

LICENCIATURA EM ENGENHARIA DE SISTEMAS
DE TELECOMUNICAÇÕES E ELECTRÓNICA

Apontamentos de Análise de Sinais



© Prof. José Amaral
Versão 3.0 • 19-05-2003
Secção de Comunicações e Processamento de Sinal
ISEL-CEDET, Gabinete C • jda@isel.pt

Índice

OBJECTIVOS	1
1. DFT (TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER)	2
DFT	2
EXEMPLO 1.1	2
A DFT E A SF DE SINAIS DISCRETOS PERIÓDICOS.....	2
EXEMPLO 1.2	2
A DFT E A TF DE SINAIS DISCRETOS NÃO PERIÓDICOS.....	3
EXEMPLO 1.3	3
A DFT E A SF DE SINAIS CONTÍNUOS PERIÓDICOS.....	3
EXEMPLO 1.4	3
A DFT E A TF DE SINAIS CONTÍNUOS NÃO PERIÓDICOS.....	4
EXEMPLO 1.5	4
MATLAB 8.1	5
DFT	5
EXEMPLO 1.....	5
EXEMPLO 2.....	5
A DFT E A TFSD	6
EXEMPLO 3.....	6
EXEMPLO 4.....	7
REPRESENTAÇÃO EM $[-\pi, \pi]$	7
EXEMPLO 5.....	7
$X[N]$ DEFINIDO NÃO EM $[0, N-1]$ – TRANSLAÇÃO CIRCULAR	8
EXEMPLO 6.....	8
AUMENTO DA DENSIDADE DE AMOSTRAS DA TF	10
EXEMPLO 7.....	10
EXEMPLO 8.....	11
EXEMPLO 9.....	12
MATLAB 8.2	14
A DFT E A TFSC NÃO PERIÓDICOS	14
EXEMPLO 1.....	14
EXEMPLO 2.....	16
EXEMPLO 3.....	17
EXEMPLO 4.....	18
MATLAB 8.3	20
A DFT E A SF DE SINAIS CONTÍNUOS PERIÓDICOS.....	20
EXEMPLO 1.....	20
A DFT E A TF DE SINAIS CONTÍNUOS PERIÓDICOS.....	22
EXEMPLO 2.....	22
JANELA DE OBSERVAÇÃO	23
MATLAB 8.4	25
EXEMPLO 1.....	25
APÊNDICE 1: DFT (TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER)	26
DFT	26
A DFT E A SF DE SINAIS DISCRETOS PERIÓDICOS.....	27
A DFT E A TF DE SINAIS DISCRETOS NÃO PERIÓDICOS.....	27
ESPECTRO DE SINAIS CONTÍNUOS AMOSTRADOS.....	28
TEOREMA DA AMOSTRAGEM	29
A DFT E A SF DE SINAIS CONTÍNUOS PERIÓDICOS.....	30
A DFT E A TF DE SINAIS CONTÍNUOS NÃO PERIÓDICOS	31
APÊNDICE 2: EXEMPLOS DE CÁLCULO DA DFT	32
EXEMPLO 1.....	32
EXEMPLO 2.....	33
FICHA DE AVALIAÇÃO M8	34
GRUPO C	34
EXERCÍCIO 1	34
GRUPO B	34
EXERCÍCIO 2	34
GRUPO A	34
EXERCÍCIO 3	34
GRUPO AA	34
EXERCÍCIO 4	34

DFT

TÓPICOS

DFT

A DFT e a SF de sinais discretos periódicos

A DFT e a TF de sinais discretos não periódicos

A DFT e SF de sinais contínuos periódicos

A DFT e a TF de sinais contínuos não periódicos

Apresenta-se neste Módulo a DFT – Transformada Discreta de Fourier. É desenvolvida em Apêndice a relação desta transformação com a SF de sinais discretos periódicos, com a TF de sinais discretos não periódicos, com a SF de sinais contínuos periódicos e com a TF de sinais contínuos não periódicos.

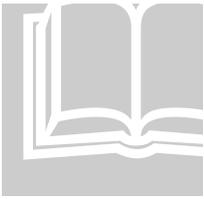
Os principais resultados deduzidos são apresentados no início do Módulo, seguindo-se um grande conjunto de exemplos de aplicação, todos eles baseados na utilização do Matlab para cálculo dos coeficientes da DFT, nomeadamente através da utilização da função FFT.

Para além de exemplos que procuram esclarecer a relação da DFT com as diversas transformações vistas em Módulos anteriores, são ainda dados exemplos que procuram dar ao aluno sensibilidade relativamente à interpretação dos resultados alcançados.

Objectivos

No fim deste módulo o aluno deverá :

1. Saber calcular a DFT de um sinal discretos.
2. Saber calcular e interpretar a SF de um sinal discreto periódico a partir dos coeficientes da sua DFT.
3. Saber calcular e interpretar a TF de um sinal discreto não periódico a partir dos coeficientes da sua DFT.
4. Saber calcular e interpretar a SF de um sinal contínuo periódico a partir dos coeficientes da DFT de um conjunto de amostras desse sinal.
5. Saber calcular e interpretar a TF de um sinal contínuo não periódico a partir dos coeficientes da DFT de um conjunto de amostras desse sinal.
6. Saber calcular e interpretar TF de um sinal contínuo periódico a partir dos coeficientes da DFT de um conjunto de amostras desse sinal.



1. DFT (Transformada Discreta de Fourier)

DFT

Define-se a **DFT – Transformada Discreta de Fourier** de um qualquer sinal discreto $x[n]$, descrito por uma sequência finita de N valores, no intervalo $[0, N - 1]$, como

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

, com $\Omega_0 = 2\pi/N$. A partir da sequência de N valores que constitui a DFT do sinal, este pode ser reconstruído por

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{jk\Omega_0 n}$$

, com $k \in [0, N - 1]$.

Exemplo 1.1

A figura M8.1 mostra os $N = 12$ valores do sinal $x[n] = 0.5^n (u[n] - u[n - 12])$ e os respectivos $N = 12$ valores correspondentes aos módulos dos coeficientes da sua DFT, $X[k]$.

A DFT e a SF de sinais discretos periódicos

Os coeficientes da SF de um sinal discreto periódico $x[n]$ definido por N amostras do seu período fundamental, $n \in [0, N - 1]$, e os coeficientes da sua DFT estão relacionados por

$$C_k = \frac{1}{N} X[k]$$

Exemplo 1.2

A figura M8.2 mostra um período do sinal discreto $x[n] = \cos[\Omega_0 n] + 0.5 \cos[4\Omega_0 n]$, com $\Omega_0 = 2\pi/N = \pi/20$, ou seja $N = 40$, e os coeficientes da SF, calculados com base nos coeficiente da DFT, $C_k = X[k]/N$, representados no intervalo $[-N/2, N/2]$.

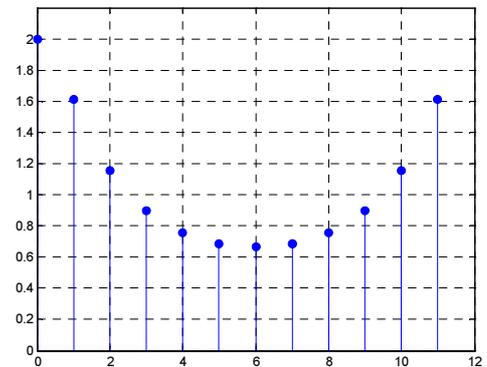
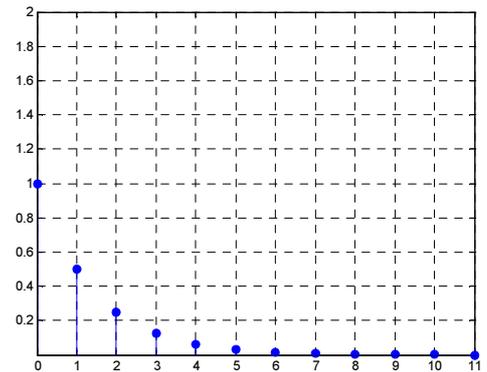


Figura M8.1

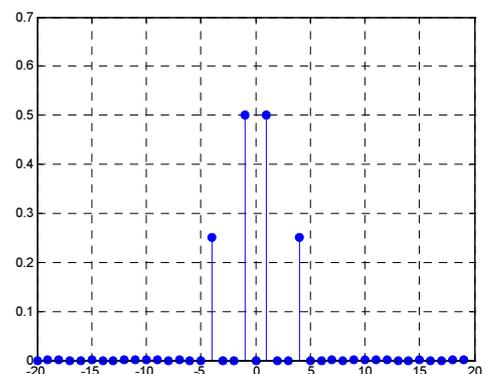
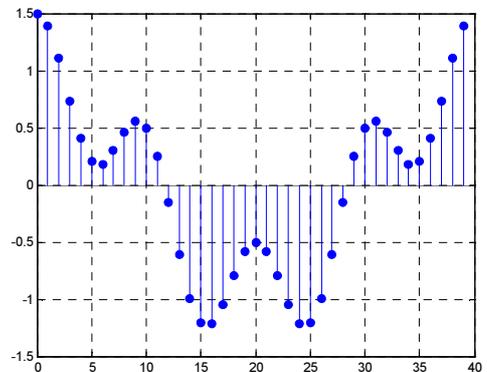


Figura M8.2

A DFT e a TF de sinais discretos não periódicos

Dado um sinal discreto não periódico $x[n]$ definido por N amostras, $n \in [0, N - 1]$, os coeficientes da DFT desse sinal correspondem a amostras da sua TF, $X(\Omega)$, nos pontos $\Omega = k\Omega_0$

$$X(k\Omega_0) = X[k]$$

com $\Omega_0 = 2\pi/N$.

Exemplo 1.3

A figura M8.3 mostra o módulo e o argumento da TF do sinal $y[n] = 0.5^n u[n]$ no intervalo $[-\pi, \pi]$, conforme visto no Módulo 7 $Y(\Omega) = e^{j\Omega} / (e^{j\Omega} - 0.5)$, a que se sobrepôs o módulo e o argumento dos coeficientes $X[k]$, do sinal $x[n] = 0.5^n (u[n] - u[n - 12])$, que se mostrou na figura M8.1, redistribuídos no intervalo $[-\pi, \pi]$. Como pode ver, a seqüência de valores da DFT correspondem a amostra da TF do sinal $y[n]$.

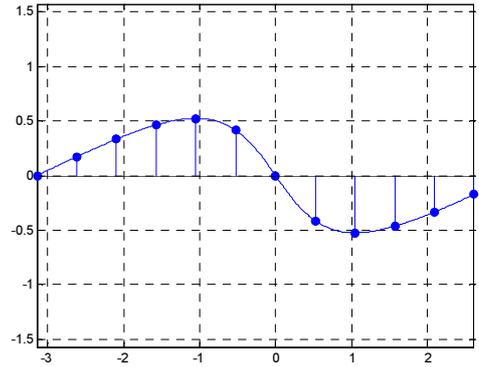
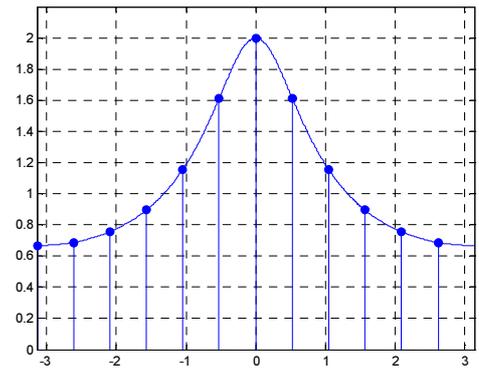


Figura M8.3

A DFT e a SF de sinais contínuos periódicos

Admitindo que um sinal contínuo periódico, de período T_0 , é de banda limitada, $|X(\omega)| = 0, \forall |\omega| > \omega_M$, e se verifica $\omega_s > 2\omega_M$, sendo ω_M a frequência máxima do sinal e ω_s a frequência de amostragem, os coeficientes da sua SF, C_k , podem ser calculados a partir dos coeficientes da DFT, $X[k]$, do sinal discreto constituído pela seqüência de $N = T_0/T_s$ amostras do sinal contínuo obtidas em intervalos equiespaçados, $x_d[n] = x(nT_s)$, com $n \in [0, N - 1]$, sendo

$$C_k = \frac{1}{N} X[k]$$

Exemplo 1.4

A figura M8.4 mostra um período do sinal contínuo periódico $x(t) = \cos(\omega_1 t) + 0.5 \cos(4\omega_1 t)$, com $\omega_1 = 2\pi/40$, a que se sobrepôs o sinal $x(nT_s) = \cos(\omega_1 nT_s) + 0.5 \cos(4\omega_1 nT_s)$, com $\omega_s = 6\pi/10$, e os coeficientes da DFT do sinal discreto $x_d[n] = x(nT_s)$, constituído por $N = 12$ amostras equiespaçadas do sinal

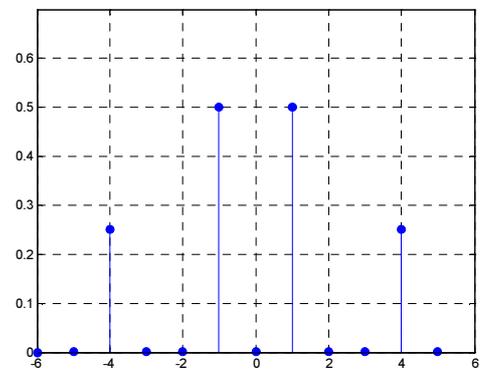
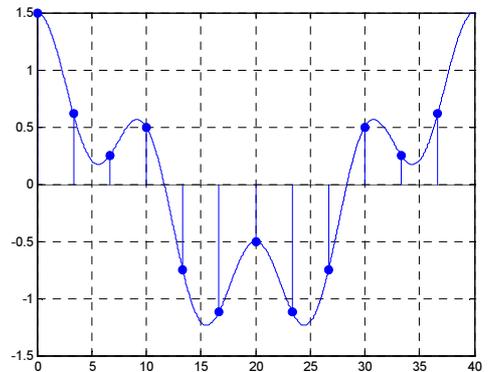


Figura M8.4

contínuo, representados no intervalo $[-N/2, N/2]$.

