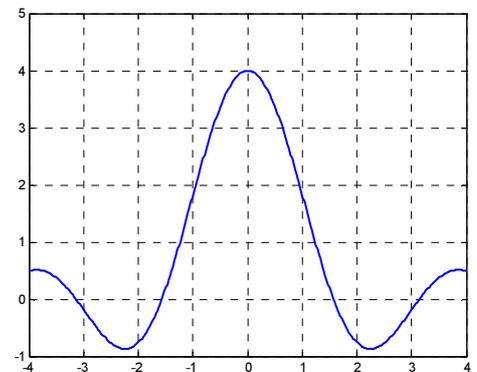


Figura M6.2

Sobreposição

A propriedade da **sobreposição** da TF diz-nos que

$$\begin{aligned} x_1(t) &\leftrightarrow X_1(\omega) \\ x_2(t) &\leftrightarrow X_2(\omega) \\ &\dots \\ x_n(t) &\leftrightarrow X_n(\omega) \\ x(t) = \sum_{k=1}^n a_k x_k(t) &\leftrightarrow X(\omega) = \sum_{k=1}^n a_k X_k(\omega) \end{aligned}$$

Ou seja, a TF da combinação linear de um conjunto de sinais é igual à combinação linear da TF de cada um dos sinais.

Translação no tempo

A propriedade da **translação no tempo** da TF diz-nos que

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow X(\omega) \\ x(t - t_0) &\leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega t_0} \end{aligned}$$

Note que, como seria de esperar, uma translação de um sinal de t_0 unidades no domínio do tempo não altera o espectro de amplitude do sinal, produzindo alterações apenas no espectro de fase, a que é adicionada a quantidade $-\omega t_0$.

Exemplo 3.3

A figura M6.3 mostra o espectro de fase do sinal $x(t) = \Pi(t/4)$, que se ilustrou na figura M6.1. A figura M6.4 mostra o sinal $y(t) = \Pi((t-2)/4)$ e respectivo espectro de amplitude e espectro de fase. Sendo $y(t) = x(t-2)$ resulta de imediato $Y(\omega) = X(\omega)e^{-2j\omega}$, pelo que $|Y(\omega)| = |X(\omega)|$, e $\arg\{Y(\omega)\} = \arg\{X(\omega)\} - 2\omega$.

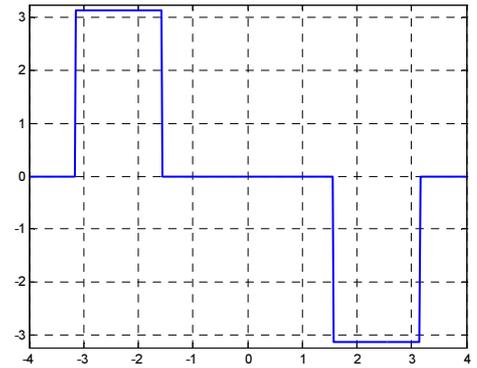


Figura M6.3

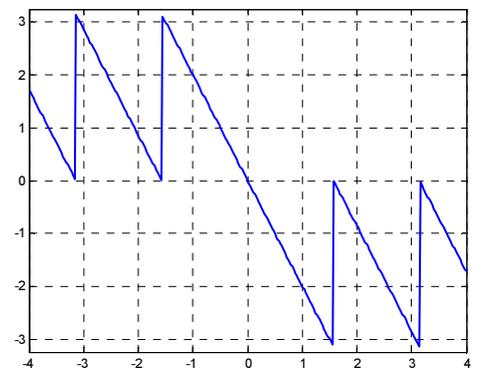
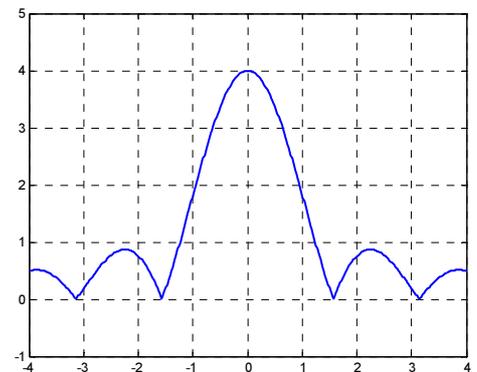
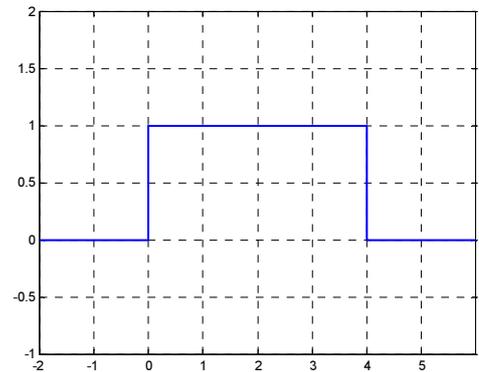


Figura M6.4

Escalamento no tempo

A propriedade de **escalamento no tempo** da TF diz-nos que

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Particularmente

$$x(-t) \leftrightarrow X(-f)$$

A propriedade de escalamento no tempo da TF diz-nos que a uma compressão no domínio do tempo corresponde uma expansão no domínio da frequência e vice-versa. O resultado é intuitivo. Se um sinal é comprimido passa a variar mais rapidamente no tempo e, necessariamente, o seu espectro deverá passar a conter frequências mais elevadas.

Exemplo 3.4

Sabendo-se que o espectro do sinal $x(t) = \Pi(t/4)$ é $X(\omega) = 4 \operatorname{sinc}(4\omega/2\pi)$, como se mostra na figura M6.1, o espectro do sinal $x(t) = \Pi(2t/4)$ é, atendendo à propriedade do escalamento no tempo, $X(\omega) = 2 \operatorname{sinc}(2\omega/2\pi)$, como se mostra na figura M6.5. De modo idêntico, e como se mostra na figura M6.6, o espectro do sinal $x(t) = \Pi(0.5t/4)$ é $X(\omega) = 8 \operatorname{sinc}(8\omega/2\pi)$.

Translação na frequência

A propriedade da **translação na frequência** da TF diz-nos que

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

$$x(t)e^{j\omega_c t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_c)$$

Da multiplicação de um sinal no tempo por um factor $e^{j\omega_c t}$ resulta o deslocamento de todo o seu espectro, que passa a estar centrado na frequência ω_c . Esta propriedade é a base do processo de modulação, extremamente importante em telecomunicações, e que será abordado em detalhe na cadeira de fundamentos de telecomunicações.

Exemplo 3.5

A TF do sinal $y(t) = \Pi(t/4) \cos(20t)$ é imediata a partir do conhecimento da TF do sinal

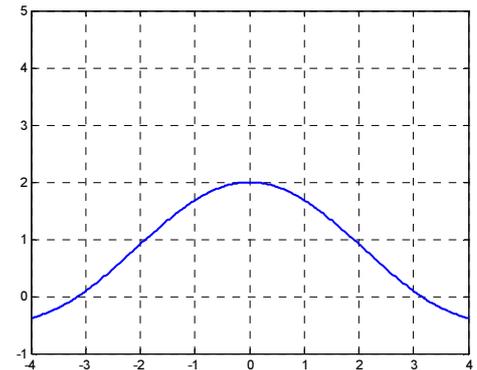
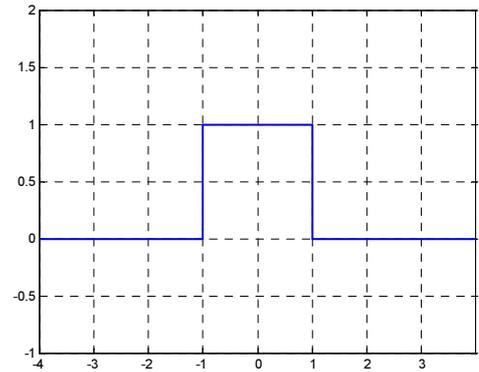


Figura M6.5

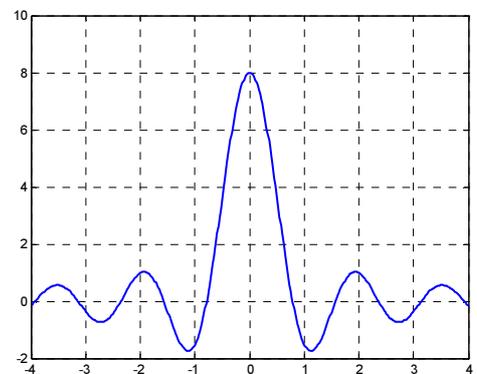
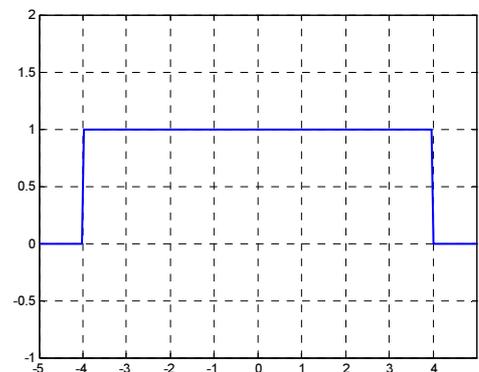


Figura M6.6

$x(t) = \Pi(t/4)$. Sendo $y(t) = x(t) \cos(20t)$
 $= x(t)0.5(e^{j20t} + e^{-j20t})$, com base na
 propriedade da translação na frequência resulta
 $Y(\omega) = 0.5X(\omega + 20) + 0.5X(\omega - 20)$. A
 figura M6.7 mostra o sinal $y(t)$ e respectivo
 espectro. Compare-a com a figura M6.1.

Diferenciação no tempo

A propriedade da **diferenciação no tempo** da TF diz-nos que

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(\omega)$$

Generalizando,

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega)$$

Concluimos assim que a diferenciação do sinal no tempo é equivalente à multiplicação do espectro do sinal por $j\omega$. Esta é uma propriedade útil na obtenção de TF de novos sinais a partir de sinais cujas TF são conhecidas. Note que, dada a forma do espectro $|\omega|$, do processo de diferenciação de um sinal resulta um outro sinal cujo espectro resulta do sinal original com as frequências próximas da origem atenuadas e as altas frequências ampliadas. Ou seja, o processo de diferenciação corresponde a uma filtragem passa-alto.

