

LICENCIATURA EM ENGENHARIA DE SISTEMAS
DE TELECOMUNICAÇÕES E ELECTRÓNICA

Apontamentos de Análise de Sinais



© Prof. José Amaral
Versão 3.0 • 12-05-2003
Secção de Comunicações e Processamento de Sinal
ISEL-CEDET, Gabinete C • jda@isel.pt

Índice

| | |
|--|-----------|
| OBJECTIVOS..... | 1 |
| 1. SÉRIE DE FOURIER..... | 2 |
| SÉRIE DE FOURIER DE SINAIS DISCRETOS PERIÓDICOS | 2 |
| EXEMPLO 3.1 | 2 |
| 2. TRANSFORMADA DE FOURIER .3 | |
| TRANSFORMADA DE FOURIER DE SINAIS DISCRETOS NÃO PERIÓDICOS..... | 3 |
| EXEMPLO 3.2..... | 3 |
| EXEMPLO 3.3..... | 3 |
| TRANSFORMADA DE FOURIER DE SINAIS DISCRETOS PERIÓDICOS | 4 |
| EXEMPLO 3.4..... | 4 |
| 3. TEOREMA DE PARSEVAL..... | 5 |
| EXERCÍCIO 7.1 | 6 |
| EXEMPLO 1 | 6 |
| EXEMPLO 2..... | 7 |
| MATLAB 7.1..... | 8 |
| EXEMPLO 1 | 8 |
| EXEMPLO 2..... | 10 |
| EXERCÍCIO 7.2 | 13 |
| EXEMPLO 1 | 13 |
| EXEMPLO 2..... | 13 |
| EXEMPLO 3..... | 14 |
| EXEMPLO 4..... | 14 |
| EXEMPLO 5..... | 15 |
| MATLAB 7.2..... | 16 |
| EXEMPLO 1 | 16 |
| EXEMPLO 2..... | 16 |
| EXEMPLO 3..... | 17 |
| EXERCÍCIO 7.3 | 18 |
| EXEMPLO 1 | 18 |
| APÊNDICE 1: SÉRIE DE FOURIER DE SINAIS DISCRETOS PERIÓDICOS..... | 19 |
| APÊNDICE 2: TRANSFORMADA DE FOURIER DE SINAIS DISCRETOS NÃO PERIÓDICOS..... | 20 |
| FICHA DE AVALIAÇÃO M7 | 21 |
| GRUPO C..... | 21 |
| EXERCÍCIO 1 | 21 |
| EXERCÍCIO 2 | 21 |
| GRUPO B..... | 21 |
| EXERCÍCIO 3 | 21 |

Espectro de sinais discretos

TÓPICOS

Série de Fourier de sinais discretos periódicos

Transformada de Fourier de sinais discretos não periódicos

Transformada de Fourier de sinais discretos periódicos

Teorema de Parseval

Apresenta-se neste Módulo a análise de *Fourier* de sinais discretos periódicos e não periódicos.

No Apêndice 1 é deduzida a Série de *Fourier* de sinais discretos periódicos e no Apêndice 2 é deduzida a Transformada de *Fourier* de sinais contínuos não periódicos.

Os conceitos relevantes são apresentados em destaque no início do Módulo, seguindo-se um conjunto de exercícios de aplicação, em que se dá ênfase especial à utilização do *Matlab*.

Não existindo em *Matlab* um núcleo de cálculo dedicado, à semelhança do existente para sinais contínuos, a dedução de expressões analíticas da TF de sinais discretos exige um maior esforço analítico pessoal. No Módulo 8, nomeadamente após o desenvolvimento do conceito de amostragem de sinais contínuos, apresentar-se-ão as técnicas numéricas alternativas e a devida análise comparativa.

Objectivos

No fim deste módulo o aluno deverá :

1. Saber calcular a SF de sinais discretos periódicos.
2. Saber calcular a TF de sinais discretos não periódicos.
3. Saber calcular a TF de sinais discretos periódicos.



1. Série de Fourier

Série de Fourier de sinais discretos periódicos

Qualquer sinal discreto $x[n]$, periódico de período N , pode ser representado completamente através de uma **Série de Fourier (SF)**

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{jk\Omega_0 n}$$

com

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_N x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

Tal como para o caso contínuo, a representação do sinal discreto periódico $x[n]$ através da sua SF é designada por **espectro do sinal**. Note que para a descrição temporal de um sinal discreto periódico de período N apenas são necessários N valores do sinal, já que, por definição, $x[n] = x[n + N]$. Também **para a descrição espectral do sinal são necessários apenas N componentes espectrais**, como é evidente na expressão

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{jk\Omega_0 n}$$

, dado que as exponenciais complexas discretas de frequências $\Omega_0 \pm 2k\pi$ são idênticas. O espectro do sinal é completamente representado no intervalo $\Omega \in [0, 2\pi]$, ou $\Omega \in [-\pi, \pi]$, correspondendo as componentes próximas de 0 e 2π às baixas frequências e as componentes próximas de π e $-\pi$ às altas frequências.

Exemplo 3.1

A figura M7.1 mostra um período do sinal discreto $x[n] = \cos[\Omega_0 n] + 0.5 \cos[4\Omega_0 n]$, com $\Omega_0 = 2\pi/N = \pi/20$, ou seja $N = 40$ e o respectivo espectro, representado em função de Ω/Ω_0 . Note as riscas em Ω_0 e $4\Omega_0$, respeitantes a cada um dos co-senos. A figura M7.2 mostra um período do sinal discreto $x[n] = \cos[\Omega_0 n] + 0.5 \cos[4\Omega_0 n] + 0.2 \cos[15\Omega_0 n]$, com $\Omega_0 = 2\pi/N = \pi/20$, ou seja $N = 40$ e o respectivo espectro, representado em função de Ω/Ω_0 . Note as riscas em Ω_0 , $4\Omega_0$, $15\Omega_0$, respeitantes a cada um dos co-senos.

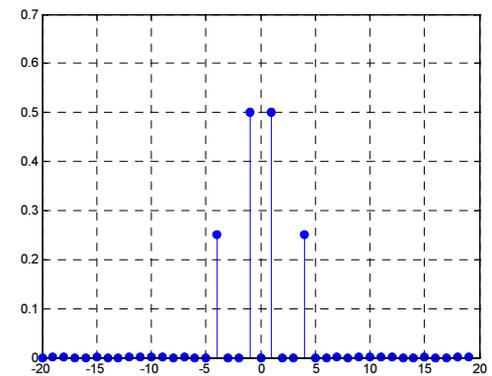
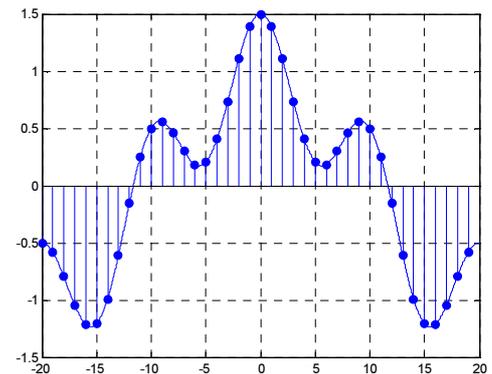


Figura M7.1

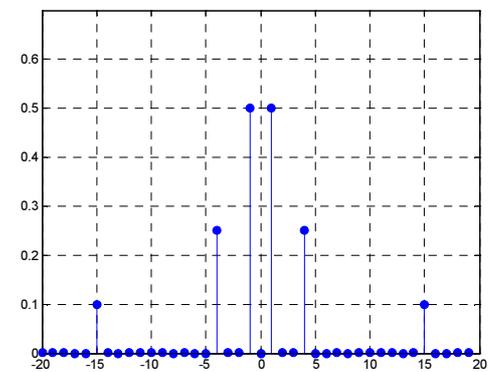
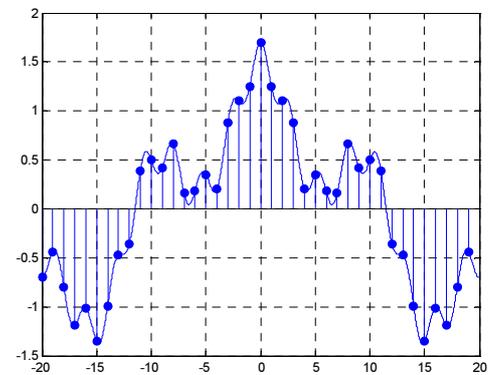
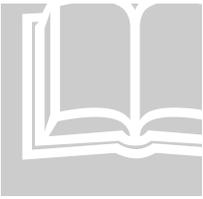