A DFT e a TF de sinais contínuos não periódicos

Admitindo que um sinal contínuo não periódico é de banda limitada, $|X(\omega)| = 0, \forall |\omega| > \omega_M$, e se verifica $\omega_s > 2\omega_M$, sendo ω_M a frequência máxima do sinal e ω_s a frequência de amostragem, obtemos amostras da TF do sinal, $X(\omega)$, nos pontos $\omega = k\Omega_0/T_s$, calculando os coeficientes da DFT, $X[k]$, do sinal discreto constituído pela sequência de N amostras do sinal contínuo, obtidas em intervalos equiespaçados, $x_d[n] = x(nT_s)$, com $n \in [0, N-1]$, sendo

$$X\left(\frac{k\Omega_0}{T_s}\right) = T_s X[k]$$

Exemplo 1.5

A figura M8.5 mostra: o sinal contínuo $x(t) = 2 \operatorname{sinc}^2(t/\pi)$; a sua TF $X(\omega) = 2\pi\Lambda(\omega/2)$, $x(t)$ é portanto um sinal de banda limitada com $\omega_M = 2$; o sinal discreto $x(nT_s) = 2 \operatorname{sinc}^2(nT_s/\pi)$, composto por $N = 40$ amostras retiradas do sinal contínuo com uma frequência de amostragem $\omega_s = 2\pi$; e os $N = 40$ coeficientes da DFT do sinal discreto devidamente escalado na amplitude e no eixo de frequências.

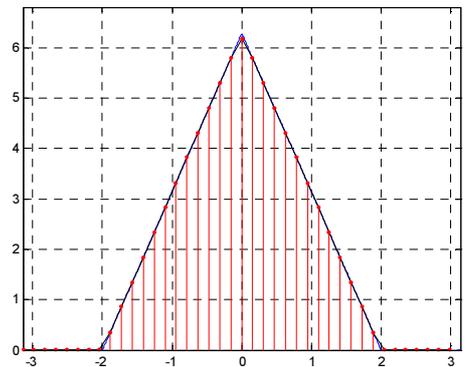
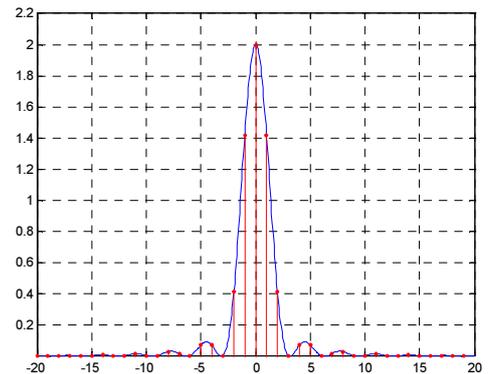
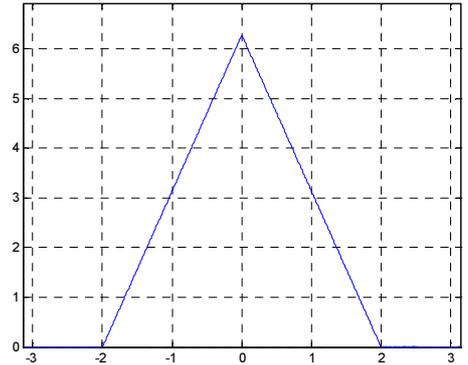
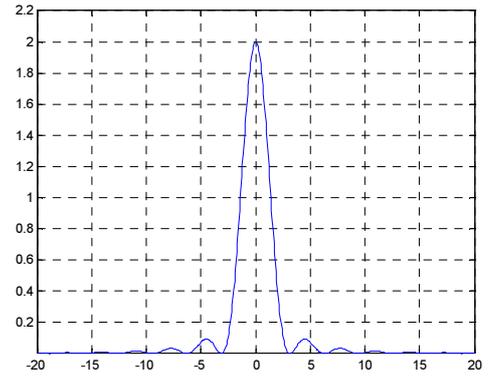
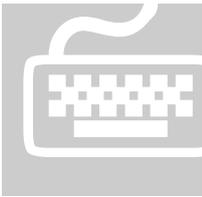


Figura M8.5



Matlab 8.1

DFT

Exemplo 1

Recorra ao *Matlab* para calcular a DFT dos sinais que se mostram na figura 8.6

A DFT de uma sequência finita, $x[n]$, é dada por

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

, podendo ser facilmente calculada recorrendo à função *fft*.

Assim, temos para $x[n]$

```
x=[2 2 -1]
Xk=fft(x)
Xk =
    3.0000    1.5000 - 2.5981i
    1.5000    2.5981i
```

, para $y[n]$

```
y=[4 3 2 1]
Yk=fft(x)
Yk =
   10.0000    2.0000 - 2.0000i
    2.0000    2.0000 + 2.0000i
```

, e para $x_2[n]$

```
x2=[5 -1 -2 3]
X2k=fft(x2)
X2k =
    5.0000    7.0000 + 4.0000i
    1.0000    7.0000 - 4.0000i
```

Compare com os resultados obtidos analiticamente no Apêndice 2.

Note que qualquer dos 3 sinais está definido no intervalo $n \in [0, N - 1]$ pelo que, estando nas condições da definição da DFT, não é necessário qualquer cuidado na utilização da função *fft*.

Exemplo 2

Calcule e represente os coeficientes da DFT do sinal discreto $x[n]$ representado na figura M8.7

Começamos por definir a sequência de $N = 10$ valores do sinal

```
x=[0 0 0 2 1 3 1 2 0 0];
N=length(x);
```

, calculamos de seguida os coeficientes da DFT

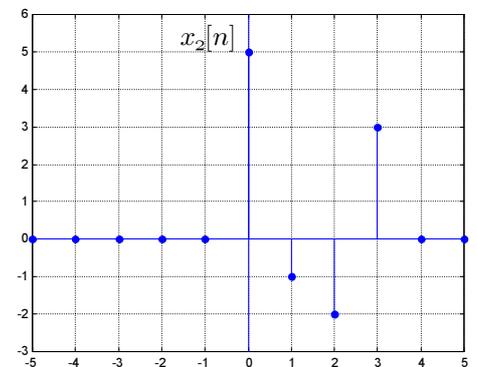
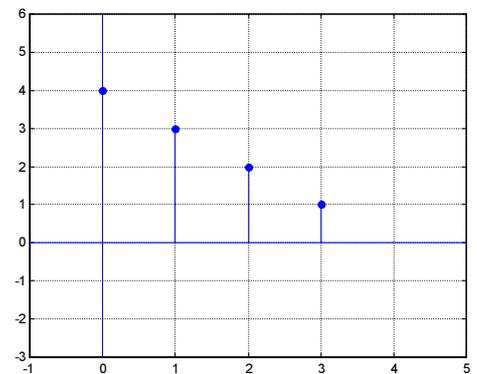
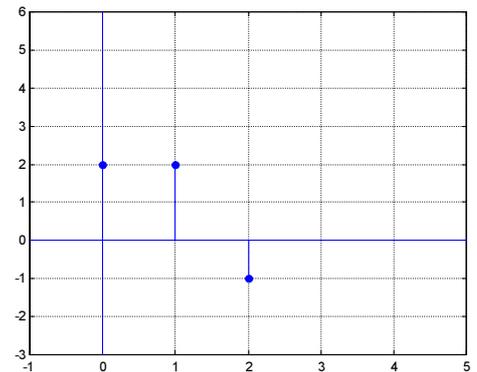


Figura M8.6

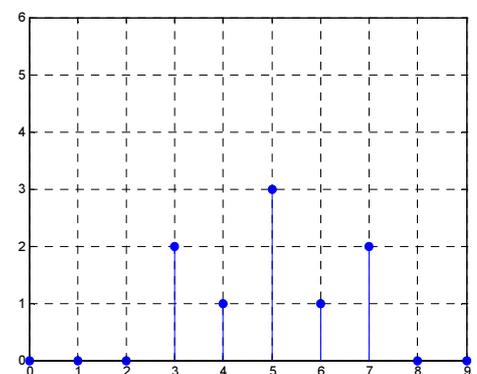


Figura M8.7

do sinal recorrendo à função *fft*,

```
Xk=fft(x)
```

, e finalmente procedemos à representação do módulo e do argumento dos coeficientes, em função do índice k , conforme se mostra na figura M8.8

```
k=0:N-1;
figure(1)
stem(k,abs(Xk),'filled');
grid on
axis([0 N 0 1.1*max(abs(Xk))]);
figure(2)
stem(k,angle(Xk),'filled');
grid on; axis([0 N -4 4]);
```

A DFT e a TFSD

Exemplo 3

Calcule e represente a TF do sinal discreto descrito na figura M8.7

Recorrendo à biblioteca simbólica do *Matlab*, e pré-definindo os valores de n e $x[n]$ para simplificar o procedimento simbólico, conforme visto em M7-17 Exercício 3, temos

```
syms w n
x=[0 0 0 2 1 3 1 2 0 0];
N=length(x);
n=0:N-1;
xb=subs(sym('exp(-j*w*n)'));
X=simplify(xb*x')
X =
    2*exp(-3*i*w)+exp(-4*i*w)
    +3*exp(-5*i*w)+exp(-6*i*w)
    +2*exp(-7*i*w)
```

Não vale a pena tentar simplificar manualmente a expressão uma vez que apenas estamos interessados na representação gráfica. Assim, podemos proceder de imediato à representação do módulo e do argumento de $X(\Omega)$, em função de $\Omega \in [0, 2\pi]$, conforme se mostra na figura M8.9

```
wg=0:0.01:2*pi;
Xg=double(subs(X,w,wg));

figure(55)
plot(wg,abs(Xg));
grid on;
axis([min(wg) max(wg) 0
1.1*max(abs(Xg))]);
figure(56)
plot(wg,angle(Xg));
grid on;
axis([min(wg) max(wg) -4 4]);
```

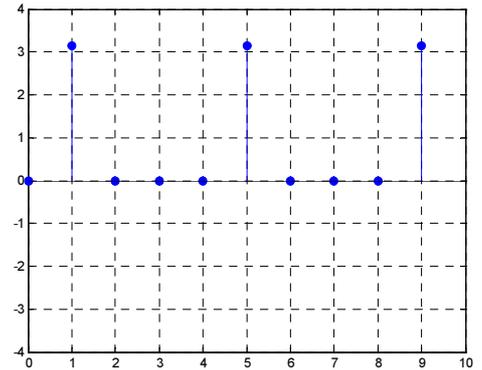
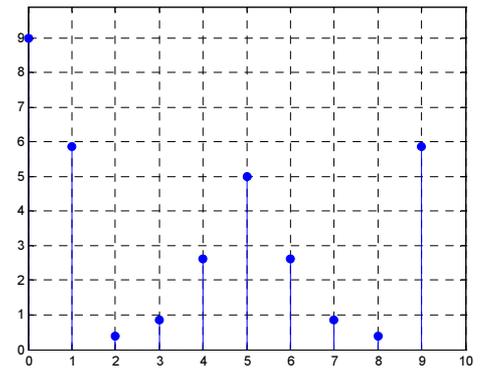


Figura M8.8

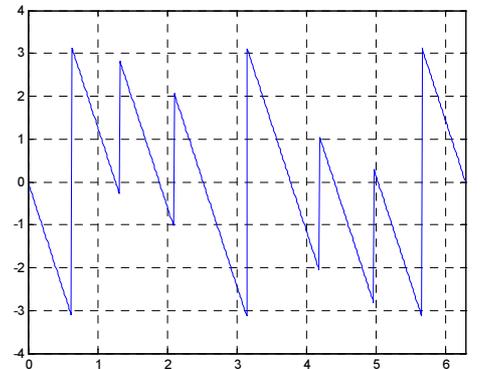
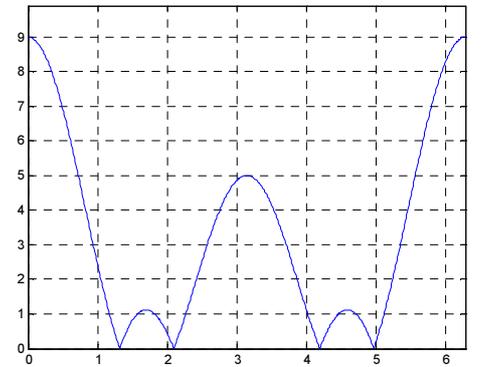


Figura M8.9

Exemplo 4

Sobreponha os coeficientes da DFT calculados no Exemplo 2 à TF calculada no Exemplo 3.

De modo a identificar melhor a relação entre os coeficientes da DFT do sinal $x[n]$ e a sua TF podemos facilmente proceder à sobreposição da representação gráfica das duas grandezas, bastando para isso representar $X[k]$ em função de Ω . **Dado que cada um dos coeficientes existe para $\Omega = k\Omega_0$** , basta fazer

```
w0=2*pi/N;
figure(55); hold on;
stem(w0*k,abs(Xk),'filled');
hold off; pause
figure(56); hold on
stem(w0*k,angle(Xk),'filled');
hold off; pause
```

, obtendo-se assim os gráficos da figura M8.10. Como pode ver, a sequência de valores da DFT correspondem a amostra da TF do sinal.

Representação em $[-\pi, \pi]$

Exemplo 5

Ainda relativamente ao sinal $x[n]$ definido na figura 8.7, represente a sua TF no intervalo $\Omega \in [-\pi, \pi]$ e sobreponha-lhe os coeficientes da DFT.