Exemplo 3.6

Como vimos, o sinal $x(t) = \Pi(t/4)$ tem uma TF $X(\omega) = 4 \text{sinc}(4\omega/2\pi) = 2 \text{sen}(2\omega)/\omega$. A TF do sinal $y(t) = dx(t)/dt$, tendo em atenção a propriedade de diferenciação no tempo, é $Y(\omega) = j\omega X(\omega) = 2j \text{sen}(2\omega)$. A figura M6.8 mostra o sinal $y(t)$ e respectivo espectro de amplitude. Analise e comente esta mesma figura à luz da propriedade da dualidade.

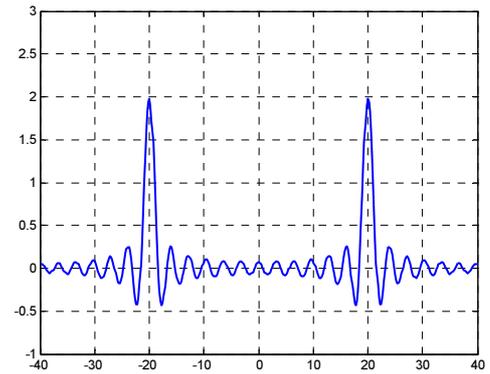
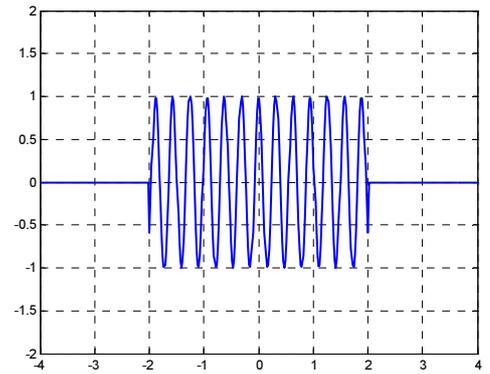


Figura M6.7

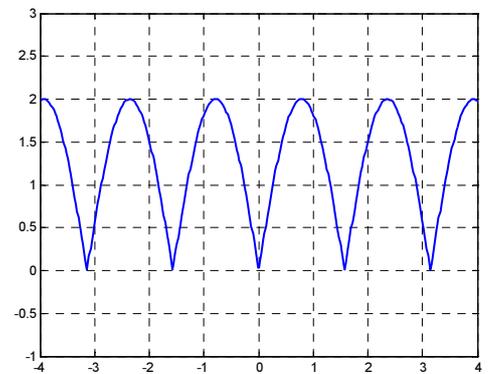
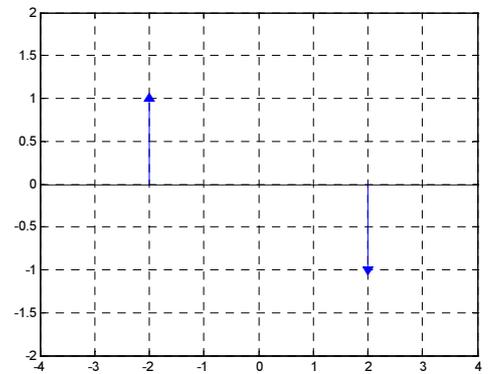


Figura M6.8

Convolução

A propriedade da **convolução** da TF diz-nos que

$$\begin{aligned}x(t) &\leftrightarrow X(\omega) \\y(t) &\leftrightarrow Y(\omega) \\x(t) * y(t) &\leftrightarrow X(\omega)Y(\omega)\end{aligned}$$

A propriedade da convolução pode ser útil ao permitir evitar o cálculo da convolução entre dois sinais, substituindo-o pelo cálculo da TF inversa do produto de duas TF

$$x(t) * y(t) = TF^{-1}[X(\omega)Y(\omega)]$$

, que se supõem conhecidas, sendo este processo analiticamente menos complexo. O processo é de grande utilidade e significado no estudo de sistemas, como se verá a partir do Módulo 9.

Exemplo 3.7

A convolução com ele mesmo do sinal $x(t) = \Pi(t/4)$, cuja TF é $X(\omega) = 4 \operatorname{sinc}(4\omega/2\pi)$, pode ser calculada a partir da TF inversa de $X(\omega)X(\omega) = 16 \operatorname{sinc}^2(4\omega/2\pi)$, que é o sinal pulso triangular centrado de amplitude $A = 4$ e duração $\tau = 2$, como se mostra na figura M6.9.

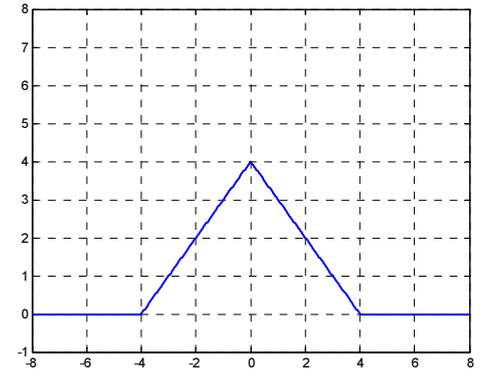
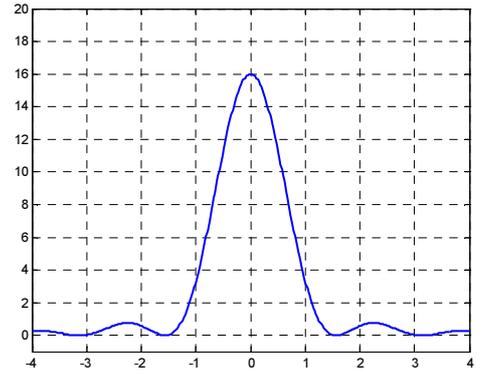


Figura M6.9

Multiplicação

A propriedade da **multiplicação** da TF diz-nos que

$$\begin{aligned}x(t) &\leftrightarrow X(f) \\y(t) &\leftrightarrow Y(f) \\x(t)y(t) &\leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)\end{aligned}$$

Exemplo 3.8

O produto do sinal $x(t) = \Pi(t/4)$, cujo espectro $X(\omega) = 4 \operatorname{sinc}(4\omega/2\pi)$ se mostra na figura M6.1, pelo sinal $y(t) = \cos(20t)$, cujo espectro $Y(\omega) = \pi\delta(\omega + 20) + \pi\delta(\omega - 20)$ se mostra na figura M6.10, tem uma TF $X(\omega) * Y(\omega) = 0.5X(\omega + 20) + 0.5X(\omega - 20)$ que se mostra na figura M6.11. Compare com o resultado obtido através da propriedade da translação na frequência.

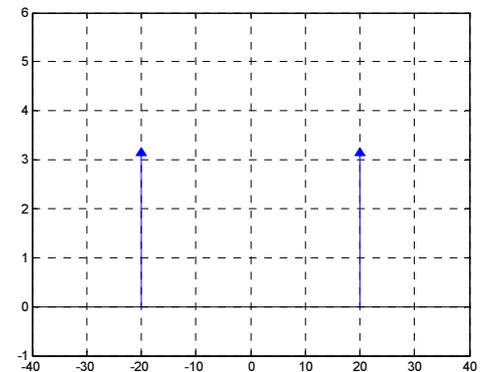


Figura M6.10

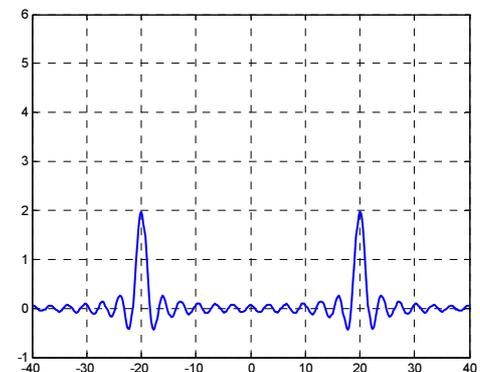


Figura M6.11

Integração no tempo

A propriedade da **integração no tempo** da TF diz-nos que

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^t x(v)dv \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

Note que, dada a forma do espectro $1/|\omega|$, do processo de diferenciação de um sinal resulta um outro sinal cujo espectro resulta do sinal original com as frequências próximas da origem ampliadas e as altas frequências atenuadas. Ou seja, o processo de integração corresponde a uma filtragem passa-baixo.

Exemplo 3.9

A figura M6.12 mostra o sinal $x(t) = \Pi((t+1)/2) - \Pi((t-1)/2)$ e respectivo espectro $X(\omega) = 4j \operatorname{sen}^2(\omega) / \omega$. A figura M6.13 mostra o sinal

$y(t) = \int_{-\infty}^t x(v)dv = 2\Lambda(t/2)$ e respectivo

espectro $Y(\omega) = \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
 $= 4 \operatorname{sinc}^2(2\omega/2\pi)$.