Figura M7.2



2. Transformada de Fourier

Transformada de Fourier de sinais discretos não periódicos

A **transformada de Fourier (TF)** de um sinal discreto não periódico, $x[n]$, também designada por **transformada de Fourier directa** para sinais discretos, é representada por $X(\Omega)$, sendo dada por

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

A relação

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega$$

é designada por **transformada de Fourier inversa** para sinais discretos. O par de equações é designado como **par de transformadas de Fourier** para sinais discretos

Tal como para o caso contínuo, a TF de um sinal discreto não periódico é uma **função contínua** da frequência angular. Note que para o caso discreto a transformada é periódica de 2π .

Exemplo 3.2

A figura M7.3 mostra o sinal $x[n] = 0.5^n u[n]$, e o respectivo espectro de amplitude $|X(\Omega)| = |e^{j\Omega} / (e^{j\Omega} - 0.5)|$. Note que $\Omega = \pm\pi$ corresponde às máximas frequências que compõem os espectro do sinal.

Exemplo 3.3

A figura M7.4 mostra o sinal discreto $x[n] = u[n+5] - u[n-5]$, e o seu espectro de amplitude $|X(\Omega)| = |\text{sen}(5\Omega)/\text{sen}(0.5\Omega)|$.

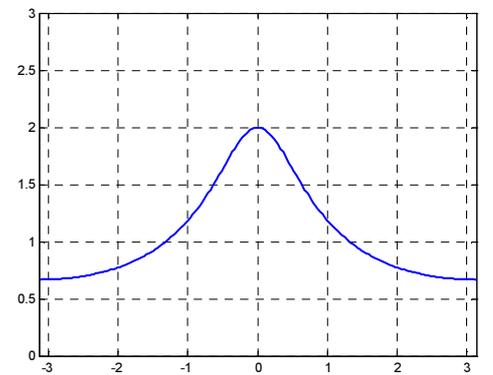
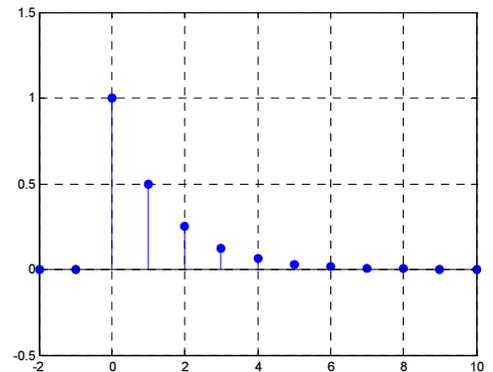


Figura M7.3

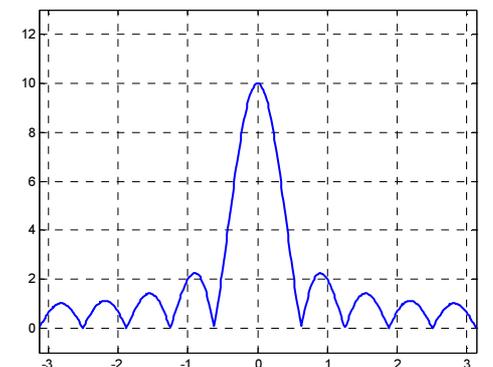
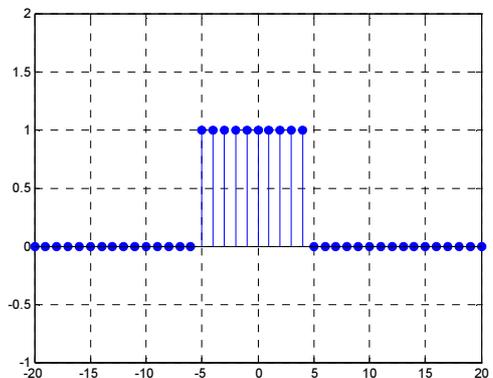


Figura M7.4

Transformada de Fourier de sinais discretos periódicos

A TF de um sinal discreto, $x[n]$, periódico de período N , é dada por

$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

, com $\Omega_0 = 2\pi/N$, sendo os coeficientes C_k proporcionais às amostras da TF do sinal de duração finita, $x_e[n]$, idêntico, num período, ao sinal periódico em análise

$$C_k = \frac{1}{N} X_e(k\Omega_0)$$

Exemplo 3.4

A figura M7.5 mostra os gráficos da TF da versão periódica do sinal discreto $x[n] = u[n+5] - u[n-5]$, sequencialmente, para períodos $N = 20$, $N = 40$ e $N = 60$, constituída por impulsos de *Dirac* localizados nas frequências múltiplas da frequência fundamental Ω_0 , a que se sobrepôs a TF da versão de energia, vista no exemplo 3.3, ficando assim clara a relação

$$X(\Omega) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_e(\Omega) \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

A comparação com a figura M7.6, em que se mostra os coeficientes da SF para o caso $N = 40$, ilustra a relação $X_e(k\Omega_0) = NC_k$.

Note que um sinal discreto periódico, de período N , é completamente descrito através de uma sequência, no tempo, de N valores numéricos, tendo uma representação natural na frequência através de um **sinal discreto**, correspondente aos coeficientes da sua SF, também correspondente a uma sequência de N valores numéricos. A TF desse mesmo sinal é um **sinal contínuo** descrito pelo somatório de impulsos de *Dirac* situados nos múltiplos da frequência fundamental do sinal. Embora o tratamento de sinais, periódicos ou não, através da mesma ferramenta formal, TF, permita que se deduzam relações teóricas importantes, como se frisou quando falámos da TF de sinais contínuos, o facto do recurso à SF permitir que se descreva, e manipule, um sinal através de N valores numéricos torna esta transformação extremamente útil, por permitir um tratamento computacional eficiente. Como se verá no próximo Módulo, este facto levará à definição de uma transformada, designada por **DFT (Discrete Fourier Transform)**, cuja utilização se generalizará a todo o tipo de sinais.

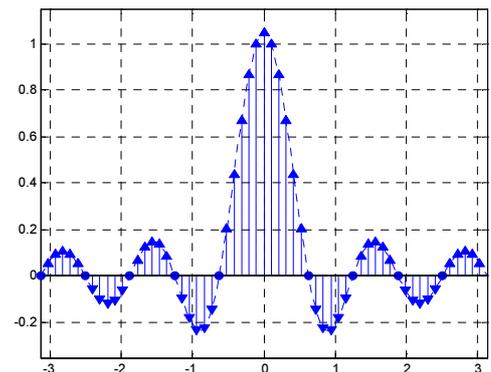
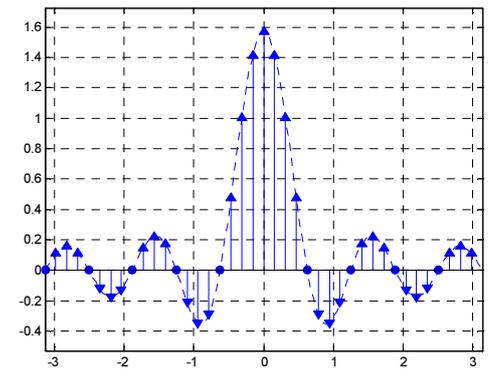
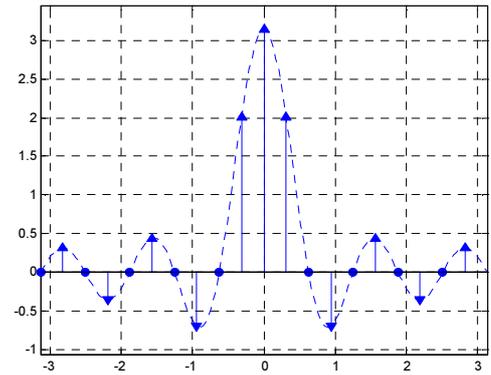