Como sabe, a TF de um sinal discreto é periódica de 2π , correspondendo as componentes próximas de 0 e 2π às baixas frequências e as componentes próximas de π e $-\pi$ às altas frequências. Para uma mais fácil interpretação do espectro do sinal, é comum que a representação de $X(\Omega)$ seja feita para $\Omega \in [-\pi, \pi]$. O procedimento para proceder à representação de $X(\Omega)$ neste intervalo é imediato, dado que basta calcular os respectivos valores da expressão simbólica

```
...
wg=-pi:0.01:pi;
Xg=double(subs(X,w,wg));
...
```

Relativamente aos coeficientes da DFT, e embora a função *fft* assumo $k \in [0, N-1]$, o procedimento é igualmente simples, existindo uma função *Matlab* definida para esse efeito. A função *fftshift* quando aplicada a um vector v

$$v = [0, 1, \dots, N/2 - 1, N/2, \dots, N - 1]$$

separa a segunda metade do vector e concatena no início, originando o vector u

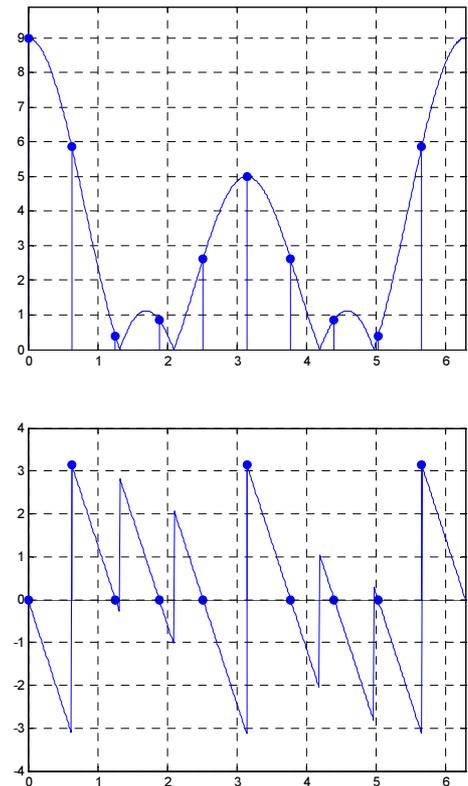


Figura M8.10

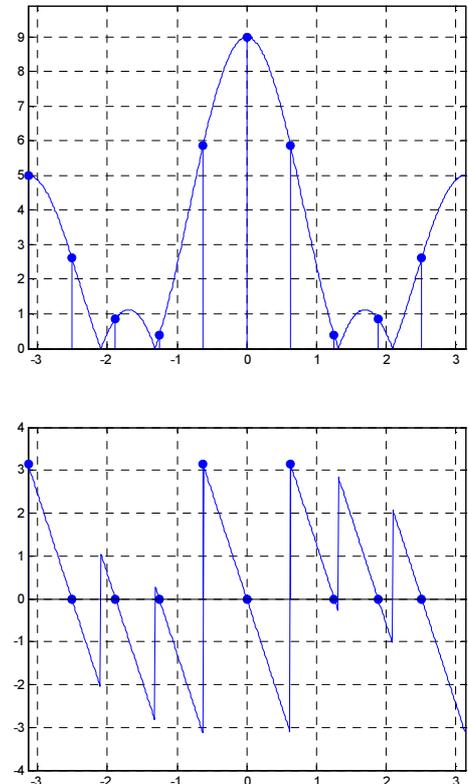


Figura M8.11

$$u = [N/2, \dots, N-1, 0, 1, \dots, N/2,]$$

(apesar do nome, a função pode, evidentemente, ser usada independentemente do contexto do cálculo de uma *fft*). Atendendo à periodicidade inerente aos coeficientes da DFT (recorde a relação entre a DFT e a SF), basta então fazer

```
...
Xk=fft(x);
Xk=fftshift(Xk);
k=-N/2:N/2-1;
...
```

Para uma mais fácil interpretação, repetem-se seguidamente todo os procedimentos necessários à representação pedida

```
syms w n
x=[0 0 0 2 1 3 1 2 0 0];
N=length(x);
n=0:N-1;

% X(w) %%%
xb=subs(sym('exp(-j*w*n)'));
X=simplify(xb*x');
wg=-pi:0.01:pi;
Xg=double(subs(X,w,wg));

figure(57);
plot(wg,abs(Xg));grid on;
axis([min(wg) max(wg) 0 1.1*max(abs(Xg))]);
figure(58);
plot(wg,angle(Xg)); grid on;
axis([min(wg) max(wg) -4 4]);

% X[k] %%%
Xk=fft(x);
Xk=fftshift(Xk);
k=-N/2:N/2-1;

w0=2*pi/N;
figure(57); hold on;
stem(w0*k,abs(Xk),'filled');
hold off; pause
figure(58); hold on;
stem(w0*k,angle(Xk),'filled');
hold off;
```

Obtendo-se assim a representação no intervalo $\Omega \in [-\pi, \pi]$, que se mostra na figura 8.11.

x[n] definido não em [0, N-1] – Translação circular

Exemplo 6

Considere o sinal discreto $y[n]$ representado na figura M8.12. Represente a sua TF no intervalo $[-\pi, \pi]$ e sobreponha-lhe os coeficientes da DFT.

O sinal não está definido para $n \in [0, N-1]$ pelo que não podemos utilizar de imediato a função *fft*.

Note que não é dada informação temporal à função *fft*, assumindo-se que $n \in [0, N-1]$, sendo que de igual modo se assume que os coeficientes devolvidos são definidos para $k \in [0, N-1]$.

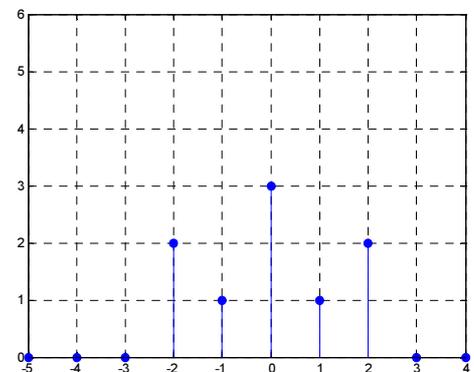


Figura M8.12

Note que a informação temporal apenas tem implicações no espectro de fase, não alterando em nada o espectro de amplitude.

O sinal $y[n]$ definido na figura M8.12 é uma versão em avanço do sinal $x[n]$ definido na figura M8.7.

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n + 5] \\ &= x[n + N/2] \end{aligned}$$

Se representarmos a sua TF

```
syms w n
y=[0 0 0 2 1 3 1 2 0 0];
N=length(y);
n=-N/2:N/2-1;
xb=subs(sym('exp(-j*w*n)'));
Y=simplify(xb*y)
Y =
    2*cos(w)+4*cos(2*w)+3

wg=-pi:0.01:pi;
Yg=double(subs(Y,w,wg));
...
```

obtemos os gráficos que se mostram na figura M8.13. Compare-os com a com a representação da TF do sinal $x[n]$ vistos nos exemplos anteriores. Note que o espectro de amplitude é igual, apenas existindo diferença no espectro de fase.

Para podermos calcular os coeficientes da DFT do sinal $y[n]$, e dados que não podemos dar informação temporal à fft , é necessário proceder a uma translação do sinal.

Note que, e independentemente do sinal $y[n]$ tal como representado na figura M8.12 ser ou não um sinal de energia, isto é ser nulo fora do intervalo $[-5, 4]$, para procedermos a uma translação de modo a calcular os coeficientes da DFT de um sinal que não está definido no intervalo $n \in [0, N - 1]$, e dado o carácter periódico das funções de base, devemos considerar a versão periódica do sinal, tal como se mostra na figura M8.14. Dada esta representação, basta seleccionar os valores que o sinal assume no intervalo $n \in [0, N - 1]$, como se mostra na figura M8.15, para obtermos a versão transladada do sinal original.

A operação corresponde a uma **translação circular** no intervalo $n \in [0, N - 1]$ e pode ser feita recorrendo à função *mod*

```
x=[0 0 0 2 1 3 1 2 0 0];
N=length(x);
n=-N/2:N/2-1;
m=min(n);
n=0:N-1;
n=mod(n-m,N);
x=x(n+1)
```

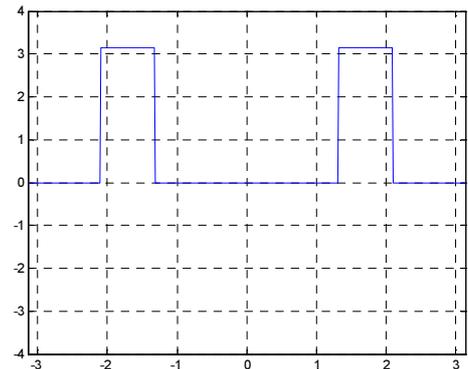
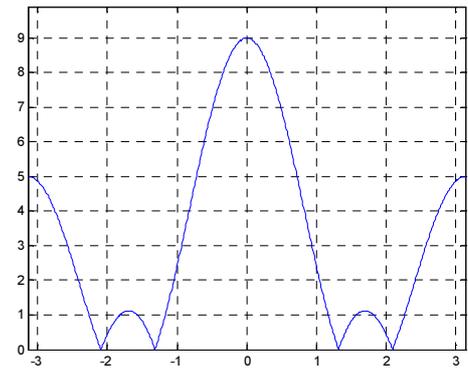


Figura M8.13

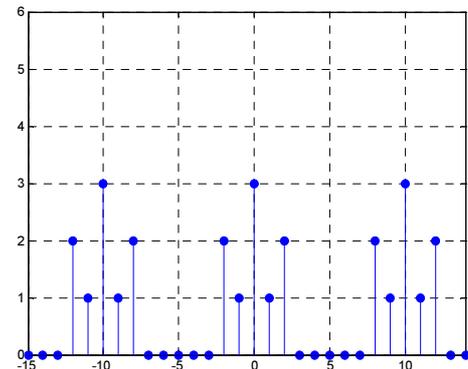


Figura M8.14

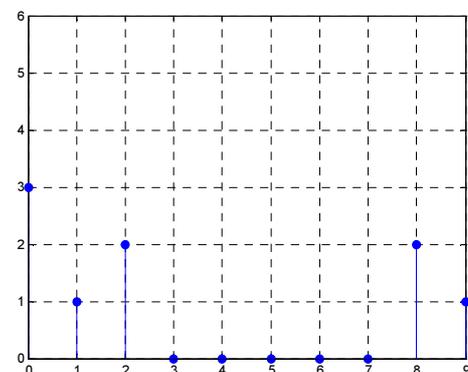


Figura M8.15

```

figure(562)
nn=0:N-1;
stem(nn,x,'filled');
grid on;
axis([min(nn) max(nn) min(x)
2*max(x) ]);

```

Assim, de modo a obter a representação dos coeficientes da DFT sobrepostos à TF do sinal, como se mostra na figura M8.16, podemos fazer

```

syms w n
x=[0 0 0 2 1 3 1 2 0 0];
N=length(x); n=-N/2:N/2-1;
% X(w)
xb=subs(sym('exp(-j*w*n)'));
X=simplify(xb*x');
wg=-pi:0.01:pi;
Xg=double(subs(X,w,wg));
figure(57); plot(wg,abs(Xg));
grid on;
axis([min(wg) max(wg) 0
1.1*max(abs(Xg))]);
figure(58); plot(wg,angle(Xg));
grid on;
axis([min(wg) max(wg) -4 4]);
% shift circular
m=min(n);
n=0:N-1;
n=mod(n-m,N);
x=x(n+1);
% X[k]
Xk=fft(x);
Xk=fftshift(Xk);
k=-N/2:N/2-1;
w0=2*pi/N;
figure(57); hold on;
stem(w0*k,abs(Xk),'filled');
hold off; figure(58); hold on;
stem(w0*k,angle(Xk),'filled');
hold off; pause

```

Aumento da densidade de amostras da TF

Exemplo 7

Considere de novo o sinal que se mostra na figura M8.7 e a sua TF e coeficientes da DFT que se mostra na figura M8.11. Sendo o sinal definido por $N = 10$ pontos, obtivemos 10 amostras da sua TF, o que dá uma ideia pobre da sua evolução. **Como obter mais amostra da TF do sinal?**, obviamente aumentando o número de coeficientes da DFT calculados.

Note que **os zeros à direita do sinal não contribuem com qualquer informação para a TF do sinal** (quer para o espectro de amplitude quer para o espectro de fase), apenas contribuindo para o número de amostra da DFT que é calculada. Consideremos um sinal idêntico ao da figura M8.7, mas desprezemos os zeros à direita dos valores significativos. Procedendo como no Exemplo 7

```

x=[0 0 0 2 1 3 1 2];
N=length(x);
n=-5:2;
...