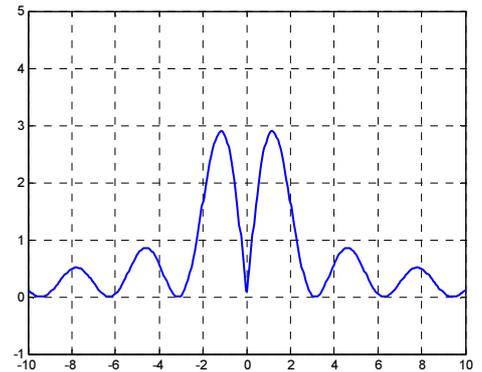
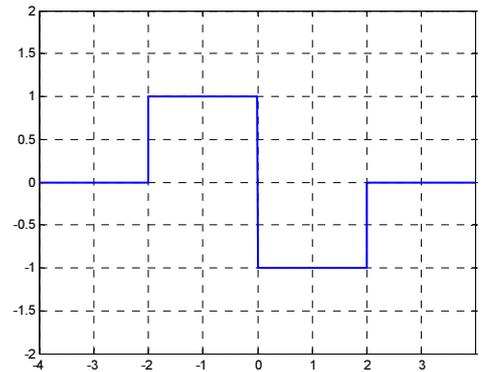


Figura M6.12

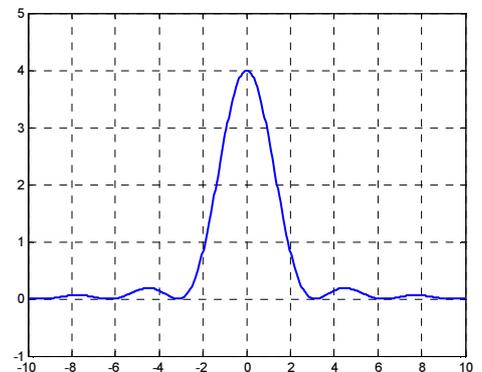
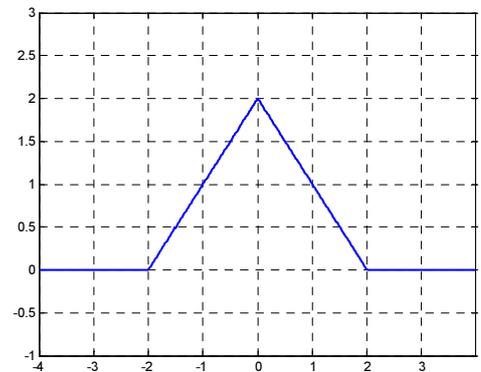
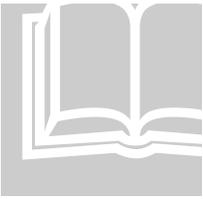


Figura M6.13



2. Relações de Parseval

As relações de Parseval estabelecem o modo como a energia ou a potência de um sinal pode ser calculada a partir da sua representação espectral.

Sinais de energia

A energia de um sinal de energia contínuo, $x(t)$, pode ser calculada tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência, sendo

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

$|X(\omega)|^2$ é designada **por densidade espectral de energia**.

Se $x(t)$ for um sinal real

$$|X(\omega)|^2 = |X(-\omega)|^2$$

, ou seja, a densidade espectral de energia é um função par positiva. Podemos escrever

$$E = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Sinais de potência

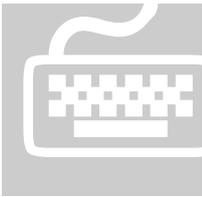
A potência média de um sinal contínuo periódico, de período T_0 , pode ser calculada quer no domínio do tempo quer no domínio da frequência, sendo

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2$$

$|C_k|^2$ representa então a potência média da harmónica de ordem k do espectro do sinal. Se $x(t)$ for real os coeficientes da SF são complexos conjugados, pelo que podemos escrever

$$P = C_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2$$

Note que pode calcular a energia total, ou a potência média, do sinal quer a partir da sua representação no tempo quer da sua representação na frequência, mas, evidentemente, a percentagem de energia, ou potência, durante um intervalo de tempo só poderá ser calculada a partir da sua representação temporal, e a percentagem de energia, ou potência, numa determinada faixa de frequência só poderá ser determinada a partir da representação espectral.



Matlab 6.1

Exemplo 1

Calcule a TF do sinal

$$x(t) = 5 \operatorname{sinc}(2t)$$

Recorrendo à biblioteca simbólica

```
syms t w;
F=fourier(sym('5*sinc(2*t)'),t,w);
```

Verificamos que a transformada não é resolvida. Podemos reescrever a expressão

$$x(t) = 5 \frac{\operatorname{sen}(2t\pi)}{2t\pi}$$

Recorrendo de novo à biblioteca simbólica

```
X= simplify(fourier(sym('5*sin(2*t*pi)/(2*t*pi)'),t,w))
X =
-5/2*Heaviside(w-2*pi)
+5/2*Heaviside(w+2*pi)
```

obtemos assim

$$X(\omega) = \frac{5}{2} \Pi\left(\frac{\omega}{4\pi}\right)$$

Note que, atendendo à propriedade da dualidade

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow X(\omega) \\ X(t) &\leftrightarrow 2\pi x(-\omega) \end{aligned}$$

, uma vez que conhecemos o par de *Fourier*

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow X(\omega) \\ A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) &\leftrightarrow A\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\tau\right) \end{aligned}$$

Era imediato que

$$\begin{aligned} X(t) &\leftrightarrow 2\pi x(-\omega) \\ A\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\tau\right) &\leftrightarrow 2\pi A\Pi\left(-\frac{\omega}{\tau}\right) \end{aligned}$$

Da identificação entre as expressões $A\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\tau\right)$ e $5 \operatorname{sinc}(2t)$ resulta $\frac{\tau}{2\pi} = 2 \Rightarrow \tau = 4\pi$ e

$A\tau = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{4\pi}$, pelo que

$$X(\omega) = 2\pi A\Pi\left(-\frac{\omega}{\tau}\right) = \frac{5}{2} \Pi\left(-\frac{\omega}{4\pi}\right) = \frac{5}{2} \Pi\left(\frac{\omega}{4\pi}\right)$$

As figuras M6.14 e M6.15, mostram, respectivamente, a evolução do sinal e do seu espectro.

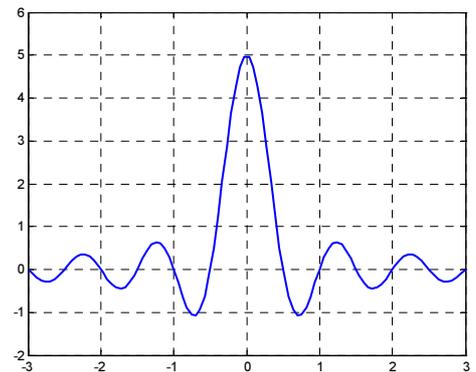


Figura M6.14

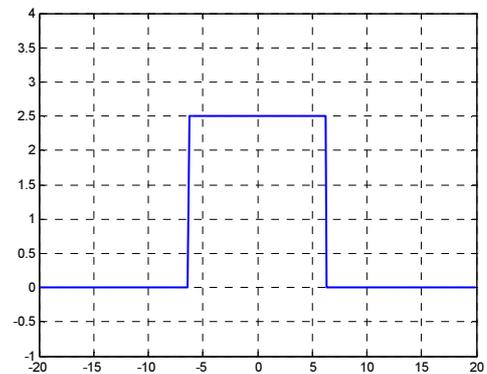


Figura M6.15

Exemplo 2

Recordemos (pag. M5-19) o cálculo da TF do sinal impulso unitário. Recorrendo à biblioteca de cálculo simbólico

```
syms t w
x=sym('Heaviside(t)');
X=fourier(x,t,w)
X =
    pi*Dirac(w)-i/w
```

Temos então

$$X(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

A figura M6.16 mostra o sinal $x(t) = u(t)$, e a figura M6.17 o correspondente espectro de amplitude. Interprete convenientemente a expressão de $X(\omega)$. Note a existência da componente dc

$$X(0) = \pi\delta(\omega)$$

, sendo

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega}, \quad \forall \omega \neq 0$$

Note que não deve recorrer à biblioteca de cálculo simbólico para simplificar a expressão

```
X2=simplify(fourier(x,t,w))
X2 =
    -i/w
```

Generalizando, quando recorrer à biblioteca simbólica, **tenha o cuidado verificar e interpretar fisicamente a existência de impulsos de Dirac em pontos em que determinada característica de um sinal tende assintoticamente para infinito antes de simplificar a expressão dessa característica.**

Podemos reconstruir o sinal recorrendo à TF inversa

```
x=ifourier(X,w,t)
x =
    1/2+1/2*Heaviside(t)-
    1/2*Heaviside(-t)
simplify(x)
ans =
    Heaviside(t)
```

No segundo caso obtemos

```
x2=ifourier(X2,w,t)
x2 =
    1/2*Heaviside(t)-
    1/2*Heaviside(-t)
simplify(x2)
ans =
    Heaviside(t)-1/2
```

, ou seja, um sinal de valor médio nulo, uma vez que não se teve em atenção a existência da componente dc . A figura M6. 18 mostra a evolução do sinal $x_2(t) = u(t) - 0.5$.

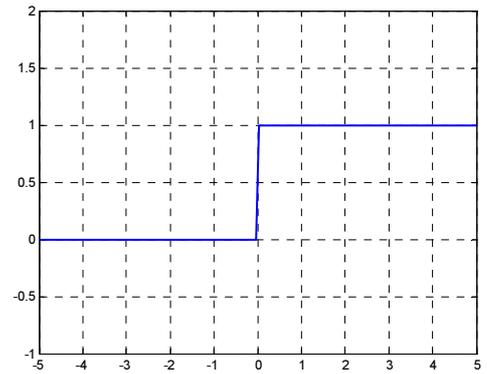


Figura M6.16

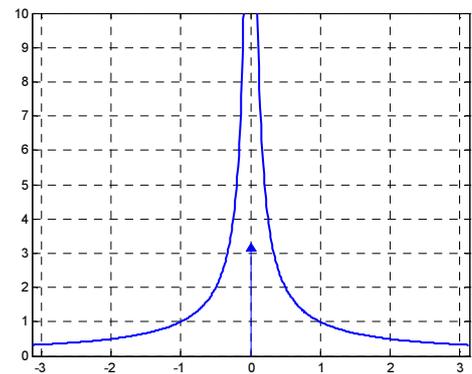


Figura M6.17

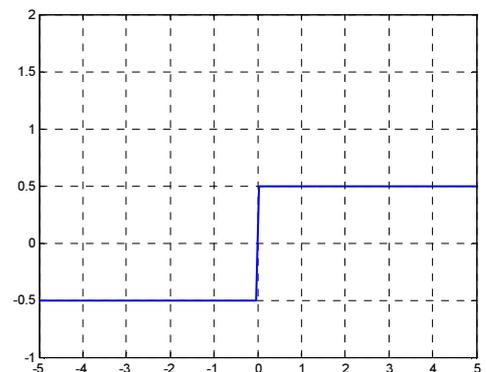


Figura M6.18

Exemplo 3

Na sequência do Exemplo 2 chama-se aqui à atenção para uma outra situação em que é comum a manipulação indevida da informação sobre a componente *dc* dos sinais. Consideremos de novo os sinais $x(t) = u(t)$ e $x_2(t) = u(t) - 0.5$. Podemos calcular a TF dos sinais com base na propriedade da integração ou na propriedade da diferenciação no tempo

$$y(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial t} \quad x(t) = \int_{-\infty}^t y(t) dt$$

$$Y(\omega) = j\omega X(\omega) \quad X(\omega) = \frac{1}{j\omega} Y(\omega) + \pi Y(0)\delta(\omega)$$