Figura M7.5

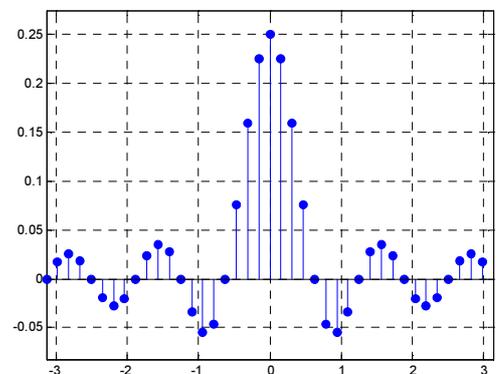


Figura M7.6



3. Teorema de Parseval

De modo muito semelhante ao caso contínuo, podemos derivar para os sinais discretos as expressões que nos permitem calcular a energia ou a potência do sinal, no domínio da frequência.

A energia de um sinal discreto não periódico, $x[n]$, pode ser calculada tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência, sendo

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

Tal como para o caso contínuo, a função $|X(\Omega)|^2$ é designada por **densidade espectral de energia**.

A potência média de um sinal discreto periódico, de período N , pode ser calculada tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência, sendo

$$P = \frac{1}{N} \sum_N |x[n]|^2 = \sum_N |C_k|^2$$



Exercício 7.1

Exemplo 1

Calcule os coeficientes da SF do sinal cuja evolução temporal se mostra na figura M7.7, e que pode ser descrito analiticamente por

$$x[n] = \cos\left[\frac{n\pi}{2}\right]$$

Os coeficientes da SF de um sinal discreto periódico, de período N , são dados por

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_N x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

No presente caso

$$\cos\left[\frac{n\pi}{2}\right] = \cos[n\Omega_0] \Rightarrow \begin{aligned} \Omega_0 &= \frac{\pi}{2} \\ N &= 4 \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 \cos\left[n \frac{\pi}{2}\right] e^{-jk n \frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 e^{-jk0 \frac{\pi}{2}} + 0 e^{-jk1 \frac{\pi}{2}} + (-1) e^{-jk2 \frac{\pi}{2}} + 0 e^{-jk3 \frac{\pi}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{4} (1 - e^{-jk\pi}) \\ &= \frac{1}{4} (1 - (-1)^k) \end{aligned}$$

Podemos verificar o resultado procedendo à reconstrução do sinal a partir dos coeficientes da SF. Resulta assim

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{jk\Omega_0 n} \\ &= \sum_{k=0}^3 C_k e^{jk\Omega_0 n} \\ &= \frac{1}{2} (e^{jn\Omega_0} + e^{j3n\Omega_0}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{jn\Omega_0} + e^{-jn\Omega_0}) \\ &= \cos(n\Omega_0) \end{aligned}$$

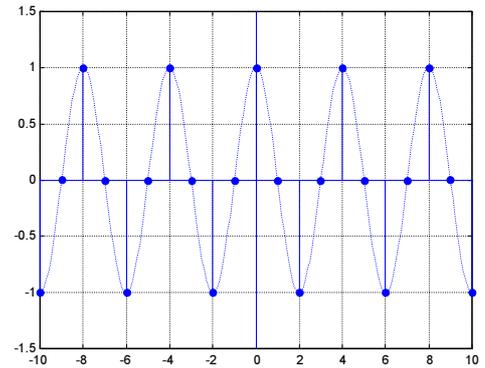


Figura M7.7

Exemplo 2

Calcule os coeficientes da SF do **pulso rectangular discreto de duração** $2M + 1$ e **periodicidade** N , cuja evolução temporal se mostra na figura M7.8

Os coeficientes da SF de um sinal discreto periódico, de período N , são dados por

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_N x[n] e^{-jk\Omega_o n}$$

No caso presente

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=-M}^M e^{-jk\Omega_o n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2M} e^{-jk\Omega_o(n-M)} \end{aligned}$$

Tendo em atenção que para uma progressão geométrica

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} u_n &= \sum_{n=0}^{N-1} u_o r^n \\ &= u_o \frac{1 - r^N}{1 - r} \end{aligned}$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2M} e^{-jk\Omega_o(n-M)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2M} e^{jk\Omega_o M} e^{-jk\Omega_o n} \\ &= \frac{1}{N} e^{jk\Omega_o M} \frac{1 - e^{-jk\Omega_o(2M+1)}}{1 - e^{-jk\Omega_o}} \\ &= \frac{1}{N} e^{jk\Omega_o M} \frac{2je^{-jk\Omega_o \frac{(2M+1)}{2}} e^{jk\Omega_o \frac{(2M+1)}{2}} - e^{-jk\Omega_o \frac{(2M+1)}{2}}}{2j} \\ &= \frac{1}{N} e^{jk\Omega_o M} \frac{2je^{-jk\Omega_o \frac{(2M+1)}{2}} \frac{e^{jk\Omega_o \frac{(2M+1)}{2}} - e^{-jk\Omega_o \frac{(2M+1)}{2}}}{2j}}{2je^{-jk\Omega_o \frac{(2M+1)}{2}} \frac{e^{jk\Omega_o \frac{(2M+1)}{2}} - e^{-jk\Omega_o \frac{(2M+1)}{2}}}{2j}} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\text{sen}\left(k\Omega_o \frac{2M+1}{2}\right)}{\text{sen}\left(k\frac{\Omega_o}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\text{sen}\left(k\pi \frac{2M+1}{N}\right)}{\text{sen}\left(k\frac{\pi}{N}\right)} \end{aligned}$$

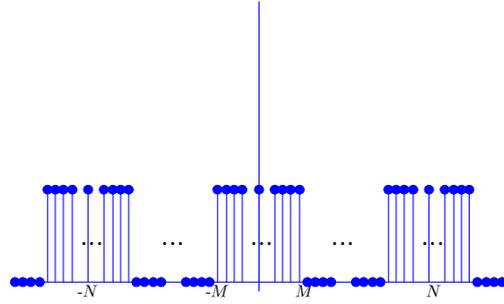
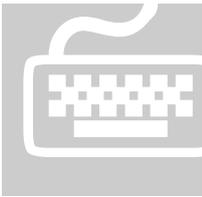


Figura M7.8



Matlab 7.1

Exemplo 1

Recorra ao *Matlab* para resolver o Exemplo 1 do Exercício 7.1.

Dado o sinal

$$x[n] \cos\left[\frac{n\pi}{2}\right] = \cos[n\Omega_0] \Rightarrow \Omega_0 = \frac{\pi}{2} \\ N = 4$$

Recorrendo à biblioteca de cálculo simbólico, temos

```
w0g=pi/2;
N=2*pi/w0g;
syms k n w0
x=sym('cos(n*w0)');
```

Podemos representar o sinal

```
ng=0:0.01:N;
xg=subs(x,w0,w0g);
xg=double(subs(xg,n,ng));
figure(1);plot(ng,xg);
grid on; axis([0 N -1.5 1.5]);

ng=0:N-1;
xg=subs(x,w0,w0g);
xg=double(subs(xg,n,ng));
figure(1); hold on
stem(ng,xg,'filled');
grid on; hold off
```

, como se mostra na figura M7.9. Atendendo à definição de SF de um sinal discreto

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

```
xb=sym('exp(-j*k*w0*n)');
Ck=1/N*symsum(x*xb,n,0,N-1)
Ck=simplify(subs(Ck,w0,w0g))
Ck =
1/4-1/4*exp(-i*k*pi)
```