```

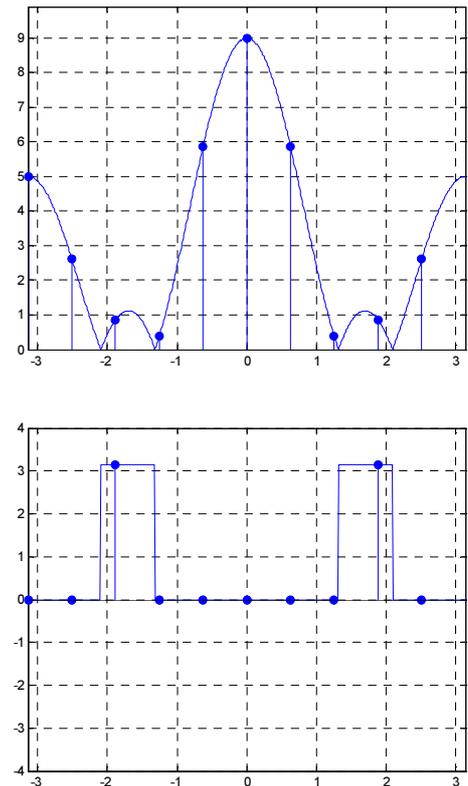


Figura M8.16

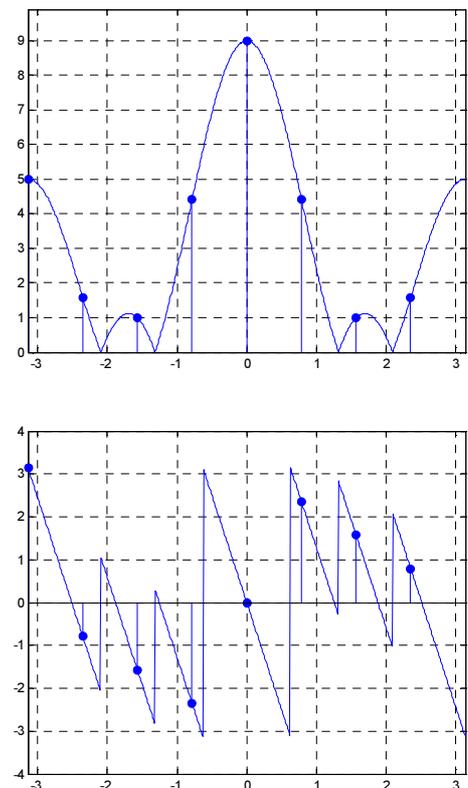


Figura M8.17

Observe a figura M8.17. Como pode verificar a TF deste sinal é idêntica ao do sinal da figura M8.11. O número de amostra da DFT é agora menor ($N = 8$), donde resulta que a interpretação da TF a partir das amostra é ainda mais pobre.

Procedamos agora ao processo inverso, isto é, juntemos zeros à direita do sinal original. A figura M8.18 mostra o sinal original ao qual se juntaram, à direita, 22 zeros. Ficamos assim com $N = 30$ amostras do sinal, pelo que passamos a poder calcular 30 amostras da sua TF. Procedendo como no Exemplo 7

```
Z=zeros(1,22)
x=[0 0 0 2 1 3 1 2 Z];
N=length(x);
n=0:N-1
...
```

, obtemos os gráficos que se mostram na figura M8.19, dos quais fica bastante mais clara a evolução da TF do sinal a partir da observação das suas amostras.

Da junção de zeros à direita das amostras de um sinal discreto não resulta qualquer alteração na TF do sinal, $X(\Omega)$, mas resulta uma maior densidade de amostras da TF obtidas a partir do cálculo da sua DFT, $X[k] \equiv X(k\Omega_0)$.

O algoritmo de cálculo da fft, cuja análise está fora do âmbito desta cadeira, **é bastante mais eficiente quando o número de amostras é um múltiplo de 2**. Tendo este facto em atenção, podemos sistematizar o cálculo dos coeficientes da DFT de um sinal discreto, com o objectivo de obter amostras da TF do sinal, que nos dêem uma ideia clara da sua evolução, conforme se descreve no exemplo seguinte.

Exemplo 8

Considere o sinal discreto $x[n] = 0.5^{(n-4)}(u[n+4] - u[n-6])$ representado na figura M8.20. Represente a sua TF no intervalo $[-\pi, \pi]$ e sobreponha-lhe 64 coeficientes da DFT.

Resumindo os procedimentos vistos nos exemplos anteriores, temos

```
syms w n
n=-8:5;
x=0.5.^(n-4).*(Heaviside(n+4)-
               Heaviside(n-6));
N=length(x);
% x[n]
figure(1)
stem(n,x,'filled');
grid on
```

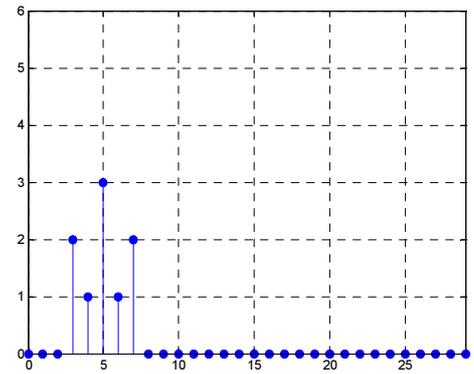


Figura M8.18

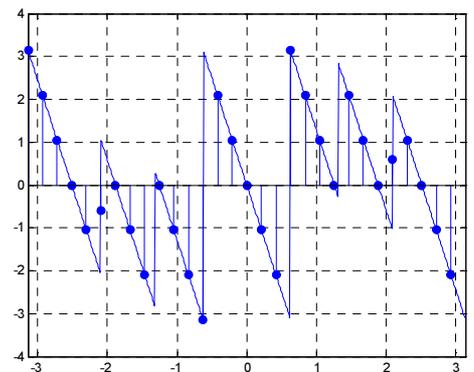
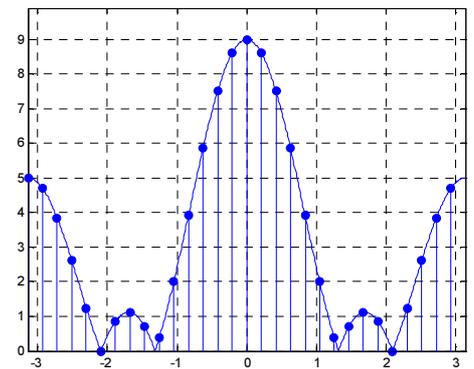


Figura M8.19

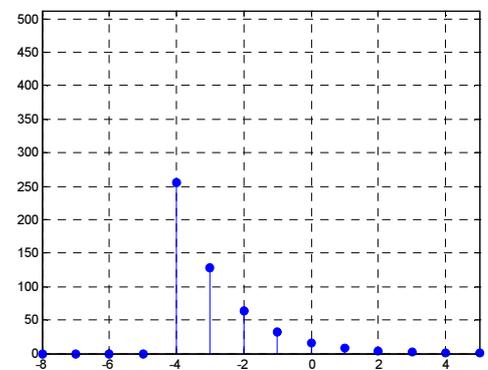


Figura M8.20

```

axis([min(n) max(n) min(x)
      2*max(x) ]);
% X(w)
xb=subs(sym('exp(-j*w*n)'));
X=simplify(xb*x');
wg=-pi:0.01:pi;
Xg=double(subs(X,w,wg));
figure(2)
plot(wg,abs(Xg));
grid on;
axis([min(wg) max(wg) 0
      1.1*max(abs(Xg))]);

figure(3)
plot(wg,angle(Xg));
grid on;
axis([min(wg) max(wg) -4 4]);
% X[k]
L=6;
M=2^L;
m=min(n);
Z=M-N;
x=[x zeros(1,Z)];
n=0:M-1;
n=mod(n-m,M);
x=x(n+1);
Xk=fft(x);
Xk=fftshift(Xk);
k=-M/2:M/2-1;
w0=2*pi/M;
figure(2); hold on;
stem(w0*k,abs(Xk),'.r');
hold off;
figure(3); hold on;
stem(w0*k,angle(Xk),'.r');
hold off;

```

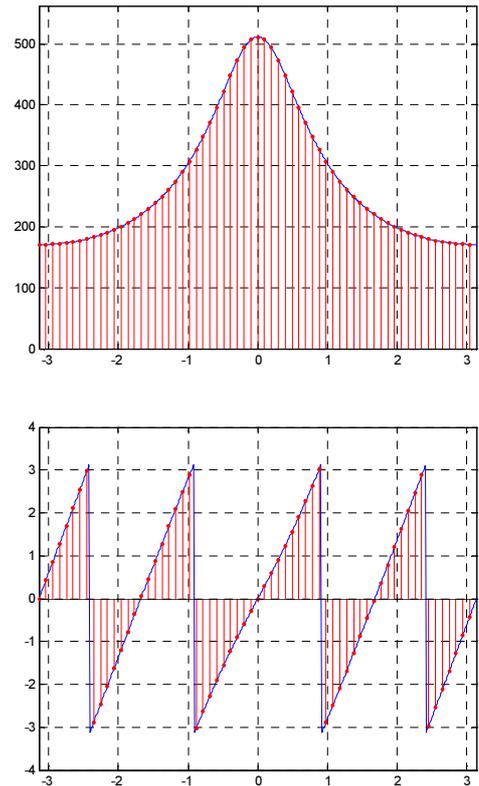


Figura M8.21

Obtemos assim os gráficos que se mostram na figura M8.21. É então possível, a partir do conhecimento de N amostras de um sinal discreto, traçar o gráfico da TF desse sinal com base em M amostras calculadas por recurso à fft , dispensando portanto a utilização da biblioteca simbólica. Note que a simulação da evolução contínua de $X(\omega)$ é tão rigorosa quanto se deseje, bastando escolher um número M de amostras suficientemente grande.

Exemplo 9

Represente a TF do sinal discreto $x[n] = 0.5^n(u[n] - u[n - 10])$, no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Podemos começar por definir uma função que, com base num número N de amostras, nos permita traçar a TF de um sinal discreto $x[n]$. O sinal poderá estar definido em qualquer intervalo, ou seja, não necessariamente $[0, N - 1]$, e o gráfico é traçado com base em M pontos, desejavelmente um múltiplo de 2 ($M = 2^L$)

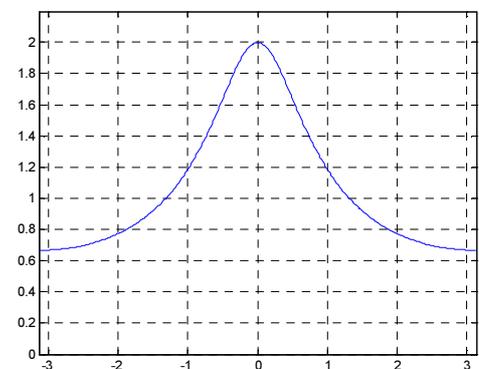


Figura M8.22

```

function Xk = plotTFSD(x,n,M)

    N=length(x);
    m=min(n);
    x=[x zeros(1,M-N)];
    n=0:M-1;
    n=mod(n-m,M);
    x=x(n+1);
    Xk=fft(x);
    Xk=fftshift(Xk);
    k=-M/2:M/2-1;
    w0=2*pi/M;

    figure(1); plot(w0*k,abs(Xk));
    axis([-pi pi 0 1.1*max(abs(Xk))]); grid on;
    figure(2); plot(w0*k,angle(Xk));
    axis([-pi pi -1.1*pi 1.1*pi]); grid on;

```

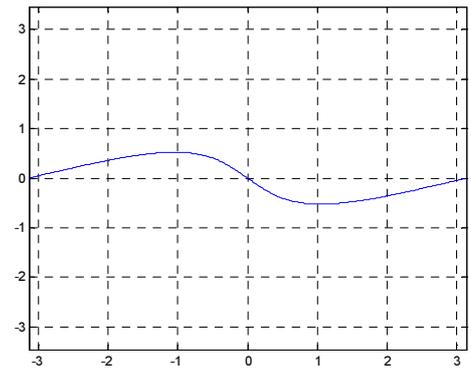


Figura M8.23

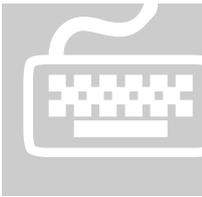
Podemos agora fazer

```

n=0:9;
x=0.5.^n.*(Heaviside(n)-
            Heaviside(n-10));
plotTFSD(x,n,2^9)

```

Obtendo assim os gráficos do espectro de amplitude e de fase que se mostram nas figuras M8.22 e M8.23.



Matlab 8.2

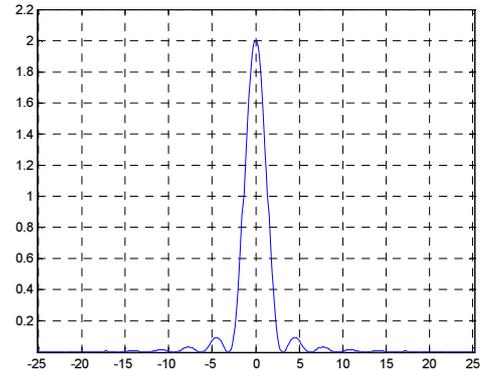
A DFT e a TFSC não periódicos

Exemplo 1

Amostre o sinal contínuo

$$x(t) = 2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{t}{\pi}\right)$$

com uma frequência de amostragem $f_s = 5/2\pi \text{ Hz}$, represente o espectro de amplitude do sinal amostrado a partir do cálculo dos coeficientes da DFT, e compare-o com o espectro de amplitude do sinal contínuo.



Vamos começar por representar o sinal, recolhendo amostras suficientemente próximas

```
ws=5;
fs=ws/2/pi;
ts=1/fs;
% x(t)
t=-20*ts:ts/10:20*ts;
x=2*sinc(t/pi).^2;

figure(10);plot(t,x)
axis([min(t) max(t) 1.1*min(x) ...
      1.1*max(x)]); grid on
```

A TF do sinal $x(t)$ poderia ser obtida recorrendo à biblioteca simbólica. Neste caso particular não há necessidade dado tratar-se de uma TF conhecida. Basta atender à propriedade da dualidade da TF para reconhecer que

$$X(\omega) = 2\pi\Lambda\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Podemos representar graficamente o espectro de amplitude do sinal

```
% X(w)
w=-3*pi*fs:fs/10:3*pi*fs;
X= pi*(2+w).*(Heaviside(w+2)-Heaviside(w))...
+ pi*(2-w).*(eaviside(w-2)-Heaviside(w));

figure(11);plot(w,abs(X))
axis([min(w) max(w) 0 ...
      1.1*max(abs(X))]); grid on
```

A figura M8.24 mostra os gráficos assim obtidos. Note que o sinal $x(t)$ é um sinal de banda limitada, com $\omega_M = 2 \text{ rad s}^{-1}$. Assim, se amostrar-mos o sinal a uma frequência superior a $2\omega_M$, que é o caso do enunciado, dado que $\omega_s = 2\pi f_s = 5 = 2.5\omega_M$, podemos calcular amostras de $X(\omega)$ calculando os coeficientes $X[k]$ do sinal amostrado.