Recorrendo à biblioteca simbólica para aplicar propriedade da integração no tempo ao sinal $x(t) = u(t)$ temos

```
syms t w
x=sym('Heaviside(t)');
y=diff(x)
y =
    Dirac(t)
Y=(fourier(y,t,w))
Y =
    1
Y0=subs(Y,w,0)
Y0 =
    1
X=((1/j/w)*Y+pi*Y0*sym('Dirac(w)'))
X =
    pi*Dirac(w)-i/w
```

Obtendo assim o resultado esperado. Para o sinal $x_2(t) = u(t) - 0.5$ temos

```
x2=sym('-0.5+Heaviside(t)');
y2=diff(x2);
Y2=(fourier(y2,t,w));
Y20=subs(Y2,w,0);
X2=((1/j/w)*Y2+pi*Y20*sym('Dirac(w)'))
X2 =
    pi*Dirac(w)-i/w
```

O procedimento é incorrecto dado que o processo de derivação eliminou informação sobre o valor médio. Em situações deste tipo o procedimento deverá ser

$$x(t) = x_1(t) + C$$

$$X(\omega) = TF[x_1(t) + C]$$

$$= TF[x_1(t)] + TF[C]$$

$$= TF[x_1(t)] + 2\pi C\delta(\omega)$$

Para o caso em análise

```
x2=sym('-0.5+Heaviside(t)');
x3=sym('Heaviside(t)');
y3=diff(x3);
Y3=(fourier(y3,t,w));
Y30=subs(Y3,w,0);
X2=((1/j/w)*Y2+pi*Y20*sym('Dirac(w)'))+2*pi*(-0.5)*sym('Dirac(w)')
X2 =
    -i/w
```

, confirmado o resultado conhecido.

Exemplo 4

Calcule a TF do sinal representado na figura M6.19.

Podemos considerar o sinal como a sobreposição de vários escalões unitários

$$x(t) = -4 + 2u(t+2) + 4u(t) - 2u(t-2)$$

, e calcular assim a TF do sinal representado.

Recorrendo à biblioteca simbólica

```
syms t w
x=sym('-4+2*Heaviside(t+2)
      +4*Heaviside(t)-2*Heaviside(t-2)');
X=(fourier(x,t,w))
X =
    -4*pi*Dirac(w)+2*exp(2*i*w)*(pi*Dirac(w)-i/w)-4*i/w
    -2*exp(-2*i*w)*(pi*Dirac(w)-i/w)
```

Verificamos a existência de uma componente dc $-4\pi\delta(\omega)$ pelo que devemos ter o devido cuidado na simplificação, fazendo

```
XS=simplify(X)
XS =
    -4*(-sin(2*w)+i)/w
```

e seguidamente

```
X=XS+sym('-4*pi*Dirac(w)')
X =
    4*(sin(2*w)-i)/w-4*pi*Dirac(w)
```

Temos assim

$$\begin{aligned} X(\omega) &= 4 \frac{\text{sen}(2\omega)}{\omega} - \frac{4j}{\omega} - 4\pi\delta(\omega) \\ &= 8 \text{sinc}\left(\frac{2\omega}{\pi}\right) + \frac{4}{j\omega} - 4\pi\delta(\omega) \end{aligned}$$

Podemos verificar a correcção da TF calculada, recorrendo à TF inversa

```
x=simplify(ifourier(X,w,t))
x =
    -4+2*Heaviside(t+2)+4*Heaviside(t)-2*Heaviside(t-2)
```

Alternativamente, poderíamos ter recorrido à propriedade da integração no tempo. Tendo em atenção os procedimentos que se salientaram nos Exemplos 2 e 3, temos

```
syms t w
x1=sym('-4');
x2=sym('2*Heaviside(t+2)+4*Heaviside(t)-2*Heaviside(t-2)');
X1=fourier(x1,t,w);
y2=diff(x2);
Y2=(fourier(y2,t,w));
Y20=subs(Y2,w,0);
X2=((1/j/w)*Y2+pi*Y20*sym('Dirac(w)'))
X2 =
    -i/w*(2*exp(2*i*w)+4-2*exp(-2*i*w))+4*pi*Dirac(w)
X2=simplify(X2)+sym('4*pi*Dirac(w)');
X=X1+X2
X =
    4*(sin(2*w)-i)/w-4*pi*Dirac(w)
```

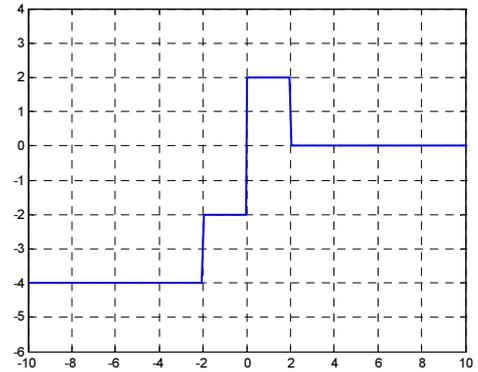


Figura M6.19

Exemplo 5

Calcule a TF do sinal

$$x(t) = 2\Pi\left(\frac{t-3}{2}\right)$$

Recorrendo à biblioteca de cálculo simbólico

```
syms t w
x=sym('2*Heaviside(t-2)
      -2*Heaviside(t-4)');
X=fourier(x,t,w)
X =
 2*exp(-2*i*w)*(pi*Dirac(w)-i/w) -
 2*exp(-4*i*w)*(pi*Dirac(w)-i/w)
X=simplify(X)
X =
 2*i*(-exp(-2*i*w)+exp(-4*i*w))/w
```

Temos então

$$X(\omega) = \frac{2j}{\omega}(e^{-4j\omega} - e^{-2j\omega})$$

, que não é simplificada pelo *Matlab*. Expressões do tipo $X(\omega) = (e^{Aj\omega} \pm e^{Bj\omega})$ podem ser simplificadas pondo em evidência o factor $e^{j\omega(A+B)/2}$. No caso em análise $(A+B)/2 = -3$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{2j}{\omega} e^{-3j\omega} (e^{-1j\omega} - e^{+1j\omega}) \\ &= \frac{2j}{\omega} e^{-3j\omega} \frac{(e^{-1j\omega} - e^{+1j\omega})}{2j} 2j \\ &= \frac{4}{\omega} \text{sen}(\omega) e^{-3j\omega} \\ &= 4 \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right) e^{-3j\omega} \end{aligned}$$

Recorrendo à biblioteca de cálculo simbólico

```
Xt=simplify(X/exp(-3*j*w))
Xt =
 4/w*sin(w)
X=Xt*exp(-3*j*w)
X =
 4/w*sin(w)*exp(-3*i*w)
```

A TF do sinal pode ser, alternativamente, calculada com base na propriedade da translação no tempo, $TF[x(t-t_0)] = X(\omega)e^{-j\omega t_0}$. Reconhecendo que o sinal em análise corresponde a um pulso rectangular centrado com um atraso $t_0 = 3$, resulta de imediato

$$X(\omega) = A\tau \text{sinc}\left(\tau \frac{\omega}{2\pi}\right) e^{-j3\omega}$$

Sendo $A = 2$ e $\tau = 2$, temos

$$X(\omega) = 4 \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right) e^{-3j\omega}$$

Note como a translação do sinal no domínio do tempo não altera o seu espectro de amplitude mas apenas o seu espectro de fase.

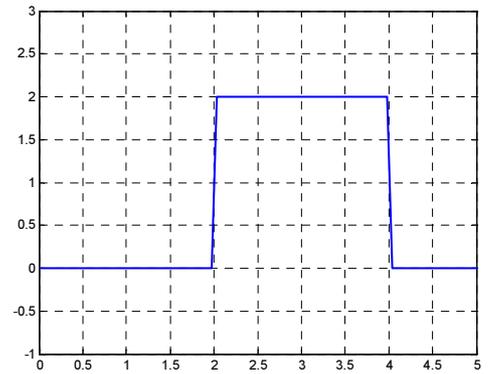


Figura M6.20

Exemplo 6

Calcule e compare as TF dos sinais

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$x_2(t) = \cos(2\omega_0 t)$$

$$x_3(t) = \cos\left(\frac{\omega_0}{2} t\right)$$

Recorrendo à biblioteca simbólica, as TF são imediatas

```
syms t w w0
x1=sym('cos(w0*t)');
x2=sym('cos(2*w0*t)');
x3=sym('cos(1/2*w0*t)');
X1=fourier(x1,t,w)
X1 =
    pi*Dirac(-w+w0)+pi*Dirac(w+w0)
X2=fourier(x2,t,w)
X2 =
    pi*Dirac(-w+2*w0)+pi*Dirac(w+2*w0)
X3=fourier(x3,t,w)
X3 =
    pi*Dirac(-w+1/2*w0)+pi*Dirac(w+1/2*w0)
```

Temos então

$$X_1(\omega) = \pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$X_2(\omega) = \pi\delta(\omega + 2\omega_0) + \pi\delta(\omega - 2\omega_0)$$

$$X_3(\omega) = \pi\delta(\omega + 0.5\omega_0) + \pi\delta(\omega - 0.5\omega_0)$$

Note que poderíamos ter em atenção o conhecimento da TF do sinal $x(t) = \cos(\omega_0 t)$, e, atendendo à propriedade do **escalamento no tempo**

$$TF[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

, ter feito

$$\begin{aligned} X_2(\omega) &= \frac{1}{|a|} X_1\left(\frac{\omega}{a}\right) \\ &= \frac{1}{2} X\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \delta\left(\frac{\omega}{2} + \omega_0\right) + \frac{\pi}{2} \delta\left(\frac{\omega}{2} - \omega_0\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \delta\left(\frac{\omega + 2\omega_0}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \delta\left(\frac{\omega - 2\omega_0}{2}\right) \end{aligned}$$