Obtemos assim a expressão dos coeficientes da SF

$$C_k = \frac{1}{4}(1 - e^{-jk\pi})$$

Podemos representar graficamente o módulo dos coeficientes

```
kg=0:N-1;
Ckg=double(subs(Ck,k,kg));
figure(2);stem(kg,abs(Ckg),'filled'); grid on; axis([0 N -0.5 1]);
```

, como se mostra na figura M7.10, em que a escala horizontal pode ser interpretada como correspondendo ao índice do coeficiente ou à frequência normalizada $\Omega/\Omega_0 \in [0, N]$. É comum fazer a representação no intervalo $[-N/2, N/2]$

```
figure(3); stem(kg-N/2,fftshift(abs(Ckg)),'filled');
grid on; axis([-N/2 N/2 -0.5 1]);
```

Tornando mais clara a simetria que caracteriza a representação de *Fourier* de sinais reais, e evidenciando a existência das riscas espectrais em $\pm\Omega_0$. Recorde que as exponenciais complexas

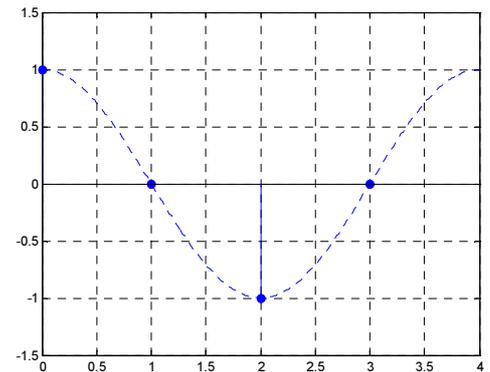


Figura M7.9

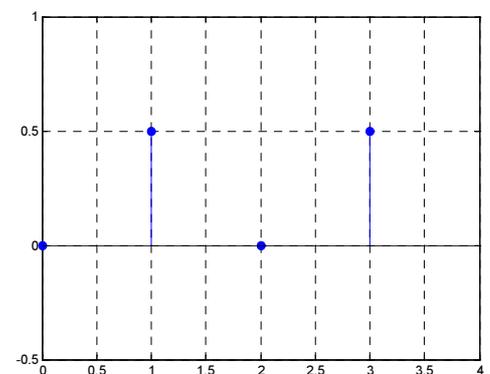


Figura M7.10

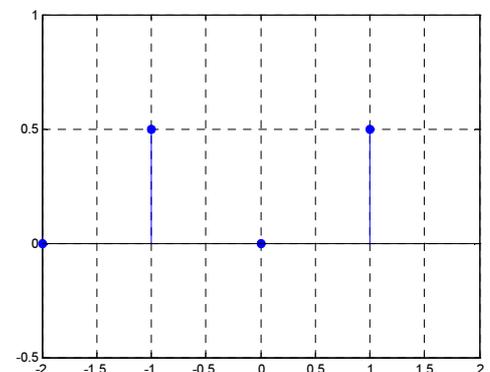


Figura M7.11

discretas são periódicas de 2π , ou seja, os coeficientes da SF são periódicos de N ($e^{-j\Omega_0} = e^{3j\Omega_0}$).

Se pretendêssemos proceder à reconstrução do sinal, poderíamos fazer

```
xbr=sym('exp(j*k*w0*n)');
xr=simplify(symsum(Ck*xbr,k,-N/2,N/2-1))
xr =
    cos(n*w0)
```

Note que as expressões analíticas são irrelevantes, desde que, naturalmente, representem convenientemente as sequências. O exemplo que acabámos de ver resume-se à representação da sequência periódica, de período $N = 4$

$$x[n] = [1, 0, -1, 0]_4$$

em SF, de onde resultam os coeficientes dados pela **equação de análise**

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_N x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

que constituem também eles uma sequência periódica de período $N = 4$

$$C_k = [0, 0.5, 0, 0.5]_4$$

, a partir da qual se pode reconstruir o sinal tendo em conta a **equação de síntese**

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{jk\Omega_0 n}$$

A menos que haja interesse em conhecer as expressões analíticas, o processo de análise e síntese em SF de um sinal discreto periódico dispensa completamente o recurso à biblioteca simbólica do Matlab. Assim, preferencialmente, podemos fazer a definição das constantes básicas

```
w0=pi/8;
N=2*pi/w0;
```

, a definição dos valores do sinal

```
n=0:N-1;
x=cos(n*w0)
x =
    1.0000    0.0000   -1.0000   -0.0000

figure(1); stem(n,x,'filled'); grid on;
n=0:0.01:N; x=cos(n*w0);
figure(1); hold on; plot(n,x,':'); grid on; axis([0 N -1.5 1.5]);
hold off
```

, o cálculo dos coeficientes da SF

```
k=0:N-1;
xb=exp(-j*k'*w0*n);
Ck=1/N*x'*xb
Ck =
   -0.0000    0.5000 - 0.0000i    0.0000 - 0.0000i    0.5000 + 0.0000i

figure(2); stem(k,abs(Ck),'filled'); grid on; axis([0 N -0.5 1]);
figure(3); stem(k-N/2,fftshift(abs(Ck)),'filled');
grid on; axis([-N/2 N/2 -0.5 1]);
```

, e, se desejarmos, a síntese do sinal a partir dos coeficientes da SF

```
xbr=exp(j*k'*w0*n);
xr=Ck*xbr
xr =
    1.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i   -1.0000 + 0.0000i   -0.0000 + 0.0000i
```

Note que em resultado do processo de cálculo e dos erros de representação, as quantidades, embora sendo reais no presente caso, apresentam resíduos imaginários desprezáveis cuja existência é necessário ter em conta no processo de representação gráfica.

Exemplo 2

Recorra ao *Matlab* para resolver o Exemplo 2 do Exercício 7.1.

Recorrendo à biblioteca simbólica do Matlab

```
syms M N n k w0
xb=sym('exp(-j*k*w0*n)');
Ck=1/N*symsum(xb,n,-M,M);
Ck=simplify(Ck)
Ck =
-(exp(-i*k*w0*M)-exp(i*k*w0*(M+1)))/N/(-1+exp(i*k*w0))
```

Obtemos a expressão

$$C_k = \frac{1}{N} e^{jk\Omega_o M} \frac{1 - e^{-jk\Omega_o(2M+1)}}{1 - e^{-jk\Omega_o}}$$

, que seria necessário simplificar manualmente para chegar à forma encontrada através da resolução analítica

$$C_k = \frac{1}{N} \frac{\text{sen}\left(k\pi \frac{2M+1}{N}\right)}{\text{sen}\left(k \frac{\pi}{N}\right)}$$

Recorrendo ao cálculo numérico, por exemplo para $N = 40$ e $M = 2$, temos

```
N=40;
M=2;
w0=2*pi/N;

n=-N/2:N/2-1;
x=rectpuls(n,2*M+1);

k=-N/2:N/2-1;
xb=exp(-j*k'*w0*n);
Ck=1/N*x*xb;
```

Que nos permite obter os gráficos do sinal e dos coeficientes da SF

```
figure(1);
stem(n,x,'filled');
axis([-N/2 N/2 -1 2]);
grid on
figure(2);
stem(k,real(Ck),'filled');
axis([-N/2 N/2 1.1*min(real(Ck))
1.1*max(real(Ck))]);
grid on
```

como se mostra na figura M7.12

Se desejássemos reconstruir o sinal a partir dos coeficientes da SF, poderíamos fazer

```
n=-2*N:2*N;
xbr=exp(j*k'*w0*n);
xr=Ck*xbr;
figure(1);
axis([-2*N 2*N -1 2]); hold on;
stem(n,real(xr),'.','r');
grid on; hold off;
```

de onde resulta o gráfico que se mostra na figura M7.13 para 4 períodos do sinal. Note como, embora sendo obtido a partir de um período $x[n]$, o sinal reconstruído é inerentemente periódico, dado que é conseguido a partir dos sinais de base $e^{jk\Omega_o n}$, que são sinais periódicos.