Vamos então amostrar o sinal em instantes múltiplos do período de amostragem

```
% x(nts)
nts=min(t):ts:max(t)-ts;
xnts=2*sinc(nts/pi).^2;

figure(10); hold on;
stem(nts,xnts,'r','filled');
hold off;
```

A figura M8.25 mostra o sinal $x(nT_s)$ sobreposto ao sinal $x(t)$. Obtivemos assim $N = 40$ amostras do sinal contínuo.

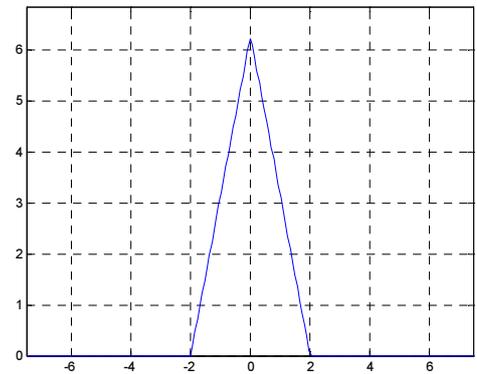


Figura M8.24

Nota: O sinal que estamos a analisar não é nulo fora do intervalo em que recolhemos as amostras, pelo que $x(nT_s)$ poderia não ser representativo de $x(t)$. Num próximo exemplo analisaremos esta questão. No caso em análise, dada a evolução do sinal, a questão não é relevante.

Podemos agora calcular os coeficientes da DFT do sinal discreto $x[n] = x(nT_s)$

```
% x(n)
N=length(nts);
n=min(nts)/ts:N/2-1;
x=xnts;
% x[k]
M=2^10
N=length(x);
m=min(n);

x=[x zeros(1,M-N)];
n=0:M-1;
n=mod(n-m,M);
x=x(n+1);

Xk=fft(x);
Xk=fftshift(Xk);
k=-M/2:M/2-1;
```

Dada a relação entre $X[k]$ e o espectro do sinal contínuo

$$X\left(\frac{k\Omega_0}{T_s}\right) = T_s X[k]$$

, podemos agora representar as amostras de $X(\omega)$, sobrepondo-as ao gráfico de $|X(\omega)|$ obtido a partir da expressão teórica

```
% Xc(w)
w0=2*pi/M;
wc=w0*k/ts;
Xc=ts*abs(Xk);

Xcm=max(Xc);
figure(11); hold on; plot(wc,Xc,'r','LineWidth',2);
axis([-pi*fs pi*fs 0 1.1*Xcm]);
grid on;
```

Obtemos assim o gráfico que se mostra na figura M8.26. Note que aumentámos o número de pontos ($M = 2^{10}$) de cálculo da DFT de modo a aumentar o número de amostras da TF, tal como se explicou nos exemplos anteriores. Note ainda que o domínio de representação válido de $X(\omega)$ a partir de $X[k]$ se restringe ao período fundamental do sinal amostrado, $\omega \in [-\omega_s/2, \omega_s/2]$.

Conforme se mostra no Apêndice 1, o sinal amostrado tem um espectro

$$X_p(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)$$

corresponde à sobreposição de réplicas da TF do sinal contínuo $x(t)$, escaladas de $1/T_s$ e trasladadas de múltiplos da frequência de amostragem. Vamos sobrepor as duas réplicas contíguas ao espectro obtido anteriormente

```
k=-3*M/2:3*M/2-1;
Xc3=[Xc Xc Xc];
figure(11); hold on; plot(w0*k/ts,Xc3,'r');
axis([min(w) max(w) 0 1.1*Xcm]);
plot([-pi*fs pi*fs ; -pi*fs pi*fs], [0 0 ; 1.1*Xcm 1.1*Xcm],':k'); hold off
```

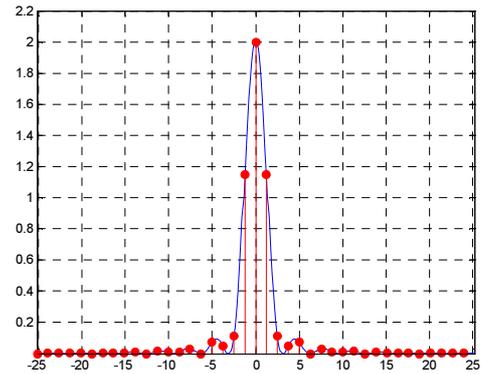


Figura M8.25

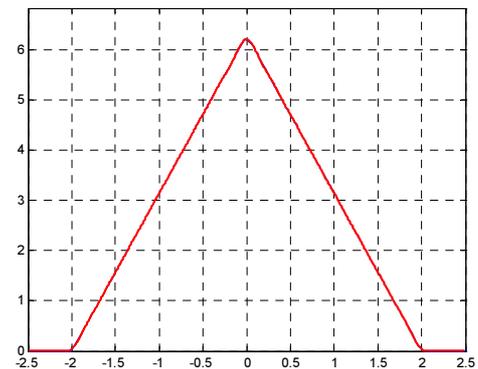


Figura M8.26

, obtendo assim o gráfico da figura M8.27, representativo de $|T_s X_p(\omega)|$, em que se observa que o espectro (de amplitude) no período fundamental não é alterado pela presença das réplicas, em resultado de se verificar $\omega_s = 5 > 2\omega_M$.

Exemplo 2

Repita o exemplo anterior para frequências de amostragem $\omega_s = 4$ e 3 rad s^{-1} .

Especificando $\omega_s = 4$ e repetindo os procedimentos do exemplo 1 obtemos os gráficos de $|X(\omega)|$ e de $|T_s X_p(\omega)|$ que se mostram na figura M8.28. Note como, sendo $\omega_s = 2\omega_M$, se atingiu o limite da frequência de amostragem para que os espectros das réplicas contíguas não interfiram.

Especificando $\omega_s = 3$ e repetindo os procedimentos do exemplo 1 obtemos os gráficos de $|X(\omega)|$ e de $|T_s X_p(\omega)|$ que se mostram na figura M8.29. Note como, sendo $\omega_s < 2\omega_M$, os espectros se sobrepõem, não sendo agora possível determinar $X(\omega)$ a partir do sinal amostrado.

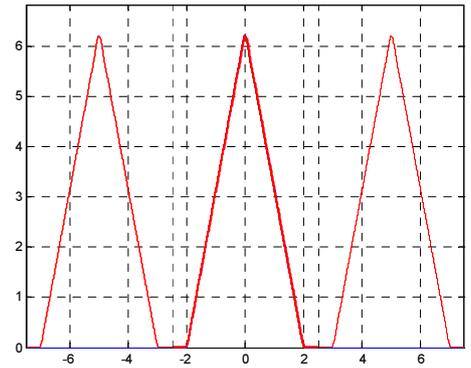


Figura M8.27

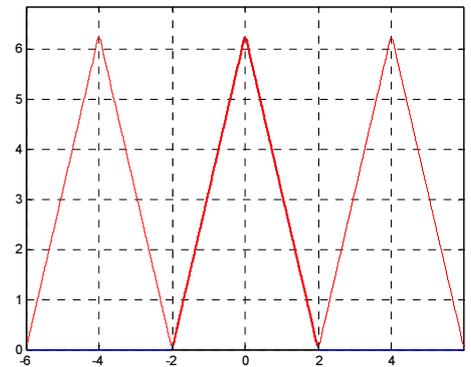
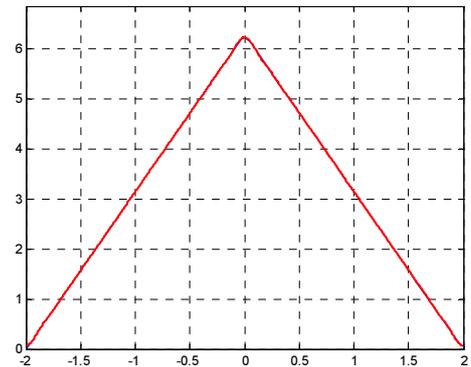


Figura M8.28

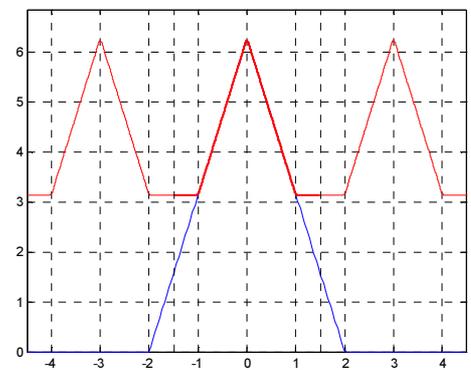
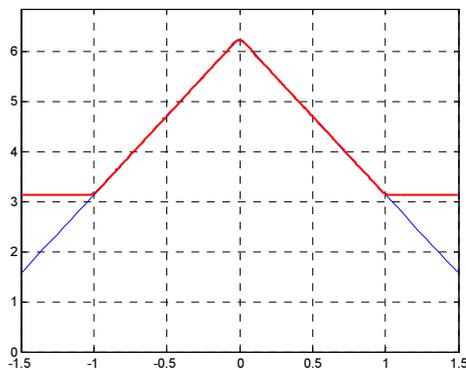


Figura M8.29

Exemplo 3

Amostre o sinal contínuo

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{10}\right)$$

com uma frequência de amostragem $f_s = 5/2\pi$ Hz, represente o espectro de amplitude do sinal amostrado a partir do cálculo dos coeficientes da DFT, e compare-o com o espectro de amplitude do sinal contínuo.

Procedendo como no Exemplo 1, apenas com algumas pequenas alterações associadas à precisão dos gráficos a obter, vamos começar por representar o sinal

```
...
t=-30*ts:ts/20:30*ts;
x=Heaviside(t+4)-Heaviside(t-6);
...
```

Tratando-se novamente de uma TF conhecida

$$X(\omega) = 10 \operatorname{sinc}\left(10 \frac{\omega}{2\pi}\right) e^{-j2\omega}$$

Podemos representar graficamente o espectro de amplitude do sinal

```
...
X=10*sinc(10*w/2/pi).*exp(-j*w*2);
...
```

A figura M8.30 mostra os gráficos assim obtidos. Note que o sinal $x(t)$ não é um sinal de banda limitada, pelo não existe nenhuma frequência de amostragem que nos permita calcular com exactidão as amostras de $X(\omega)$ calculando os coeficientes $X[k]$ do sinal amostrado.

Amostremos o sinal em instantes múltiplos do período de amostragem, procedendo como no Exemplo 1

```
...
xnts=Heaviside(nts+4)-
Heaviside(nts-6);
...
```

A figura M8.31 mostra o sinal $x(nT_s)$ sobreposto ao sinal $x(t)$. Obtivemos assim $N = 60$ amostras do sinal contínuo.

Podemos agora calcular os coeficientes da DFT do sinal discreto $x[n] = x(nT_s)$ e representar as amostras de $X(\omega)$, sobrepondo-as ao gráfico de $|X(\omega)|$ obtido a partir da expressão teórica.

O procedimento não tem qualquer alteração relativamente ao Exemplo 1. Obtemos assim o gráfico que se mostra na figura M8.32.,

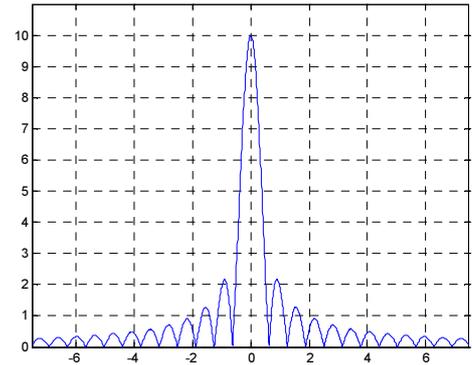
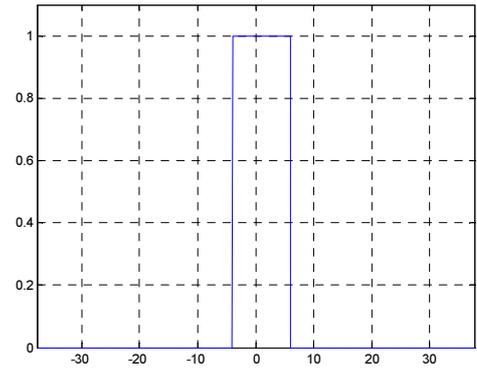


Figura M8.30

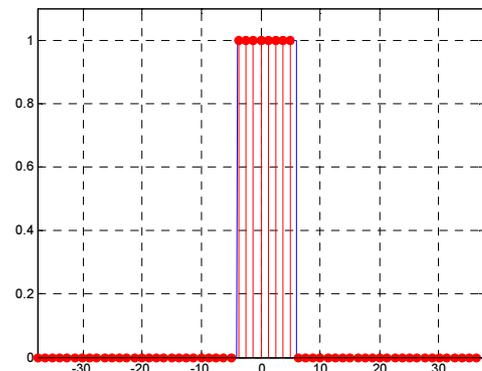


Figura M8.31

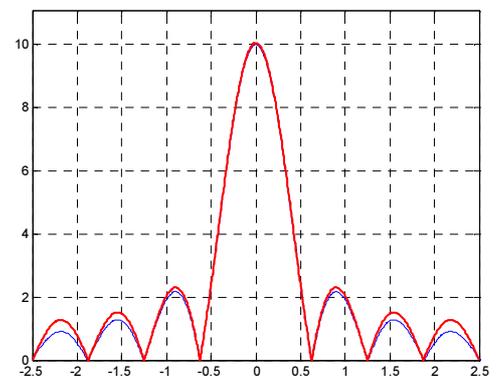


Figura M8.32

relativamente ao domínio de representação válido, $\omega \in [-\omega_s/2, \omega_s/2]$. Note como, embora se verifique a coincidência de valores no lobo principal, logo a partir do 2º lobo é clara a diferença entre os valores do espectro teórico e do calculado com base em $X[k]$. Vamos agora sobrepor as duas réplicas contíguas ao espectro obtido anteriormente, obtendo assim o gráfico da figura M8.33.