, e ainda, sendo

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

resulta finalmente

$$\begin{aligned} X_1(f) &= \frac{\pi}{2} \delta\left(\frac{\omega + 2\omega_0}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \delta\left(\frac{\omega - 2\omega_0}{2}\right) \\ &= \pi\delta(\omega + 2\omega_0) + \pi\delta(\omega - 2\omega_0) \end{aligned}$$

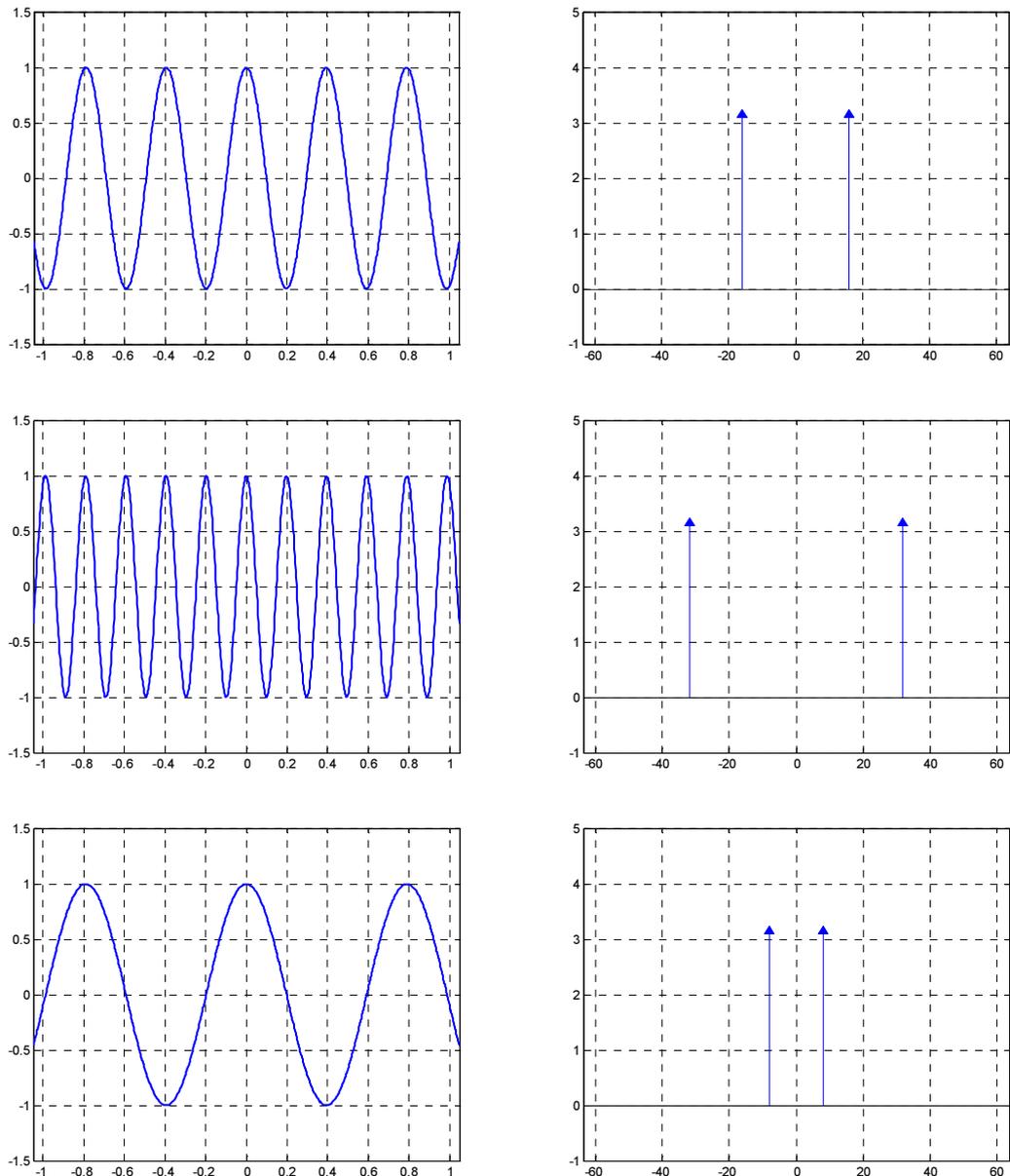


Figura M6.21

Note que se optou por um exemplo simples para ilustrar o recurso à propriedade do escalamento no tempo, para que a exposição resultasse mais clara. Neste caso o recurso à biblioteca simbólica resolve satisfatoriamente o cálculo das TF, não se justificando a utilização da propriedade. Para sinais cujas expressões analíticas sejam mais complexas, os resultados obtidos por recurso à biblioteca simbólica podem ser muito difíceis de simplificar e analisar, justificando-se então plenamente o recurso à propriedade para o cálculo das TF. De qualquer modo, o que está em causa é a interpretação dos resultados obtidos, que se reveste de particular significado. A figura M6. 21 mostra os sinais $x(t) = \cos(\omega_0 t)$, $x_2(t) = \cos(2\omega_0 t)$ e $x_3(t) = \cos(\omega_0 t/2)$ e respectivos espectros de amplitude. É bem visível que uma compressão no domínio do tempo corresponde a uma expansão no domínio da frequência, e uma expansão no domínio do tempo corresponde a uma compressão no domínio da frequência.

Exemplo 7

Com base na propriedade da **translação na frequência**

$$TF[x(t)e^{j\omega_c t}] = X(\omega - \omega_c)$$

calcule a TF do sinal

$$x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)\cos(\omega_0 t)$$

Temos então

$$\begin{aligned} x(t) &= A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)\cos(\omega_0 t) \\ &= A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)\left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right) \\ &= \frac{A}{2}\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2}\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)e^{-j\omega_0 t} \end{aligned}$$

Sendo

$$TF\left[\frac{A}{2}\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)\right] = \frac{A}{2}\tau \operatorname{sinc}\left(\tau \frac{\omega}{2\omega}\right)$$

resulta imediatamente, com base na sobreposição e na translação na frequência

$$X(\omega) = \frac{A}{2}\tau \operatorname{sinc}\left(\tau \frac{\omega - \omega_0}{2\pi}\right) + \frac{A}{2}\tau \operatorname{sinc}\left(\tau \frac{\omega + \omega_0}{2\pi}\right)$$

A figura M6. 22 mostra o sinal $x(t)$ com $A = 1$, $\tau = 2$ e $\omega_0 = 10\pi$ e respectivo espectro. Note como da multiplicação de um sinal $y(t)$ pelo sinal $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ resultou a translação do espectro original do sinal, $Y(\omega)$, sem qualquer distorção de amplitude ou de fase, para as frequências $\pm\omega_0$. Esta operação, designada por modulação de amplitude, e as suas propriedades e aplicações, será estudada em detalhe na cadeira de fundamentos de telecomunicações.

Recorrendo à biblioteca simbólica

```
syms t w w0
x=sym('A*(Heaviside(t+tau/2)-Heaviside(t-tau/2))*cos(w0*t)');
X=simplify(fourier(x,t,w))
X =
A*(-sin(1/2*tau*(w+w0))*w+sin(1/2*tau*(w+w0))*w0
+sin(1/2*tau*(-w+w0))*w+sin(1/2*tau*(-w+w0))*w0)/(-w+w0)/(w+w0)
```

O resultado requer simplificação manual. Mesmo para um exemplo simples como o apresentado, fica clara a vantagem da aplicação da propriedade no cálculo da TF.

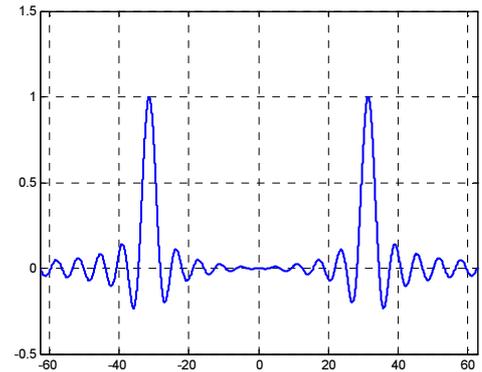
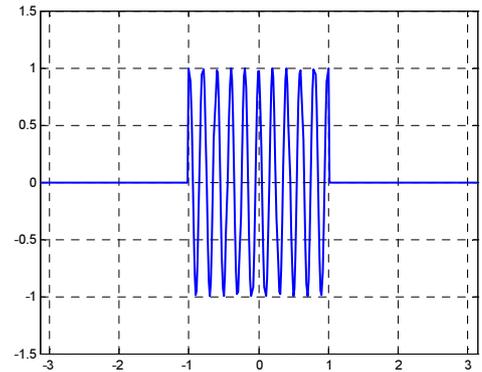


Figura M6.22



Exercício 6.1

Exemplo 1

Com base na propriedade da **convolução** da TF calcule a convolução de um pulso rectangular centrado com ele mesmo

$$x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

Com base na propriedade da convolução

$$TF[x(t) * x(t)] = X(\omega)X(\omega)$$

Como vimos

$$X(\omega) = A\tau \operatorname{sinc}\left(\tau \frac{\omega}{2\pi}\right)$$

Então

$$\begin{aligned} TF[x(t) * x(t)] &= A\tau \operatorname{sinc}\left(\tau \frac{\omega}{2\pi}\right) A\tau \operatorname{sinc}\left(\tau \frac{\omega}{2\pi}\right) \\ &= A^2 \tau^2 \operatorname{sinc}^2\left(\tau \frac{\omega}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

Aplicando a TF inversa a ambos os membros resulta

$$x(t) * x(t) = TF^{-1}\left[A^2 \tau^2 \operatorname{sinc}^2\left(\tau \frac{\omega}{2\pi}\right)\right]$$

Sendo a TF de um pulso triangular $x(t) = B\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)$

$$X(\omega) = B\tau \operatorname{sinc}^2\left(\tau \frac{\omega}{2\pi}\right)$$

Então

$$x(t) * x(t) = A^2 \tau \Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

Exemplo 2

Com base na propriedade da **multiplicação** da TF, calcule a convolução dos espectros

$$X(\omega) = A\tau_1 \operatorname{sinc}\left(\tau_1 \frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$Y(\omega) = B\tau_2 \operatorname{sinc}\left(\tau_2 \frac{\omega}{2\pi}\right)$$

, com $\tau_2 > \tau_1$.