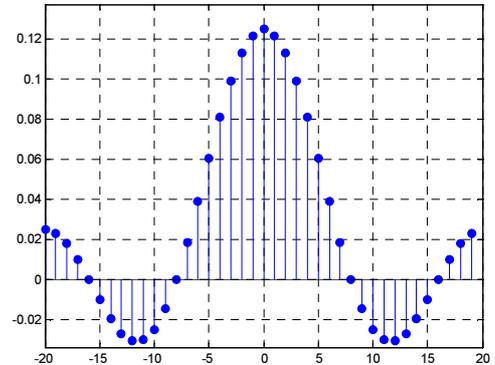
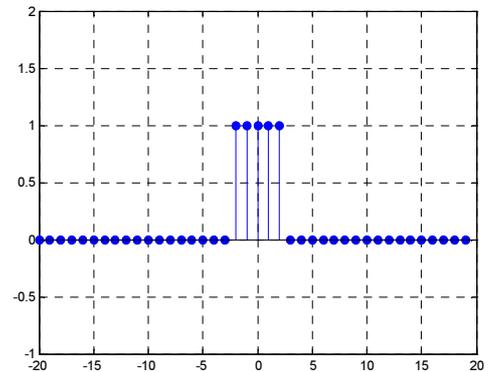


Figura M7.12

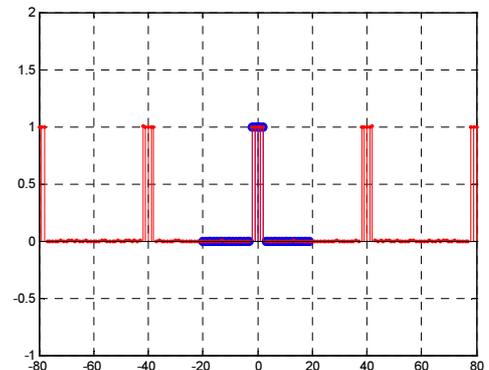


Figura M7.13

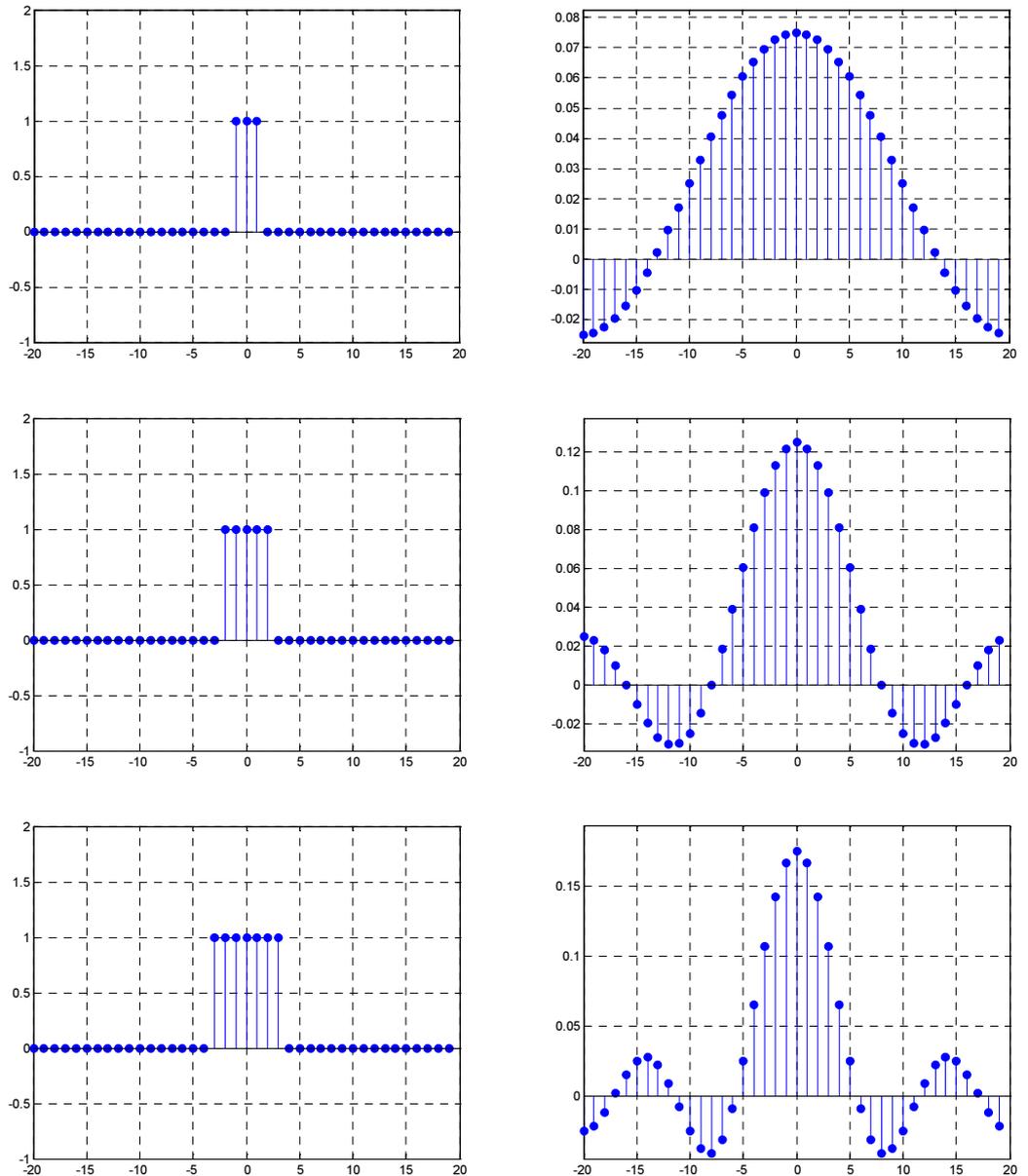


Figura M7.14

A figura M7.14 mostra os coeficientes C_k do pulso rectangular discreto periódico de duração $2M + 1$ e período $N = 40$, sendo, de cima para baixo, $M = 1$, $M = 2$, $M = 3$.

A figura M7.15 mostra os coeficientes C_k do pulso rectangular discreto periódico de duração $2M + 1 = 5$ e período N , sendo, de cima para baixo, $N = 20$, $N = 60$, $N = 80$ e $N = 100$.

Note como, dado que N crescente implica Ω_o cada vez mais pequeno, as riscas do espectro estão cada vez mais próximas. Compare a figura M5.22 em que se mostram as alterações sofridas pelo espectro de um trem de pulsos rectangulares, contínuo, em resultado do aumento do período, T_0 .

À parte a questão de o espectro de um sinal discreto periódico ser uma função periódica, de período N em função de k (ou de período 2π em função de Ω), os comportamentos descritos são em tudo semelhantes: à medida que o período cresce, o espectro do sinal não altera a sua forma envolvente, tendendo para um espectro contínuo.