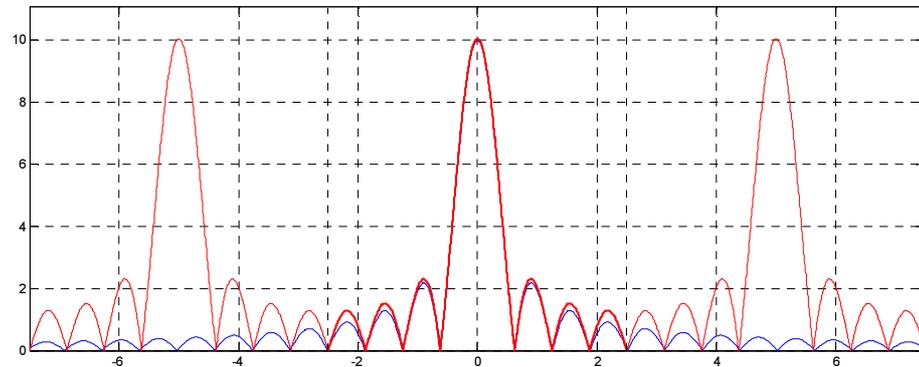


Figura M8.33

Não sendo o sinal $x(t)$ um sinal de banda limitada, a sobreposição entre as réplicas não pode ser evitada, deformando o espectro do período fundamental $[-\omega_s/2, \omega_s/2]$.

Exemplo 4

Repita o exemplo anterior para uma frequência de amostragem $\omega_s = 20 \text{ rad s}^{-1}$.

Especificando $\omega_s = 20$ e repetindo os procedimentos anteriores obtemos os gráficos de $|X(\omega)|$ e de $|T_s X_p(\omega)|$ que se mostram na figura M8.34.

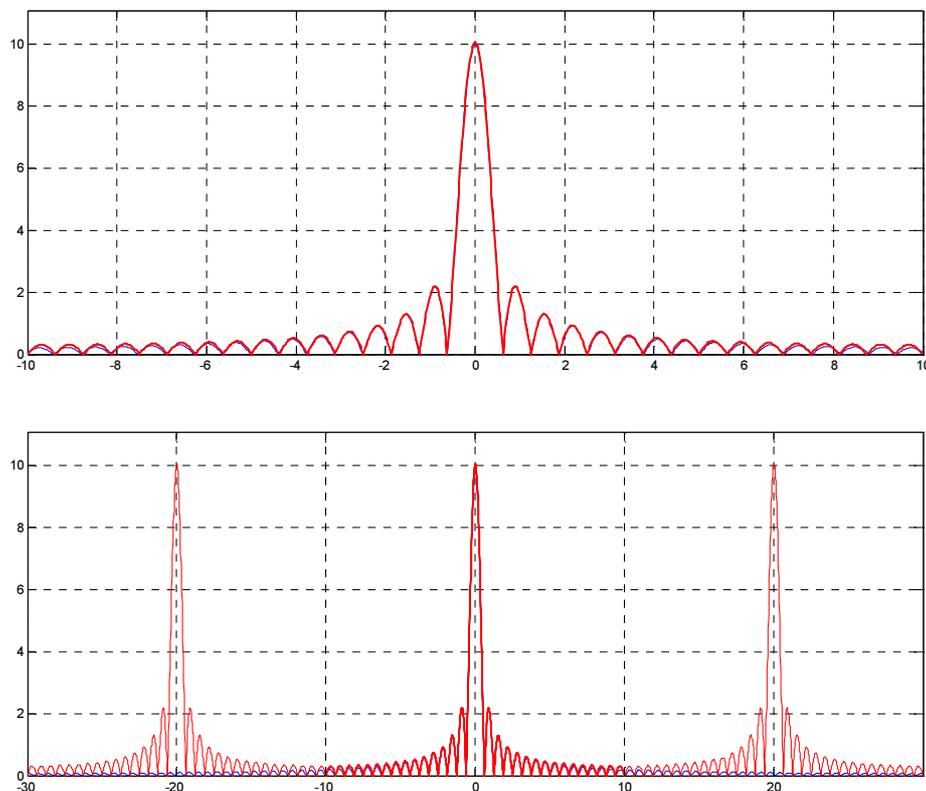


Figura M8.34

A frequência de amostragem é agora suficientemente elevada para que, e embora, naturalmente, não desaparecendo, a influência das réplicas seja razoavelmente pouco significativa em praticamente todo o período fundamental, sendo a evolução do espectro esboçado com base nos coeficientes da DFT bastante satisfatória como aproximação ao espectro do sinal contínuo. Se expandíssemos a escala em torno da origem, por exemplo $\omega \in [-3, 3]$, pediríamos verificar uma total coincidência. Observe a figura M8.35.

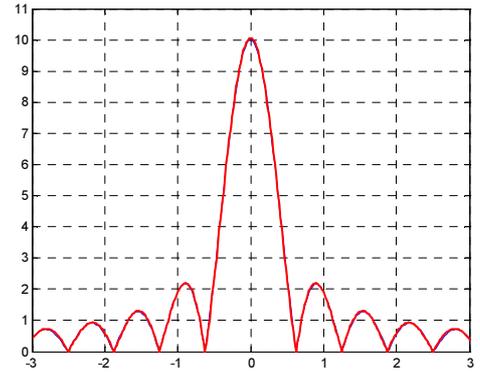


Figura M8.35

Note assim que, e independentemente da utilização de técnicas que se verão mais tarde (após o estudo de Sistemas) o cálculo dos coeficientes da DFT permite o conhecimento bastante aproximado do espectro de sinais contínuos, mesmo quando estes não são de banda limitada., desde que a frequência de amostragem seja suficientemente elevada.

No caso particular de um pulso rectangular contínuo, $x_c(t)$ centrado na origem, amplitude A , e duração τ , vimos (pag. M5-32) que a sua TF é

$$X_c(\omega) = A\tau \operatorname{sinc}\left(\tau \frac{\omega}{2\pi}\right)$$

Para um pulso rectangular discreto, $x_d[n]$, centrado na origem, amplitude A , e duração $2M + 1$, vimos (pag. M7-13) que a sua TF é

$$X_d(\Omega) = A \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\Omega}{2}(2M+1)\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$

Admitindo que $x_d[n]$ resulta de $x_c(t)$ amostrado a uma frequência ω_s , temos $\tau = (2M+1)T_s$ e $\Omega = \omega T_s$, pelo que

$$X_d(\omega T_s) = A \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega T_s}{2} \frac{\tau}{T_s}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)} = \frac{\omega}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)} A\tau \operatorname{sinc}\left(\tau \frac{\omega}{2\pi}\right)$$

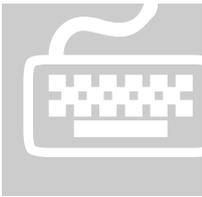
Admitindo $\omega T_s/2 \ll 1$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) \approx \frac{\omega T_s}{2}$$

pelo que, e simplificando a expressão, obtemos

$$X_d(\omega T_s) \approx \frac{1}{T_s} A\tau \operatorname{sinc}\left(\tau \frac{\omega}{2\pi}\right) = \frac{1}{T_s} X_c(\omega)$$

que como pode verificar corresponde à relação deduzida na página M8-25. Assim, para que seja possível identificar o espectro de um pulso rectangular contínuo com a sua versão amostrada deve verificar-se $\omega T_s/2 \ll 1$, ou seja $\omega/2 \ll \omega_s/2\pi$. Por exemplo, para ajustar os dois espectros até uma frequência $\omega/2 = 8$ **deveria ser** $\omega_s \gg 16/\pi$. Compare este resultado com as frequências de amostragem utilizadas no presente exemplo e os respectivos resultados alcançados.



Matlab 8.3

A DFT e a SF de sinais contínuos periódicos

Exemplo 1

Recorrendo à DFT, represente graficamente os coeficientes da SF do sinal contínuo periódico

$$x(t) = \cos(\omega_1 t) + 0.5 \cos(\omega_2 t)$$

com $f_1 = \omega_1/2\pi = 50 \text{ Hz}$ e $f_2 = \omega_2/2\pi = 100 \text{ Hz}$.

O cálculo dos coeficientes da SF de um sinal contínuo periódico de banda limitada recorrendo à DFT é trivial. Como vimos é

$$C_k = \frac{1}{N} X[k]$$

devido o sinal ser amostrado a uma frequência $f_s > 2f_M$.

No presente exemplo temos um sinal de banda limitada, sendo $f_M = f_2 = 100$, devendo então ser a frequência de amostragem $f_s > 200$. Podemos escolher $f_s = 5f_2$ e começar por representar o sinal e recolher as amostras

```
f1=50; w1=2*pi*f1; t1=1/f1;
f2=100; w2=2*pi*f2; t2=1/f2;
fs=5*f2; ts=1/fs;
% x(t)
t = 0:ts/10:1*t1;
x = cos(w1*t)+0.5*cos(w2*t);
% x(nTs)
nts = 0:ts:1*t1-ts;
xn = cos(w1*nts)+0.5*cos(w2*nts);

figure(1); plot(t,x,'r');
hold on; plot(nts,xn,'.k');
hold off; grid on
```

Obtivemos assim $N = 10$ amostras do sinal, pelo que podemos calcular de seguida os coeficientes de $X[k]$. Vamos optar por representar apenas os $N/2 = 5$ coeficientes positivos e fazer a representação em função da frequência

```
% Ck
N=length(xn)
X = fft(xn,N);
Ck= abs(X)/N;

figure(2);
f =(0:(N/2-1))*(fs/N);
stem(f,Ck(1:(N/2)),'r','filled')
grid on
```

Obtemos assim os gráficos que se mostram na figura M8.36. Como era esperado, podemos ver as riscas correspondentes a cada um dos cosenos, de amplitude igual a metade da amplitude de cada um deles, e posicionadas nas respectivas

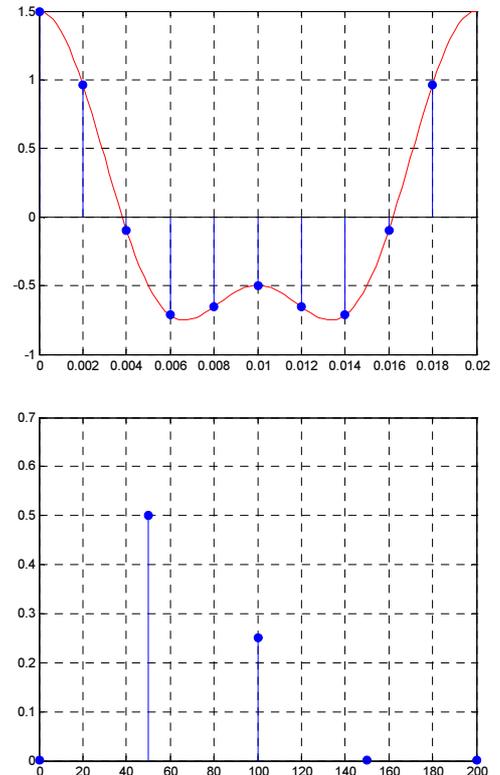


Figura M8.36

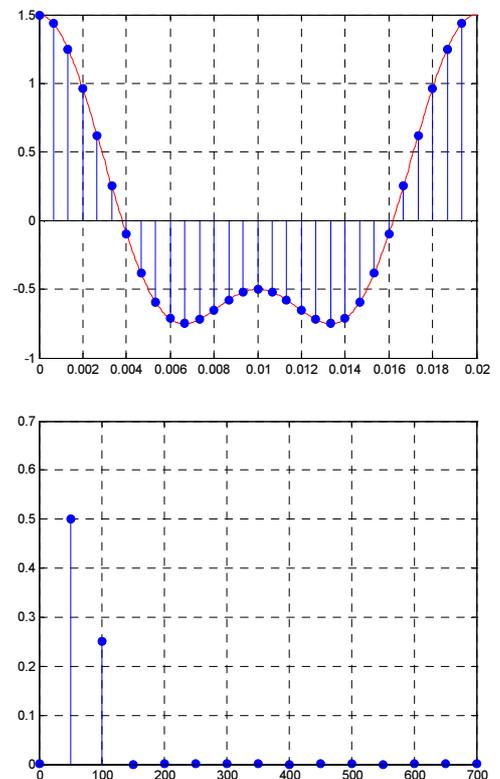


Figura M8.37

frequências.

Embora no presente caso seja inútil, já que sabemos que as únicas riscas espectrais existem em f_1 e f_2 , admita agora que se pretendem **obter mais coeficientes da DFT**. Podemos optar por **aumentar a frequência de amostragem**, por exemplo, fazendo $f_s = 15f_2$ no código acima passamos a ter $N = 30$ coeficientes, obtendo os gráficos que se mostram na figura M8.37, ou podemos, mantendo a mesma frequência de amostragem, **aumentar o número de períodos observados**. Fazendo

```
...
t=0:ts/10:3*t1;
...
nts = 0:ts:3*t1-ts;
...
```

no código acima, passamos a, observando 3 períodos, ter $N = 30$ coeficientes, obtendo os gráficos que se mostram na figura M8.38.