Os espectros $X(\omega)$ e $Y(\omega)$ são facilmente reconhecíveis como resultantes da TF dos pulsos rectangulares

$$x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{\tau_1}\right)$$

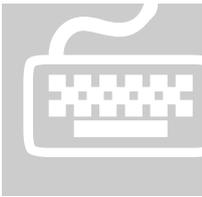
$$y(t) = B\Pi\left(\frac{t}{\tau_2}\right)$$

Assim sendo

$$\begin{aligned} X(\omega) * Y(\omega) &= TF[x(t)y(t)] \\ &= TF\left[A\Pi\left(\frac{t}{\tau_1}\right)\Pi B\left(\frac{t}{\tau_2}\right)\right] \end{aligned}$$

Sendo $\tau_2 > \tau_1$, resulta

$$\begin{aligned} X(\omega) * Y(\omega) &= TF\left[AB\Pi\left(\frac{t}{\tau_1}\right)\right] \\ &= AB\tau_1 \operatorname{sinc}(\tau_1 f) \end{aligned}$$



Matlab 6.2

Exemplo 1

Considere o sinal contínuo periódico, $x(t)$, descrito na figura M6.23

- Determine a TF do sinal. Esboce o módulo da TF do sinal até à 4ª harmónica.
- Calcule os coeficientes da SF do sinal. Esboce o módulo dos coeficientes da SF do sinal até à 4ª harmónica.
- Calcule a percentagem da potência do sinal contida até à 4ª harmónica..
- Represente graficamente a reconstrução do sinal com base nas primeiras 4 harmónicas e compare com o sinal original.
- Repita os procedimentos para 20 harmónicas.

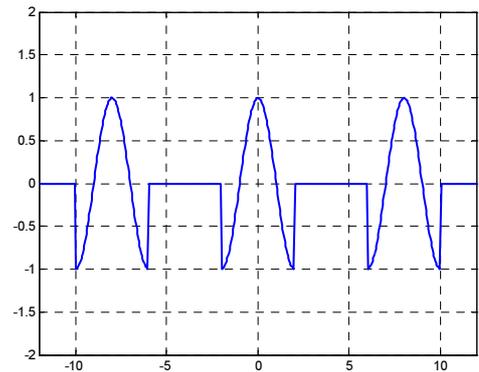


Figura M6.23

Recorrendo à biblioteca simbólica do Matlab, comecemos por considerar o sinal de energia correspondente a um período do sinal. A partir dos dados da figura

$$x_e(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\Pi\left(\frac{t}{4}\right)$$

```
syms t w
xe=sym('cos(pi/2*t)*(Heaviside(t+2)-Heaviside(t-2))')
```

Seguidamente definamos algumas constantes auxiliares à dedução e representação gráfica das grandezas: o número de períodos a representar na reconstrução, Nt ; o número de harmónicas a considerar; e a frequência angular e período fundamental (a partir da figura, $T_0 = 8, \omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi/4$)

```
Nt=3; % impar
Nk=4;
w0=pi/4;
T0=2*pi/w0;
```

Podemos seguidamente representar o sinal (coincidente com a figura M6.23)

```
ts=T0/200; tg=-T0/2:ts:(T0/2)-ts;
xge=subs(xe,t,tg);
xg=[];
tg=-Nt*T0/2:ts:(Nt*T0/2)-ts;
for i=1:Nt xg=[xg xge]; end;
figure(1);plot(tg,xg,'LineWidth',2);grid on
axis([min(tg),max(tg),min(xg)-0.5,1.5*max(xg)]);
```

Seguidamente calculamos a TF do sinal de energia

```
Xe=simplify(fourier(xe,t,w))
Xe =
-8*w*sin(2*w)/(2*w-pi)/(2*w+pi)
```

$$X_e(\omega) = \frac{8\omega}{\pi^2 - 4\omega^2} \operatorname{sen}(2\omega) = \frac{16\omega^2}{\pi^2 - 4\omega^2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)$$

Os coeficientes da SF do sinal são imediatos a partir da TF do sinal de energia

$$C_k = \frac{1}{T_0} X_e(k\omega_0)$$

```

k=-Nk:Nk;
w0g=w0*k;
ck=(1/T0)*subs(Xe,w,w0g);
nn=find(isinf(ck) | isnan(ck));
if length(nn)>=1
    for i=1:length(nn)
        ck(nn(i))=1/T0*double(limit(Xe,w,w0g(nn(i))));
    end
end
end

```

Note que tivemos o cuidado de detectar a possível existência de problemas de cálculo dos coeficientes em alguns pontos, utilizando as funções *isinf* e *isnan*, contornando o problema através do cálculo do limite (a função *limit* não aceita um vector como argumento, daí ser necessário utilizar um ciclo *for*). A partir da TF do sinal de energia, $X_e(\omega)$, ou dos coeficientes da SF, a TF do sinal $x(t)$ é imediata

$$\begin{aligned}
 X(\omega) &= \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_e(\omega) \delta(\omega - k\omega_0) \\
 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta(\omega - k\omega_0)
 \end{aligned}$$

Podemos agora proceder à representação gráfica. Começamos por representar o módulo da envolvente, proporcional ao módulo da TF do sinal de energia

```

wg=-Nk*w0:ts:Nk*w0;
Xg=2*pi/T0*subs(Xe,w,wg);
figure(2);plot(wg,abs(Xg),'-');
axis([min(wg),max(wg),-0.1,
      1.1*max(abs(Xg))]);
grid on

```

Sobrepondo de seguida o módulo da TF do sinal

```

X0g=2*pi*ck;
hold on;
it=find(abs(X0g)>eps*10);
stem(w0g(it),abs(X0g(it)),'^','filled')
it=find(abs(X0g)<eps*10);
stem(w0g(it),abs(X0g(it)),'-','filled')
axis([min(w0g),max(w0g),-0.1,
      1.1*max(abs(X0g))]);
hold off

```

, e representamos por fim o módulo dos coeficientes da SF do sinal

```

figure(3);
stem(w0g,abs(ck),'filled')
axis([min(w0g),max(w0g),-0.1,1.1*max(abs(ck))]);
grid on

```

A figura M6.24 mostra o módulo da TF do sinal, e a figura M6.25 mostra o módulo dos coeficientes da SF do sinal.

Para calcular a percentagem da potência do sinal contida até à 4ª harmónica ($4\omega_0$) basta calcular a potência do sinal com base na descrição do sinal no tempo

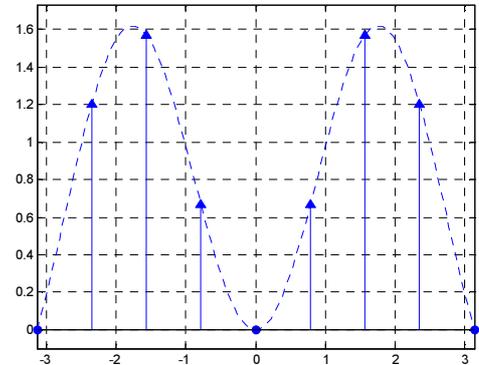


Figura M6.24

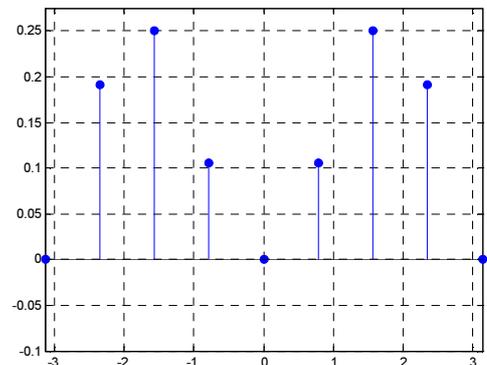


Figura M6.25

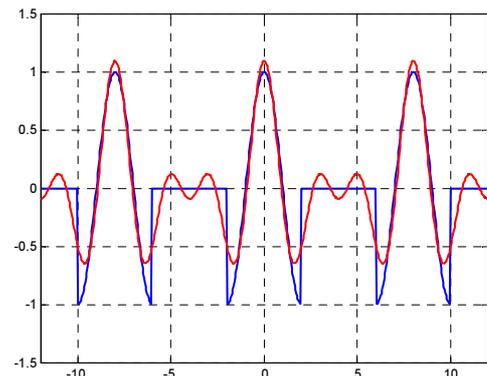


Figura M6.26

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt$$

, e a potência contida até à 4ª harmónica com base na descrição do sinal na frequência

$$P_{\leq 4} = \sum_{k=-4}^4 |C_k|^2$$

, sendo a percentagem procurada

$$P_{\%4} = \frac{P_{\leq 4}}{P}$$

```
PT=double(1/T0*int(xe.^2,t,
                  -T0/2,T0/2))
PT =
    0.2500
P=sum(ck.*conj(ck))
P =
    0.2205
P/PT
ans =
    0.8819
```

Concluimos assim que 88.19% da potência do sinal está contida até à quarta harmónica.

A reconstrução do sinal é imediata a partir dos coeficientes da SF

$$x(t) = \sum_{k=-4}^4 C_k e^{jk\omega_0 t}$$

```
xb=exp(j*w0*k'*tg);
xg=ck*xb;
figure(1);hold on
plot(tg,real(xg),'r','LineWidth',2)

hold off
```

A figura M6.26 mostra o gráfico do sinal reconstruído utilizando 4 harmónicas, sobreposto ao sinal original.

A repetição dos procedimentos utilizando 20 harmónicas apenas exige a mudança do valor da variável N_k para 20. As figuras M6.27 e M6.28

mostram, sucessivamente, a TF e os coeficientes da SF do sinal, obviamente que os gráficos são idênticos a M6.24 e M6.25, mostrando-se agora um maior número de riscas. A figura M6.29 mostra o gráfico do sinal reconstruído utilizando 20 harmónicas, sobreposto ao sinal original. Relativamente à percentagem de potência até à 20ª harmónica temos agora

```
PT=double(1/T0*int(xe.^2,t,-T0/2,T0/2))
PT =
    0.2500
P=sum(ck.*conj(ck))
P =
    0.2449
P/PT
ans =
    0.9796
```

, um total de 97.96% da potência total.