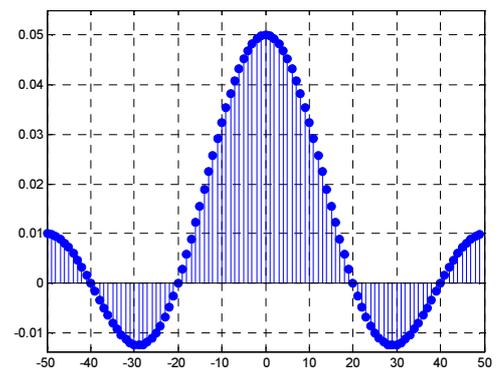
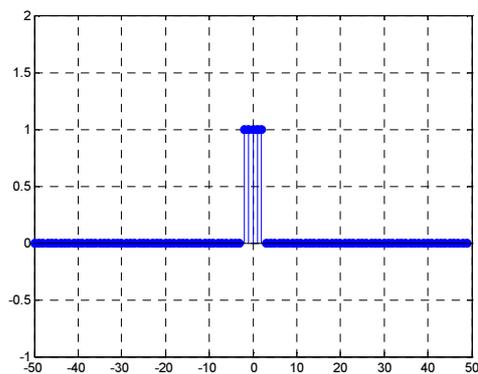
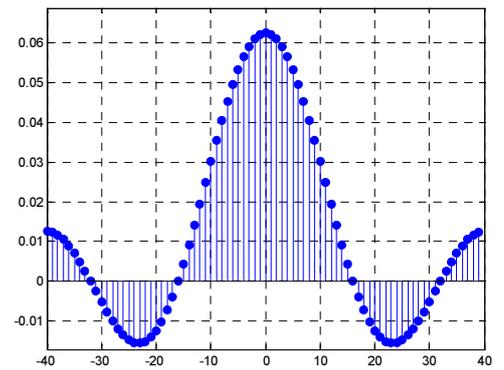
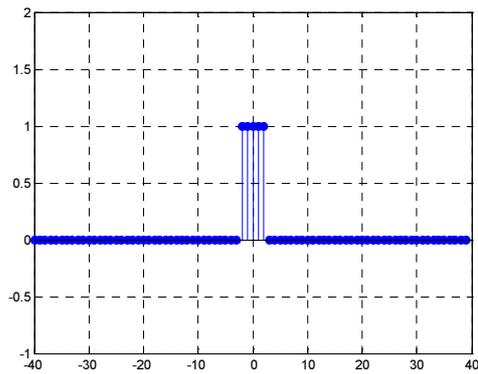
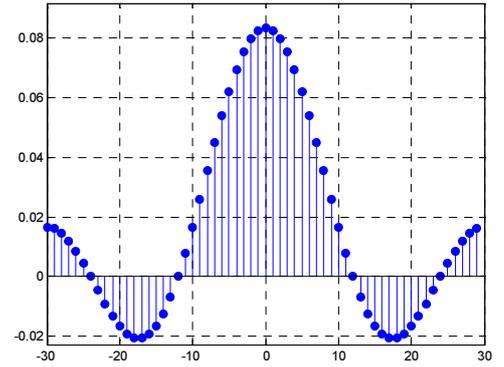
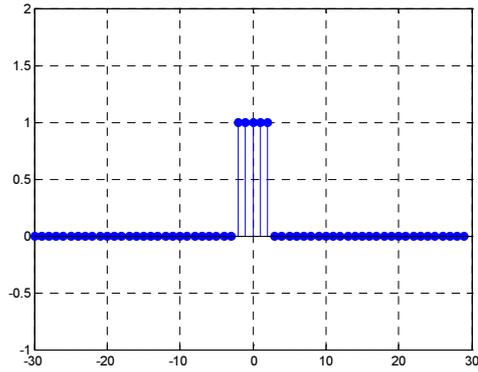
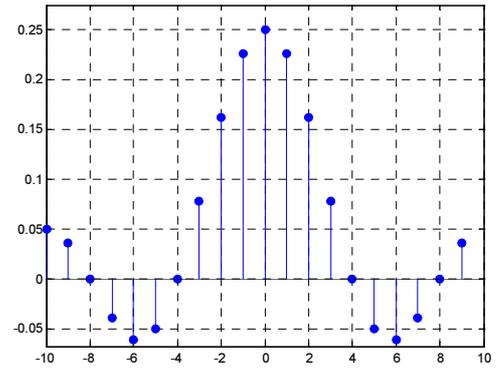
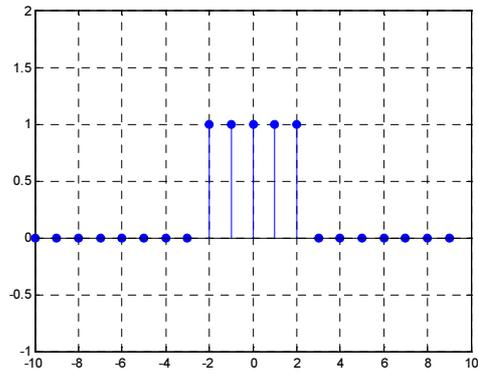


Figura M5.15



Exercício 7.2

Exemplo 1

Calcule a TF do pulso rectangular discreto de duração $2M + 1$.

A TF de um sinal discreto é dada por

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

No caso presente

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-M}^M e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{2M} e^{-j\Omega(n-M)} \end{aligned}$$

Tendo em atenção que para uma progressão geométrica

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} u_n &= \sum_{n=0}^{N-1} u_0 r^n \\ &= u_0 \frac{1 - r^N}{1 - r} \end{aligned}$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=0}^{2M} e^{-j\Omega(n-M)} \\ &= \sum_{n=0}^{2M} e^{j\Omega M} e^{-j\Omega n} \\ &= e^{j\Omega M} \frac{1 - e^{-j\Omega(2M+1)}}{1 - e^{-j\Omega}} \\ &= e^{j\Omega M} \frac{2je^{-j\Omega \frac{(2M+1)}{2}} e^{j\Omega \frac{(2M+1)}{2}} - e^{-j\Omega \frac{(2M+1)}{2}}}{2j} \\ &= e^{j\Omega M} \frac{2je^{-j\frac{\Omega}{2}} e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}}}{2j} \\ &= \frac{\text{sen}\left(\frac{\Omega}{2}(2M+1)\right)}{\text{sen}\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \end{aligned}$$

Exemplo 2

Calcule a TF do impulso unitário discreto, $\delta[n]$.

A partir da definição

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\Omega n} = 1 \end{aligned}$$

Exemplo 3

Calcule a TF inversa do espectro $X(\Omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k2\pi)$.

Calculando, por definição, a transformada inversa num período resulta

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\Omega) d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

Temos portanto o par de *Fourier*

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta[n - k] \leftrightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k2\pi)$$

Exemplo 4

Calcule a TF inversa do espectro $X(\Omega) = 3 + 4 \cos(2\Omega)$.

Por definição

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3 + 4 \cos(2\Omega)) e^{j\Omega n} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3 + 2e^{j2\Omega} + 2e^{-j2\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2e^{j\Omega(n+2)} + 3e^{j\Omega n} + 2e^{j\Omega(n-2)}) d\Omega \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\Omega(n-n_0)} d\Omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\Omega(n-n_0)} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{j(n-n_0)} e^{j\Omega(n-n_0)} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{j(n-n_0)} (e^{j\pi(n-n_0)} - e^{-j\pi(n-n_0)}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{2j}{j(n-n_0)} \text{sen}(\pi(n-n_0)) \\ &= \frac{\text{sen}(\pi(n-n_0))}{\pi(n-n_0)} \\ &= \text{sinc}(n-n_0) \\ &= \begin{cases} 1 & n = n_0 \\ 0 & n \neq n_0 \end{cases} \\ &= \delta[n - n_0] \end{aligned}$$

Pelo que

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2e^{j\Omega(n-2)} + 3e^{j\Omega n} + 2e^{j\Omega(n+2)}) d\Omega \\ &= 2\delta[n+2] + 3\delta[n] + 2\delta[n-2] \end{aligned}$$

Note que pode concluir que

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \sum_i x[i] e^{j\Omega(n-i)} d\Omega \\ &= \sum_i x[i] \delta[n-i] \end{aligned}$$

que é uma relação extremamente prática no cálculo de transformadas inversa de sinais discretos.

Exemplo 5

Determine a TF discreta do sinal $x[n]$ descrito na figura 7.17.

Por definição

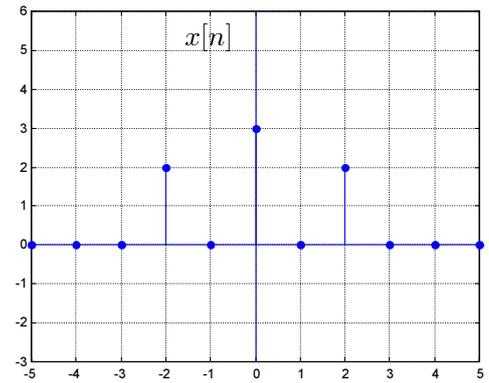
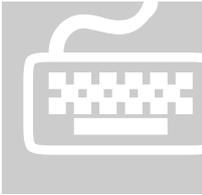


Figura M7.16

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=-2}^2 x[n] e^{-j\Omega n} \\ &= 2e^{j2\Omega} + 0e^{j\Omega} + 3e^{-j\Omega 0} + 0e^{-j\Omega} + 2e^{-j2\Omega} \\ &= 3 + 2(e^{j2\Omega} + 2e^{-j2\Omega}) \\ &= 3 + 4 \cos(2\Omega) \end{aligned}$$



Matlab 7.2

Exemplo 1

Recorra ao *Matlab* para resolver o Exemplo 1 do Exercício 7.2.