Note que **não podemos juntar zeros à direita das amostras do sinal**. Como o sinal é periódico, e dado que para o cálculo dos coeficientes da SF é suposto que se observe o comportamento do sinal durante um período (ou múltiplo), a junção de zeros à direita altera o verdadeiro comportamento durante um período, não correspondendo os coeficientes assim calculados aos coeficientes do sinal original. Por exemplo, se juntarmos 20 zeros à direita do sinal amostrado à frequência $f_s = 5f_2$

```
...
fs=5*f2;
...
t = 0:ts/10:3*t1;
...
nts = 0:ts:3*t1-ts;
xn = cos(w1*nts)+0.5*cos(w2*nts);
xn(11:length(xn))=0;
...
```

, obtemos os gráficos da figura M8.39, onde como pode ver, os coeficientes da SF perderam o significado original.

Note que o código anterior tem apenas fim didático, nomeadamente permite-nos traçar o gráfico do sinal sobre o qual estamos a calcular os coeficientes. Poderíamos ter mantido o código original,

```
...
fs=5*f2;
...
t = 0:ts/10:1*t1;
...
nts = 0:ts:1*t1-ts;
xn = cos(w1*nts)+0.5*cos(w2*nts);
```

Especificando um número de coeficientes da DFT a calcular diferente do número de

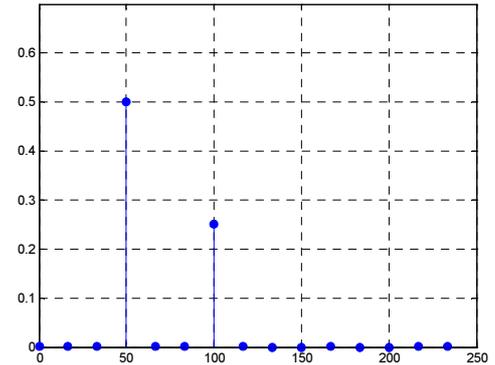
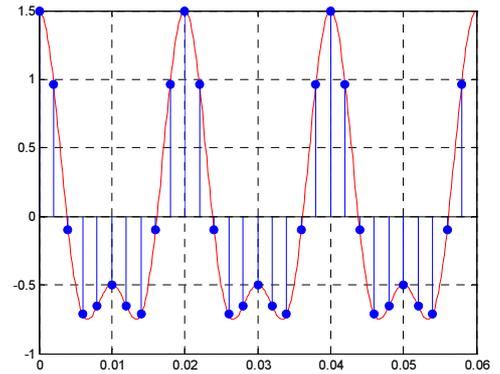


Figura M8.38

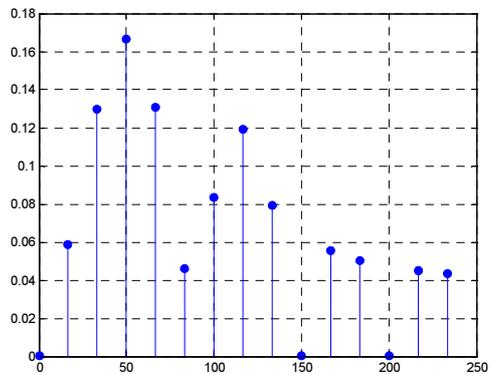
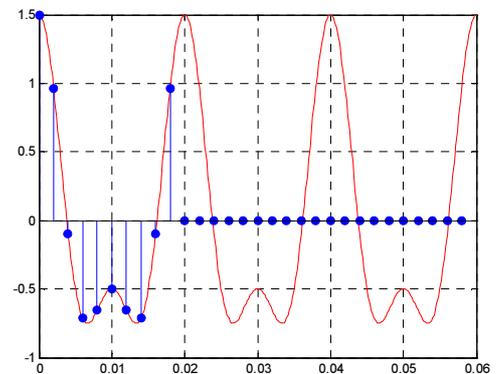


Figura M8.39

amostras do sinal

```
...
% Ck
N=30
X = fft(xn,N);
...
```

O *Matlab* junta um número de zeros à direita do sinal de modo a perfazer o número total N de coeficientes que se desejam calcular, sendo o resultado idêntico ao anteriormente mostrado.

Porquê referir este procedimento, já que parece conduzir a resultados errados? Note que numa situação mais genérica podemos não conhecer o período fundamental do sinal e querer conhecer com pormenor a sua composição espectral. Por esta razão, ou simplesmente porque pretendemos generalizar o instrumento de análise dos sinais, independentemente de serem ou não periódicos, podemos utilizar a DFT para calcular a TF de sinais contínuos periódicos, como se mostra no exemplo seguinte.

A DFT e a TF de sinais contínuos periódicos

Exemplo 2

Recorrendo à DFT, represente graficamente a TF do sinal contínuo periódico

$$x(t) = \cos(\omega_1 t) + 0.5 \cos(\omega_2 t)$$

com $f_1 = \omega_1/2\pi = 50 \text{ Hz}$ e $f_2 = \omega_2/2\pi = 100 \text{ Hz}$

Recorde que no Módulo 5 a utilização da TF foi generalizada ao sinais contínuos periódicos, resultando numa função contínua, $X(\omega)$, constituída pelo somatório de impulso de *Dirac* de área proporcional aos coeficientes da SF do sinal, posicionados nas suas diversas harmónicas

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta(f - kf_0)$$

No presente exemplo, sabemos que a TF é

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \pi\delta(\omega + \omega_1) + \pi\delta(\omega - \omega_1) + 0.5\pi\delta(\omega + \omega_2) + 0.5\pi\delta(\omega - \omega_2) \\ &= 0.5\delta(f + f_1) + 0.5\delta(f - f_1) + 0.25\delta(f + f_1) + 0.25\delta(f - f_1) \end{aligned}$$

Passámos a ter formalmente uma função contínua, mas a informação espectral é a mesma a quando do conhecimento dos coeficientes da SF. Assim, vamos reescrever o código do exemplo anterior, substituindo simplesmente a função *stem* pela função *plot*

```
f1=50; w1=2*pi*f1; t1=1/f1;
f2=100; w2=2*pi*f2; t2=1/f2;
fs=5*f2; ts=1/fs;

t = 0:ts:1*t1-ts;
x = cos(w1*t)+0.5*cos(w2*t);

N=length(x);
M=N;
% X[k] %
X = fft(x,M);
X = abs(X)/N;

figure(1)
```

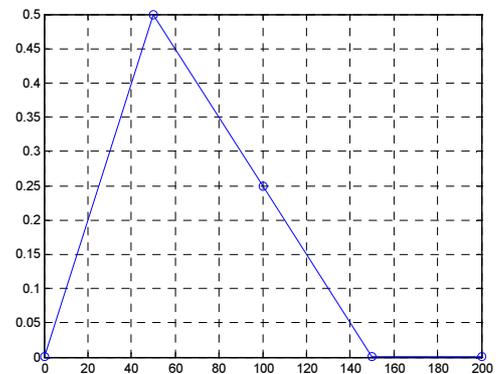


Figura M8.40

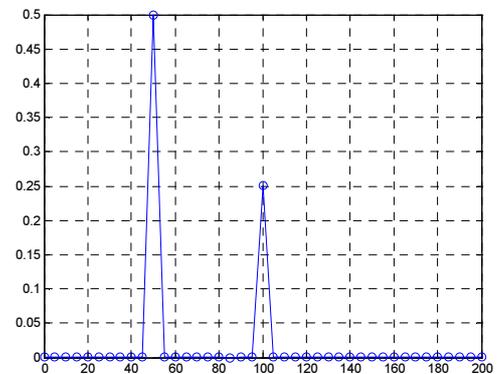


Figura M8.41

```
f = (0:(M/2-1))*(fs/M);
plot(f,X(1:(M/2)),'o-')
axis([0 200 0 max(X)]);
grid on
```

Obtemos assim o módulo do espectro do sinal que se mostra na figura M8.40. Os resultados não são muito brilhantes dado que se queria descrever dois impulsos de *Dirac*! É necessário um maior número de amostras do sinal de modo a obter uma maior discriminação na frequência. Observemos um maior número de períodos do sinal. Fazendo

```
...
t = 0:ts:10*t1-ts;
...
```

obtemos o gráfico da figura 8.41. A descrição gráfica de dois impulsos de *Dirac* é agora bastante mais credível. Aumentemos ainda mais o número de pontos observados

```
...
t = 0:ts:100*t1-ts;
...
```

obtemos assim o gráfico da figura 8.42. A representação dos impulsos é agora totalmente satisfatória. No entanto, para obter esta representação, foi necessário um grande número de amostras do sinal. Vamos agora diminuir o número de amostras do sinal mas juntar zeros à sua direita para garantir uma boa discriminação na frequência.

```
...
t = 0:ts:30*t1-ts;
...
N=length(x);
M=2^8;
```

Obtemos assim o gráfico da figura 8.43. Interpretada numa situação mais genérica, este gráfico é denunciador de uma forte componente espectral nas frequências $f_1 = 50$ e $f_2 = 100$, dando portanto indicação da existência de importantes componentes harmónicas nestas frequências. Note que se perdeu significado relativamente à amplitude.

Janela de observação

Vamos diminuir ainda mais o número de amostras do sinal, e aumentar o número de zeros à direita

```
...
t = 0:ts:10*t1-ts;
...
M=2^14
```

Obtemos assim o gráfico da figura 8.44. Note que a amplitude das componentes do espectro nas frequências $f_1 = 50$ e $f_2 = 100$ é a correcta. No entanto o espectro toma agora

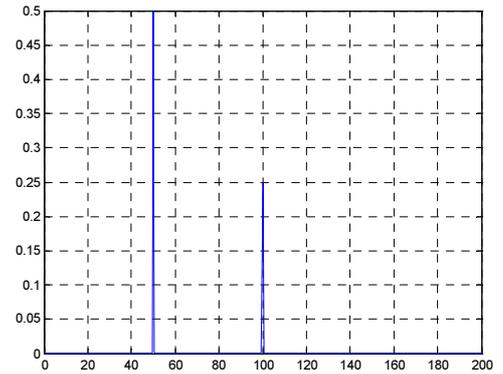


Figura M8.42

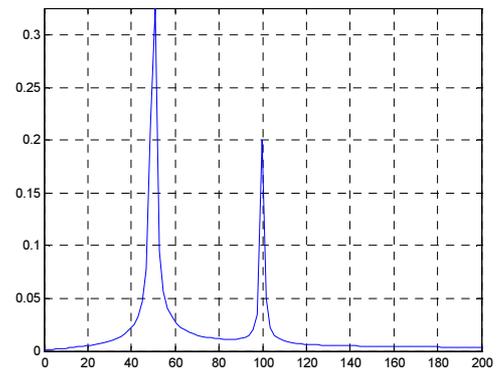


Figura M8.43

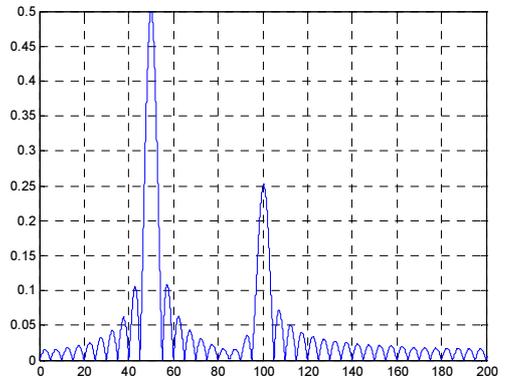


Figura M8.44

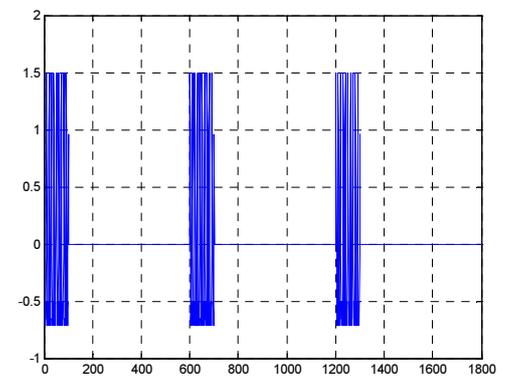


Figura M8.45

“estranhamente” a forma de duas $\text{sinc}()$. Podemos interpretar convenientemente este resultado. Na verdade, em resultado da junção de zeros à direita, o sinal sobre o qual estão a ser calculados os coeficientes da DFT é interpretado como tendo um comportamento periódico como se mostra na figura M8.45. Ou seja, como se fosse o resultado do produto do sinal original por um tem de pulso rectangulares

$$y(t) = x(t) \sum_l \Pi\left(\frac{t - lMt_s}{Nt_s}\right)$$

resulta então que o espectro de $y(t)$ é igual à convolução dos espectros. Sendo o espectro de $x(t)$ dois impulsos de *Dirac* situados em f_1 e f_2 e o espectro de um pulso rectangular uma $\text{sinc}()$, resulta da convolução, como sabemos, a translação das $\text{sinc}()$ para as frequências correspondentes aos impulsos

$$Y(f_+) = A_1 \text{sinc}(f - f_1) + A_2 \text{sinc}(f - f_2)$$

Fica assim explicada a forma do espectro da figura M8.44. A sua correcta interpretação deve ser a da constatação de que o sinal tem duas fortes componentes harmónicas, em f_1 e f_2 , devendo a evolução conforme uma $\text{sinc}()$ ser desprezado, ou melhor, ser convenientemente interpretado como estando associado não ao sinal $x(t)$ mas sim à **janela de observação**. Esta é uma importante matéria no domínio do processamento digital de sinal que será convenientemente tratada nas cadeiras da especialidade.

Façamos um último ensaio aumentando o número de amostras do sinal

```
...
t = 0:ts:10*t1-ts;
...
```

Obtemos assim o gráfico da figura M8.46, fazendo reduzir, na aparência, a evolução segundo uma $\text{sinc}()$ e destacando assim as componentes harmónicas.