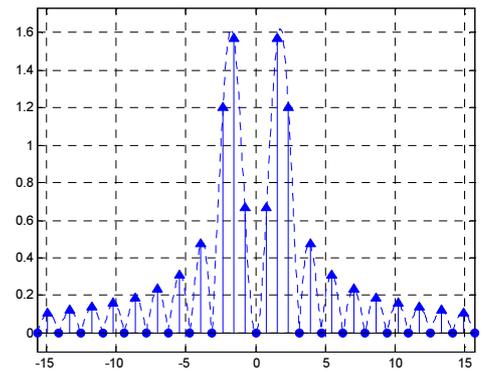


Figura M6.27

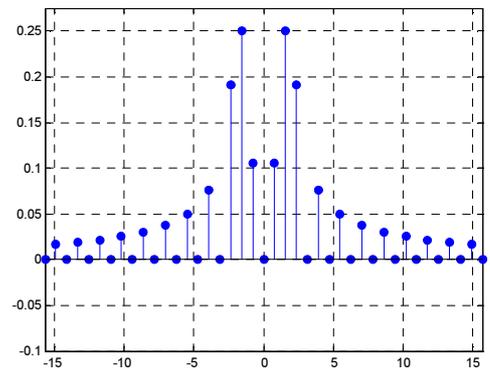


Figura M6.28

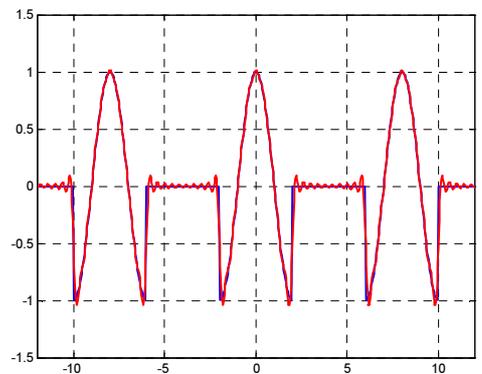


Figura M6.29



Apêndice 1: Propriedades da TF

Dualidade

Seja o sinal $x(t)$ tal que a sua expressão analítica é, no domínio do tempo, idêntica a uma expressão analítica, $Y(\omega)$, TF de um sinal $y(t)$

$$x(t) = Y(t)$$

Sendo

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

, então, substituindo ω por u

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(u) e^{jut} du$$

, substituindo t por $-\omega$

$$y(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(u) e^{-ju\omega} du$$

, e finalmente, substituindo u por t , concluímos que

$$\begin{aligned} y(-\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) \end{aligned}$$

Resumindo, dado o sinal

$$x(t) = Y(t)$$

a sua TF pode ser facilmente encontrada se for conhecida a transformada inversa de $Y(\omega)$, sendo

$$X(\omega) = 2\pi y(-\omega)$$

A propriedade da **dualidade** da TF diz-nos que

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow X(\omega) \\ X(t) &\leftrightarrow 2\pi x(-\omega) \end{aligned}$$

Simetria

Sendo a TF do sinal $x(t)$ definida por

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

então

$$X(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt$$

pelo que, se $x(t)$ for um sinal real, ou seja $x(t) = x^*(t)$, resulta que

$$\begin{aligned} X^*(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt \\ &= X(-\omega) \end{aligned}$$

Concluimos então que

Se $x(t)$ for um sinal real o seu espectro de amplitude é uma função par e o seu espectro de fase é uma função ímpar

$$\begin{aligned} |X(\omega)| &= |X(-\omega)| \\ \arg\{X(\omega)\} &= -\arg\{X(-\omega)\} \end{aligned}$$

Saliente-se ainda que, sendo

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)(\cos(\omega t) + j \operatorname{sen}(\omega t))dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(\omega t)dt + j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \operatorname{sen}(\omega t)dt \end{aligned}$$

resulta que, se $x(t)$ for um sinal real e par

$$x(t) = x(-t)$$

o segundo integral se anula, e se $x(t)$ for um sinal real e ímpar

$$x(t) = -x(-t)$$

o primeiro integral se anula. Concluimos assim que:

Se $x(t)$ for um sinal real e par a sua TF é real

$$X(\omega) = 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos(\omega t)dt$$

Se $x(t)$ for um sinal real e ímpar a sua TF é imaginária

$$X(\omega) = -2j \int_0^{\infty} x(t) \operatorname{sen}(\omega t)dt$$

Sobreposição

Admitamos que um sinal $x(t)$ pode ser considerado como a combinação linear de dois outros sinais, $x_1(t)$ e $x_2(t)$

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$$

, em que a_1 e a_2 são constantes arbitrárias. Então a TF de $x(t)$, por definição, é

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (a_1x_1(t) + a_2x_2(t))e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} a_1x_1(t)e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} a_2x_2(t)e^{-j\omega t} dt \\
&= a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)
\end{aligned}$$

Fica assim claro que é fácil conhecer a TF do sinal $x(t)$ uma vez que sejam conhecidas as TF dos sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Generalizando a n sinais, a propriedade da **sobreposição** da TF permite-nos dizer que

$$\begin{aligned}
x_1(t) &\leftrightarrow X_1(\omega) \\
x_2(t) &\leftrightarrow X_2(\omega) \\
&\dots \\
x_n(t) &\leftrightarrow X_n(\omega) \\
x(t) = \sum_{k=1}^n a_k x_k(t) &\leftrightarrow X(\omega) = \sum_{k=1}^n a_k X_k(\omega)
\end{aligned}$$

Translação no tempo.

Considere um sinal deslocado no tempo de t_o unidades, $x(t - t_o)$, Por definição, a sua TF é

$$TF[x(t - t_o)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_o)e^{-j\omega t} dt$$

fazendo $u = t - t_o$, resulta

$$\begin{aligned}
TF[x(t - t_o)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\omega(u+t_o)} du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\omega u} e^{-j\omega t_o} du \\
&= e^{-j\omega t_o} \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\omega u} du
\end{aligned}$$

$$TF[x(t - t_o)] = X(\omega)e^{-j\omega t_o}$$

É então fácil conhecer a TF de $x(t - t_o)$, conhecida que seja a TF de $x(t)$. A **propriedade da translação** da TF diz-nos que

$$\begin{aligned}
x(t) &\leftrightarrow X(\omega) \\
x(t - t_o) &\leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega t_o}
\end{aligned}$$

Escalamento no tempo

Considere um sinal resultante do escalamento do tempo de um sinal conhecido $x(t)$

$$x(at)$$

Por definição a sua TF é

$$TF[x(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t} dt$$

Fazendo $u = at$, e admitido $a > 0$ resulta

$$\begin{aligned} TF[x(at)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j\frac{\omega}{a}u} \frac{1}{a} du \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j\frac{\omega}{a}u} du \\ &= \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

admitindo $a < 0$, resulta

$$\begin{aligned} TF[x(at)] &= \int_{\infty}^{-\infty} x(u) e^{-j\frac{\omega}{a}u} \frac{1}{a} du \\ &= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j\frac{\omega}{a}u} du \\ &= \frac{1}{-a} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

É então fácil conhecer a TF de $x(at)$, conhecida que seja a TF de $x(t)$. A propriedade de **escalamento no tempo** da TF diz-nos que

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow X(\omega) \\ x(at) &\leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

Particularmente

$$x(-t) \leftrightarrow X(-f)$$

Translação na frequência

Considere um sinal resultante da multiplicação de um sinal conhecido, $x(t)$, por um factor $e^{j\omega_c t}$

$$x(t)e^{j\omega_c t}$$

Por definição, a sua TF é

$$\begin{aligned} TF[x(t)e^{j\omega_c t}] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega_c t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega - \omega_c)t} dt \\ &= X(\omega - \omega_c) \end{aligned}$$

É então fácil conhecer a TF de $x(t)e^{j\omega_c t}$, conhecida que seja a TF $x(t)$. A propriedade da **translação na frequência** da TF diz-nos que

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow X(f) \\ x(t)e^{j\omega_c t} &\leftrightarrow X(\omega - \omega_c) \end{aligned}$$

Diferenciação no tempo

Considere um sinal resultante de um processo de diferenciação no tempo de um sinal conhecido $x(t)$

$$\frac{dx(t)}{dt}$$

Por definição, a TF inversa de um sinal $x(t)$ é

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Derivando ambos os membros resulta

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \left(X(\omega) e^{j\omega t} \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \frac{de^{j\omega t}}{dt} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= TF^{-1}[j\omega X(\omega)] \end{aligned}$$

logo, aplicando a TF a ambos os membros, resulta

$$TF \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] = j\omega X(\omega)$$

É então fácil conhecer a TF de $dx(t)/dt$, conhecida que seja a TF de $x(t)$. A propriedade da **diferenciação no tempo** da TF diz-nos que

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow X(\omega) \\ \frac{dx(t)}{dt} &\leftrightarrow j\omega X(\omega) \end{aligned}$$

Generalizando,

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega)$$

Convolução.

Considere a convolução entre dois sinais, $x(t)$ e $y(t)$,

$$\chi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) y(t-u) du$$

por definição, a TF da convolução resulta

$$\begin{aligned}
TF[\chi(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t) e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(u) y(t-u) du \right) e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(u) y(t-u) e^{-j\omega t} dt \right) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y(t-u) e^{-j\omega t} dt \right) du
\end{aligned}$$

Ora

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t-u) e^{-j\omega t} dt$$

é por definição a TF do sinal $y(t-u)$. Atendendo à propriedade da translação no tempo

$$TF[y(t-u)] = Y(\omega) e^{-j\omega u}$$

Assim sendo, temos

$$\begin{aligned}
TF[\chi(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u) Y(\omega) e^{-j\omega u} du \\
&= Y(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j\omega u} du \\
&= X(\omega) Y(\omega)
\end{aligned}$$

É então fácil conhecer a TF da convolução entre dois sinais, desde que sejam conhecidas as TF de cada um dos sinais. A propriedade da **convolução** da TF diz-nos que

$$\begin{aligned}
x(t) &\leftrightarrow X(\omega) \\
y(t) &\leftrightarrow Y(\omega) \\
x(t) * y(t) &\leftrightarrow X(\omega) Y(\omega)
\end{aligned}$$

Multiplicação.