Recorrendo à biblioteca simbólica do Matlab

```
syms n w M
xb=sym('exp(-j*w*n)');
Xe=simplify(symsum(xb,n,-M,M))
Xe =
    1/(-1+exp(i*w))*(-exp(-i*w*M)
    +exp(i*w*(M+1)))
```

Obtemos a expressão

$$X(\Omega) = e^{jk\Omega M} \frac{1 - e^{-jk\Omega(2M+1)}}{1 - e^{-jk\Omega}}$$

, que seria necessário simplificar manualmente para chegar à forma encontrada através da resolução analítica

$$X(\Omega) = \frac{\text{sen}\left(\Omega \frac{2M+1}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$

Podemos facilmente obter o gráfico de $X(\Omega)$ para diversos de M

```
wg=linspace(-2*pi,2*pi,200);
Xeg=subs(Xe,M,2)
Xeg=double(subs(Xeg,w,wg));
figure(2);plot(wg,real(Xeg));
grid on
axis([-pi pi 1.1*min(real(Xeg))
1.1*max(real(Xeg))]);
```

A figura M7.17 mostra a evolução de $X(\Omega)$ para $M = 1$, $M = 2$ e $M = 3$. Compare com a figura M7.14. Note como a evolução das grandezas representadas é semelhante. Na verdade, basta por exemplo comparar as expressões dos coeficientes da SF do pulso rectangular discreto periódico com a expressão da TF do pulso rectangular discreto, para verificar que

$$C_k = \frac{1}{N} X(k\Omega_0)$$

Exemplo 2

Recorra ao *Matlab* para resolver o Exemplo 4 do Exercício 7.2.

Recorrendo à biblioteca simbólica do Matlab

```
syms w n
xb=sym('exp(j*w*n)');
X=sym('3+4*cos(2*w)');
xfl=simplify(int(X*xb,w,-pi,pi))/2/pi
xfl =
    (7*n^2-12)*sin(pi*n)/n/(n^2-4)/pi
```

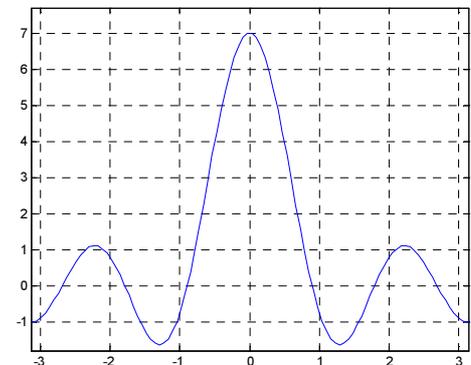
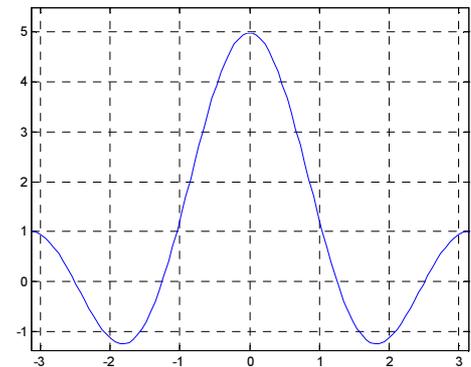
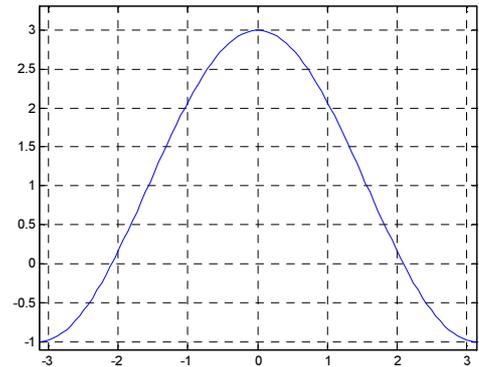


Figura M7.17

Obtemos assim a expressão

$$x[n] = \frac{7n^2 - 12}{(n^2 - 4)} \frac{\text{sen}(n\pi)}{n\pi}$$

Sendo $\text{sen}(n\pi) = 0, \forall n$, $x[n]$ é sempre nulo excepto nos pontos em que o denominador se anula, ou seja, para $n = -2, n = 0$ e $n = 2$. Podemos calcular os valores que o sinal assume nestes instantes

```
ng=-5:5;
xf=double(subs(xf1,n,ng));
nn=find(isinf(xf) | isnan(xf));
if length(nn)>=1
    for i=1:length(nn)
        xf(nn(i))=double(limit(xf1,n,ng(nn(i))));
    end
end
xf
xf =
    0.00 -0.00  0.00  2.00  0.00  3.00  0.00  2.00  0.00 -0.00  0.00
```

, e representar graficamente o sinal

```
stem(ng,xf,'filled')
grid on
axis([-5,5,-1,4]);
```

, obtendo assim a figura M7.18.

Note que o processo de cálculo da TF inversa pode ser simplificado se especificar-mos previamente o domínio n

```
syms w n
xb=sym('exp(j*w*n)');
X=sym('3+4*cos(2*w)');
ng=-5:5;
xb=subs(xb,n,ng);
xf=simplify(int(X*xb,w,-pi,pi))
    /2/pi
xf =
    [ 0, 0, 0, 2, 0, 3, 0, 2, 0, 0, 0]
stem(ng,double(xf),'filled')
axis([-5,5,-1,4]); grid on
```

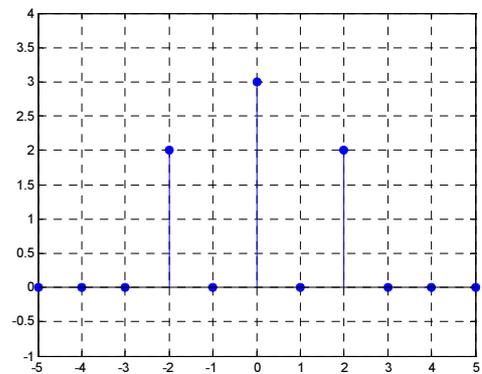


Figura M7.18

Exemplo 3

Recorra ao *Matlab* para resolver o Exemplo 5 do Exercício 7.2.

Recorrendo à biblioteca simbólica do *Matlab*

```
syms w n
x=[0 0 0 2 0 3 0 2 0 0 0];
n=-5:5;
xb=subs(sym('exp(-j*w*n)'));
X=simplify(xb*x')
X =
    4*cos(2*w)+3
```

Podemos representar graficamente $X(\Omega)$

```
Wg=-pi:0.1:pi;
Xg=double(subs(X1,w,Wg));
plot(Wg,Xg,'LineWidth',2);
grid on;
axis([-pi,pi,-2,8]);
```

, obtendo o gráfico que se mostra na figura 7.19. Podemos verificar o resultado calculando a TF inversa

```
xb=subs(sym('exp(j*w*n)'));
xf2=simplify(int(X*xb,w,-pi,pi))/2/pi
xf2 =
    [ 0, 0, 0, 2, 0, 3, 0, 2, 0, 0, 0]
```

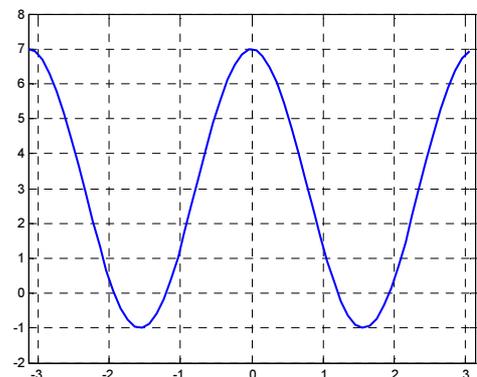


Figura M7.19



Exercício 7.3

Exemplo 1

Calcule a TF do pulso rectangular discreto, $x[n]$, de duração $2M + 1$ e periodicidade N , cuja evolução temporal se mostra na figura M7.20. Simplifique a expressão para $M = 1$.

Começemos por considerar um pulso rectangular discreto, $x_e[n]$, de duração $2M + 1$, cujo comportamento é coincidente, num período, com o sinal $x[n]$. Vimos que a TF de $x_e[n]$ é dada por

$$X_e(\Omega) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\Omega}{2}(2M+1)\right)}{\text{sen}\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$

Assim sendo, resulta de imediato

$$C_k = \frac{1}{N} X_e(k\Omega_o) = \frac{1}{N} \frac{\text{sen}\left(\frac{k\Omega_o}{2}(2M+1)\right)}{\text{sen}\left(\frac{k\Omega_o}{2}\right)} = \frac{1}{N} \frac{\text{sen}\left(k\pi \frac{2M+1}{N}\right)}{\text{sen}\left(k \frac{\pi}{N}\right)}$$

Compare a expressão com a obtida no exemplo 2.9. A TF de $x[n]$ é então

$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta(\Omega - k\Omega_o) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(k\pi \frac{2M+1}{N}\right)}{\text{sen}\left(k \frac{\pi}{N}\right)} \delta(\Omega - k \frac{2\pi}{N})$$

Particularmente para $M = 1$ resulta

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(k\pi \frac{2M+1}{N}\right)}{\text{sen}\left(k \frac{\pi}{N}\right)} \delta(\Omega - k \frac{2\pi}{N}) \\ &= \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(k\pi \frac{3}{N}\right)}{\text{sen}\left(k \frac{\pi}{N}\right)} \delta(\Omega - k \frac{2\pi}{N}) = \Omega_o \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(3k \frac{\Omega_o}{2}\right)}{\text{sen}\left(k \frac{\Omega_o}{2}\right)} \delta(\Omega - k\Omega_o) \end{aligned}$$

Recorrendo a relações trigonométricas triviais é fácil demonstrar que

$$\frac{\text{sen}\left(3k \frac{\Omega_o}{2}\right)}{\text{sen}\left(k \frac{\Omega_o}{2}\right)} = 1 + 2 \cos(k\Omega_o)$$

, de onde resulta

$$X(\Omega) = \Omega_o \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + 2 \cos(k\Omega_o)) \delta(\Omega - k\Omega_o)$$

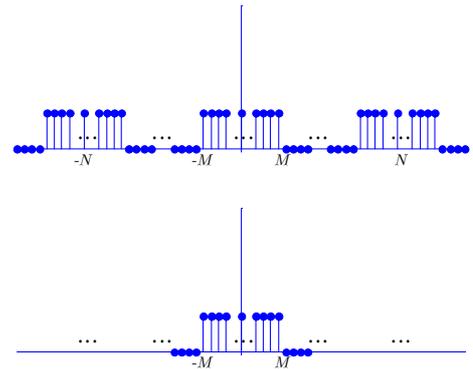
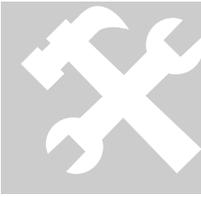


Figura M7.20



Apêndice 1: Série de Fourier de sinais discretos periódicos

No caso dos sinais contínuos periódicos o conjunto ortonormado completo que foi escolhido para definir o espaço de representação dos sinais foi o conjunto

$$\left\{ y_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \right\}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

De modo a minimizar o erro quadrático médio de representação num intervalo correspondente a um período do sinal, e sendo assim em todo o domínio do sinal dado que o sinal é periódico, demonstrou-se que os coeficientes que pesam cada um dos sinais base devem ser

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Para representação de um qualquer sinal discreto, $x[n]$, vamos também utilizar as funções exponenciais, no caso, o conjunto de funções exponenciais discretas

$$\left\{ y_k[n] = e^{jk\Omega_0 n} \right\}$$

que, de modo muito semelhante ao que foi visto para o caso contínuo, se pode demonstrar constituírem um conjunto ortonormado completo. Há agora, no entanto, uma diferença importante em relação ao caso contínuo. Como temos agora uma variável discreta, que apenas assume valores inteiros, resulta que

$$\begin{aligned} e^{j(N+k)\Omega_0 n} &= e^{jN\Omega_0 n} e^{jk\Omega_0 n} \\ &= e^{j\frac{2\pi}{\Omega_0}\Omega_0 n} e^{jk\Omega_0 n} \\ &= e^{j2\pi n} e^{jk\Omega_0 n} \\ &= e^{jk\Omega_0 n} \end{aligned}$$

Sendo

$$e^{j(N+k)\Omega_0 n} = e^{jk\Omega_0 n}$$

, concluímos que **só existem** N **exponenciais** $e^{jk\Omega_0 n}$ **com comportamentos distintos**. Ou seja, o conjunto **finito** de sinais de base

$$\left\{ y_k[n] = e^{jk\Omega_0 n} \right\}, k = 0, 1, \dots, N-1$$

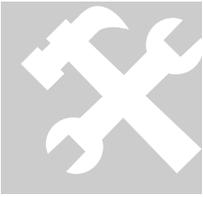
define completamente o espaço de representação de qualquer sinal discreto periódico de período N . Assim sendo, a representação de um sinal discreto periódico sob a forma de uma combinação linear de exponenciais complexas discretas resulta

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{jk\Omega_0 n}$$

Também de modo muito semelhante ao que foi visto para o caso contínuo, pelo que dispensamos aqui a sua apresentação, pode demonstrar-se que os coeficientes que minimizam o erro quadrático médio de representação de um sinal $x[n]$ descrito por N pontos devem ser

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_N x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

A analogia com a expressão para o caso contínuo é evidente. Se recordarmos que o período do sinal é agora designado por N , a única diferença entre as duas expressões consiste na substituição do integral pelo somatório, que decorre naturalmente uma vez que estamos agora a lidar com sinais discretos.



Apêndice 2: Transformada de Fourier de sinais discretos não periódicos

Consideremos, à semelhança do que foi feito para o caso contínuo, um sinal de energia discreto, $x_e[n]$, cujo comportamento é igual, num período, a um dado sinal discreto periódico $x[n]$. Se fizermos crescer o período indefinidamente, no limite, com N a tender para infinito, os dois sinais serão idênticos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x[n] = x_e(t)$$

Sendo a representação em SF de $x[n]$

$$x[n] = \sum_N C_k e^{jk\Omega_o n}$$

com

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_N x[n] e^{-jk\Omega_o n}$$

, podemos, a partir destas expressões, e seguindo um processo em tudo semelhante ao caso contínuo, fazer tender N para infinito, obtendo assim a representação do sinal de energia. Para a representação directa a conclusão é imediata. Recorde que para um sinal contínuo obtivemos

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Para o sinal discreto, seguindo os mesmos passos da dedução, chegamos à expressão

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

, cuja analogia com a situação contínua é imediata, à parte, naturalmente, o somatório que substitui o integral, dado que estamos agora a lidar com um sinal discreto. Para a representação inversa, que no caso contínuo resultou

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

, obtemos

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

, cuja analogia com o caso contínuo, à parte os limites de integração, também é imediata. Os limites de integração são fáceis de compreender. Recorde que a SF de um sinal discreto periódico é, em $k\Omega_o$, periódica de 2π . Ora

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} N\Omega_o &= \lim_{N \rightarrow \infty} N \frac{2\pi}{N} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Encontrámos assim, à semelhança do caso contínuo, um par de transformações que nos permite representar um sinal discreto não periódico quer no domínio do tempo quer no domínio da frequência. À semelhança do caso contínuo a função $X(\Omega)$ é chamada **função de densidade espectral** do sinal $x[n]$.