Considere a multiplicação entre dois sinais, $x(t)$ e $y(t)$. Por definição, as transformadas inversas de Fourier de cada um dos sinais são

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega
\end{aligned}$$

, pelo que o produto entre os dois sinais pode ser expresso na forma

$$\begin{aligned}
x(t)y(t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(h) e^{jht} Y(g) e^{jgt} dg dh \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(h) Y(g) e^{j(h+g)t} dg dh
\end{aligned}$$

Fazendo $h + g = \omega$ resulta

$$x(t)y(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(h)Y(\omega - h) dh e^{j\omega t} d\omega$$

Ora, o integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(h)Y(\omega - h) dh$$

é, por definição de convolução,

$$X(\omega) * Y(\omega)$$

Assim sendo

$$x(t)y(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) * Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

O segundo membro corresponde, por definição, à TF inversa da convolução $X(\omega) * Y(\omega)$

$$x(t)y(t) = TF^{-1}[X(\omega) * Y(\omega)]$$

De onde, aplicando a TF a ambos os membros, resulta

$$TF[x(t)y(t)] = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$$

É então fácil conhecer a TF do produto entre dois sinais, fácil que seja conhecer a convolução entre as TF de cada um dos sinais. A propriedade da **multiplicação** da TF diz-nos que

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow X(f) \\ y(t) &\leftrightarrow Y(f) \\ x(t)y(t) &\leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega) \end{aligned}$$

Integração no tempo.

Considere a convolução entre um sinal $x(t)$ e o sinal escalão unitário $u(t)$

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(v)u(t - v)dv$$

Sendo $u(v)$ nulo para $v < 0$, então $u(-v)$ é nulo para $v > 0$ e, logo, $u(-v + t) = u(t - v)$ é nulo para $v > t$. Observe a figura M6.xx para uma melhor compreensão. Assim sendo, resulta

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(v) dv$$

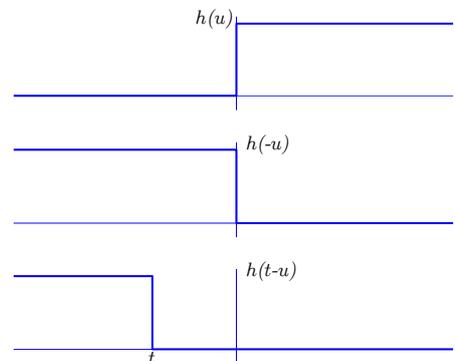


Figura M6.30

Aplicamos a TF a ambos os membros da

equação. Resulta então

$$\begin{aligned} TF\left[\int_{-\infty}^t x(v) dv\right] &= TF[x(t) * u(t)] \\ &= X(\omega)U(\omega) \end{aligned}$$

Dado que

$$U(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Então

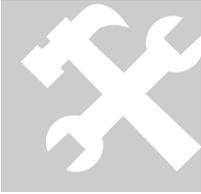
$$\begin{aligned} TF\left[\int_{-\infty}^t x(v) dv\right] &= X(\omega)\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right) \\ &= \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(\omega)\delta(\omega) \\ &= \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega) \end{aligned}$$

É então fácil conhecer a TF da integração no tempo de um sinal, desde que seja conhecida a TF do sinal. Note que caso a componente *dc* do sinal seja nula então a integração no tempo corresponde simplesmente à divisão por $j\omega$.

$$TF\left[\int_{-\infty}^t x(v) dv\right] = \frac{1}{j\omega} X(\omega) \quad , \text{ se } X(0) = 0$$

A propriedade da **integração no tempo** da TF diz-nos que

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow X(\omega) \\ \int_{-\infty}^t x(v) dv &\leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega) \end{aligned}$$



Apêndice 2: Teorema de Parseval

Sinais de energia

Como vimos, define-se a energia, E , de um sinal contínuo $x(t)$ como

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt$$

A definição só tem interesse se o resultado do integral for finito não nulo, ou seja, para sinais de energia. Um sinal de energia pode ser convenientemente representado pela sua TF, sendo, como vimos

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

O conjugado do sinal é, naturalmente,

$$x^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega)e^{-j\omega t} d\omega$$

Substituindo a expressão na definição de energia do sinal, resulta

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega)e^{-j\omega t} d\omega dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega)X(\omega)d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Concluimos assim que a energia do sinal pode ser calculada a partir da representação do sinal no domínio da frequência. A energia de um sinal de energia contínuo, $x(t)$, pode ser calculada tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência, sendo

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

A relação anterior é conhecida como teorema de Rayleigh, ou **teorema de Parseval para sinais de energia**. A função $|X(\omega)|^2$ é designada por **densidade espectral de energia**, uma vez que dá conta da distribuição de energia do sinal ao longo do seu espectro do . Como vimos, se $x(t)$ for um sinal real o seu espectro de amplitude é uma função par. Resulta então que

$$|X(\omega)|^2 = |X(-\omega)|^2$$

, ou seja, a densidade espectral de energia é um função par positiva. Podemos escrever

$$E = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Sinais de potência

Como vimos, define-se a potência média, P , de um sinal contínuo $x(t)$ como

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

A definição só tem interesse se o resultado do integral for finito não nulo, ou seja, para sinais de potência. Estamos particularmente interessados nos sinais de potência que são sinais periódicos, para os quais o cálculo da potência média se pode resumir a um período, ou seja

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt$$

Um sinal contínuo periódico pode ser convenientemente representado pela sua SF, sendo, como vimos

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Sendo

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^* e^{-jk\omega_0 t}$$

resulta para o potência do sinal

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) x^*(t) dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left(x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^* e^{-jn\omega_0 t} \right) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(C_n^* \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^* C_n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \end{aligned}$$

Concluimos assim que a potência média do sinal pode ser calculada a partir da representação do sinal no domínio da frequência. A potência média de um sinal contínuo periódico, de período T_0 , pode ser calculada quer no domínio do tempo quer no domínio da frequência, sendo

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2$$

$|C_k|^2$ representa então a potência média da harmónica de ordem k do espectro do sinal. A relação anterior é conhecida como **teorema de Parseval para sinais de potência**. Como vimos, se $x(t)$ for real os coeficientes da SF são complexos conjugados pelo que podemos escrever neste caso

$$P = C_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2$$



Ficha de Avaliação M6

N: Nome: Turma:

Data limite de entrega 12-05-2003

(A ficha deve ser colocada, até à data limite, no recipiente apropriado existente junto ao Gabinete C -CEDET)

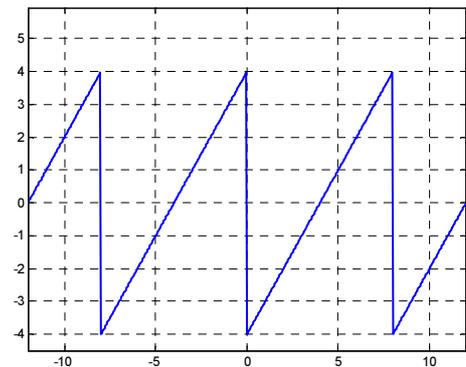
Grupo C

Exercício 1

Considere o sinal

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \cos(10t) \operatorname{sen}\left(\frac{t-2}{4}\pi\right) \frac{1}{t-2}$$

- Represente graficamente o sinal para $t \in [-20, 20]$.
- Determine uma expressão simplificada para a TF do sinal.
- Represente o espectro de amplitude do sinal para $\omega \in [-20, 20]$.

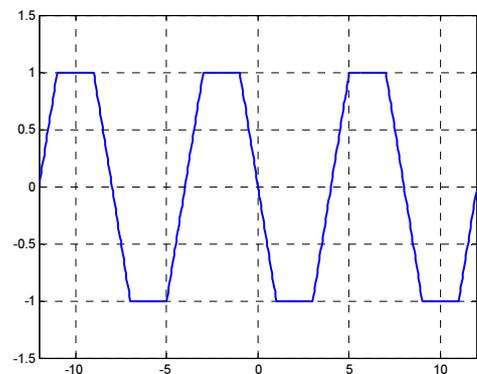


Exercício 2

Considere o sinal

$$x(t) = \begin{cases} At\left(1 + \frac{t}{2\tau}\right) & -\tau < t \leq 0 \\ At\left(1 - \frac{t}{2\tau}\right) & 0 < t < \tau \end{cases}$$

- Represente graficamente o sinal para $t \in [-2, 2]$.
- Determine uma expressão simplificada para a TF do sinal.
- Represente o espectro de amplitude do sinal para $\omega \in [-20, 20]$.



Exercício 3

Considere os sinais contínuos periódicos descritos na figura M6.31

- Determine a TF dos sinais. Esboce o módulo da TF do sinal até à 4ª harmónica.
- Calcule os coeficientes da SF dos sinais. Esboce o módulo dos coeficientes da SF do sinal até à 4ª harmónica.
- Calcule a percentagem da potência dos sinais contida até à 4ª harmónica.
- Represente graficamente a reconstrução dos sinais com base nas primeiras 4 harmónicas e compare com os sinais originais.
- Repita os procedimentos para 20 harmónicas.

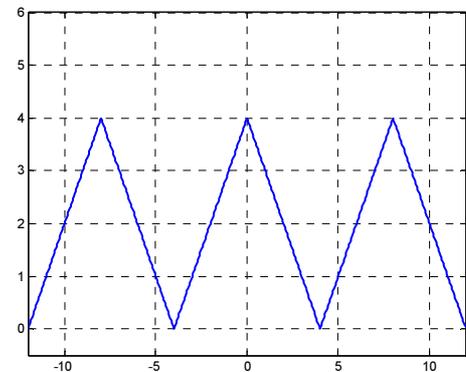


Figura M6.31