Qualquer das figuras, de M8.41 a M8.46 é susceptível de resultar da análise de *Fourier* de um sinal por recurso à DFT. Numa situação genérica, desconhecendo-se a composição espectral do sinal, é importante que interprete convenientemente os resultados obtidos, esperando-se que os exemplos acima contribuam para que ganhe sensibilidade para esta matéria.

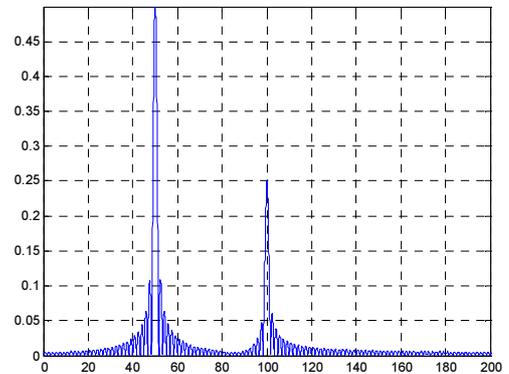
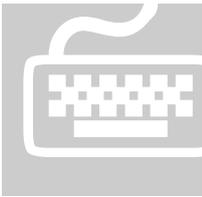


Figura M8.46



Matlab 8.4

Exemplo 1

Considere que ao sinal

$$x(t) = \cos(\omega_1 t) + 0.5 \cos(\omega_2 t)$$

,com $f_1 = \omega_1/2\pi = 50 \text{ Hz}$ e $f_2 = \omega_2/2\pi = 100 \text{ Hz}$, é adicionada uma **componente aleatória** Gaussiana de média nula e variância unitária. Trace os gráficos da evolução do sinal, com e sem **ruído**, assim como dos respectivos espectros.

Vamos começar por representar um pequeno segmento do sinal, com e sem ruído

```
f1=50; w1=2*pi*f1; t1=1/f1;
f2=100; w2=2*pi*f2; t2=1/f2;
fs=10*f2; ts=1/fs;

t = 0:ts:100*t2-ts;
x = cos(w1*t)+0.5*cos(w2*t);
nr=1;
y = x + nr*randn(size(t));

p=20*t2/ts;
figure(1);
plot(t(1:p),x(1:p));
grid on; axis([0 0.2 -4 4])
figure(2)
plot(t(1:p),y(1:p));grid on
```

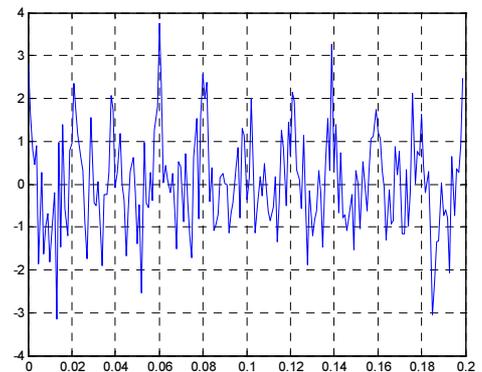
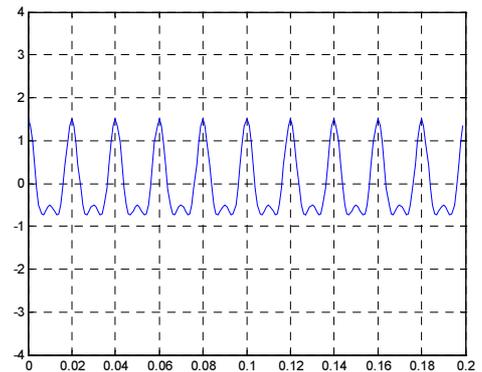


Figura M8.47

Obtemos assim a figura M8.47. Note como, no gráfico do sinal com ruído, é impossível detectar a evolução harmónica do sinal. Representemos agora os espectros dos sinais.

```
N=length(x)
M=2^14;
X = fft(x,M);
X = abs(X)/N;

Y = fft(y,M);
Y = abs(Y)/ N;

figure(3)
f = (0:(M/2-1))*(fs/M);
plot(f,X(1:(M/2)),'r-')
axis([0 200 0 max(X)]);
grid on
figure(4)
plot(f,Y(1:(M/2)))
axis([0 200 0 max(Y)]);
grid on
```

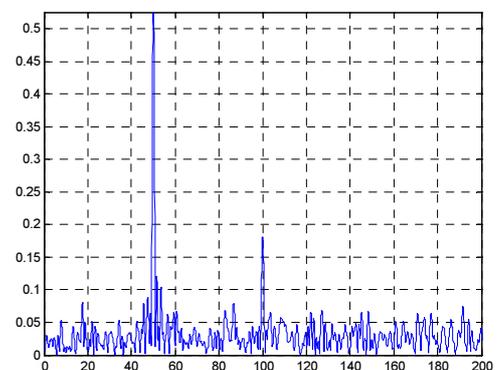
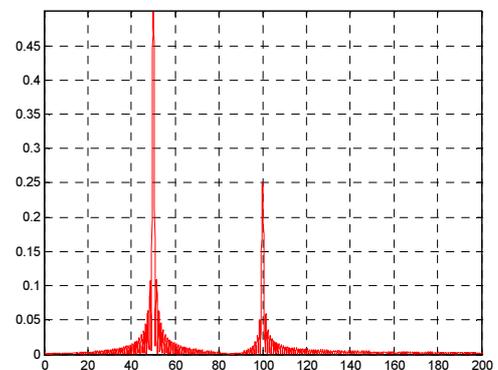


Figura M8.48

Note como no domínio da frequência é agora claramente visível a existência das duas componentes harmónicas no sinal com ruído.

Modifique o nível de ruído e observe os resultados no domínio do tempo e da frequência.



Apêndice 1: DFT (Transformada Discreta de Fourier)

DFT

Como vimos no Módulo 7, um sinal discreto $x_p[n]$, periódico de período N , pode ser representado completamente através da sua SF

$$x_p[n] = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{jk\Omega_0 n}$$

com

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_N x_p[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

Como realçámos na altura, quer a descrição temporal do sinal quer a sua descrição espectral é feita através a uma sequência finita de N valores. Por este facto, esta transformação tempo-frequência é especialmente indicada para ser utilizada em suportes computacionais. De modo a permitir a utilização das ferramentas computacionais disponíveis, a SF para sinais discretos periódicos poderia ser estendida aos sinais não periódicos. Assim, dado um sinal de duração finita, $x_e[n]$, composto por uma sequência de N valores, poderíamos representar o sinal através da SF

$$x_e[n] = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{jk\Omega_0 n}$$

com

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_N x_e[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

Na prática, e de modo a contemplar quer os sinais discretos periódicos quer os sinais discretos não periódicos, **define-se a DFT (Transformada Discreta de Fourier) de um qualquer sinal discreto $x[n]$, descrito por uma sequência de N valores, no intervalo $[0, N - 1]$ como**

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

, com $\Omega_0 = 2\pi/N$. A partir da sequência de N valores que constitui a DFT do sinal, este pode ser reconstruído por

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{jk\Omega_0 n}$$

, com $k \in [0, N - 1]$.

Note que assume que quer o sinal quer a sua DFT não são definidos fora do intervalo $[0, N - 1]$.

A terminologia DFT resulta da literatura anglo-saxónica, e corresponde às iniciais da designação **Discrete Fourier Transform**. A sua grande utilização deve-se à existência de um algoritmo extremamente eficiente que permite o seu cálculo, designado por **fft** (correspondente à iniciais de **Fast Fourier Transform**), que é de muito fácil implementação quer em *hardware* quer em *software*, e que será objecto de análise na cadeira de Processamento Digital de Sinal.

Como pode verificar a partir do *help* do *MatLab* a função *fft* procede ao cálculo dos coeficientes

$$X[k] = \sum_{n=1}^N x[n] e^{-jk\Omega_0(n-1)(k-1)} \quad (1)$$

Note que os factores $(n - 1)$ e $(k - 1)$ se devem ao facto de, como sabe, os vectores em *MatLab* serem indexados a partir de $n = 1$ (e não $n = 0$), ou seja, a função $fft(x)$ procede ao cálculo dos coeficientes $X[k]$, com $k = 1 \cdots N$, da DFT do sinal discreto $x[n]$, com $n = 1 \cdots N$.

A DFT e a SF de sinais discretos periódicos

Como vimos no Módulo 7, um sinal discreto periódico é naturalmente representado no domínio da frequência através da sua SF. Atendendo à definição da SF de um sinal periódico $x_p[n]$

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_N x_p[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

sendo a DFT do sinal $x_p[n]$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_p[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

é imediato reconhecer que **os coeficientes da SF de um sinal discreto periódico $x_p[n]$ definido por N amostras do seu período fundamental, $n \in [0, N - 1]$, e os coeficientes da sua DFT estão relacionados por**

$$C_k = \frac{1}{N} X[k]$$

Dada a eficiência de cálculo da DFT através do algoritmo *fft*, e a menos que por alguma razão se deseje conhecer a sua expressão analítica, caso em que será necessário recorrer à biblioteca simbólica do *Matlab*, o cálculo dos coeficientes da SF de um sinal discreto periódico deve ser feito recorrendo à *fft*.

A DFT e a TF de sinais discretos não periódicos

Como vimos no Módulo 7, um sinal discreto não periódico é naturalmente representado no domínio da frequência através da sua TF. Atendendo à definição da TF de um sinal discreto $x[n]$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

, admitindo que o sinal $x[n]$ é definido por N amostras no intervalo $n \in [0, N - 1]$, e **admitindo que é nulo fora desse intervalo**, resulta

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\Omega n}$$

Atendendo à definição da DFT de um sinal

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

, reconhece-se de imediato que $X[k]$ **corresponde ao sinal discreto constituído pela sequência de N amostras do sinal contínuo $X(\Omega)$, nos pontos $\Omega = k\Omega_0$, ou seja, podemos calcular amostras da TF de um sinal discreto calculando os coeficientes da DFT desse sinal.**

$$X(k\Omega_0) = X[k]$$

com $\Omega_0 = 2\pi/N$.

Note que a representação de um sinal de energia $x_e[n]$ através da sua DFT **não é destrinchável da representação do sinal periódico** que exhibe o mesmo comportamento para a mesma sequência de N valores num período.

Note ainda que as amostras devem ser recolhidas no intervalo $n \in [0, N - 1]$. Nos exemplos de cálculo mostrar-se-á como contornar esta imposição.

Dada a eficiência de cálculo da DFT através do algoritmo *fft*, e a menos que por alguma razão se deseje conhecer a sua expressão analítica, caso em que será necessário recorrer à biblioteca simbólica do *Matlab*, o cálculo de amostras da TF de um sinal discreto não periódico deve ser feito recorrendo à *fft*.

Espectro de sinais contínuos amostrados

Considere um qualquer sinal contínuo $x_c(t)$ e um trem de impulsos de *Dirac* uniformemente separados de um qualquer intervalo de tempo T_s

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

O sinal resultante da multiplicação de $x_c(t)$ e $p(t)$

$$\begin{aligned} x_p(t) &= x_c(t)p(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s)\delta(t - nT_s) \end{aligned}$$

é um sinal contínuo constituído por um trem de impulsos de *Dirac* uniformemente separados do intervalo de tempo T_s e áreas iguais aos valores do sinal $x_c(t)$ na sequência discreta de instantes de tempo nT_s , chamados **amostras do sinal** $x_c(t)$. O sinal $p(t)$ é designado por **função de amostragem (ideal)**, e a operação de multiplicação é designada por **amostragem (ideal)**. Nas cadeiras da especialidade terá oportunidade de desenvolver o tema, nomeadamente estudará outro tipo de amostragens que não a ideal, assim como as múltiplas aplicações da amostragem.

Sendo a TF do sinal $p(t)$ (veja o Exercício 5.2, Exemplo 2, Pag. M5-20)

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

, com $\omega_s = 2\pi/T_s$, então, e atendendo à propriedade da multiplicação da TF, a TF do sinal $x_p(t)$ é

$$\begin{aligned} X_p(\omega) &= \frac{1}{2\pi} X_c(\omega) * P(\omega) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c(\omega - n\omega_s) \end{aligned} \tag{1}$$

, ou seja, corresponde à sobreposição de réplicas da TF do sinal contínuo $x_c(t)$, escaladas de $1/T_s$ e trasladadas de múltiplos da frequência de amostragem $\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi/T_s$.

Por outro lado, atendo à propriedade da translação no tempo da TF, e sendo, como vimos, $TF[A\delta(t)] = A$, então

$$\begin{aligned}
 X_p(\omega) &= TF \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s) \delta(t - nT_s) \right] \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s) e^{-j\omega nT_s}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Consideremos o sinal discreto constituído pela sequência discreta de valores do sinal $x_c(t)$ nos instantes de tempo nT_s

$$x_d[n] = x_c(nT_s)$$

, por definição, a TF do sinal discreto $x_d[n]$ é

$$\begin{aligned}
 X_d(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n] e^{-j\Omega n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s) e^{-j\Omega n}
 \end{aligned} \tag{3}$$

Pelo que, identificando as expressões 2 e 3, temos

$$\begin{aligned}
 X_p(\omega) &= X_d(\Omega) \Big|_{\Omega=\omega T_s} \\
 &= X_d(\omega T_s)
 \end{aligned}$$

Atendendo agora à expressão 1, temos

$$\begin{aligned}
 X_d(\omega T_s) &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c(\omega - n\omega_s) \\
 &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c\left(\omega - n \frac{2\pi}{T_s}\right)
 \end{aligned}$$

Recorde que a TF de um sinal discreto é periódica de 2π . Designando o período fundamental da TF do sinal discreto por $X_{1d}(\Omega)$ podemos escrever

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{1d}(\omega T_s - n2\pi) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c\left(\omega - n \frac{2\pi}{T_s}\right)$$

, pelo que, e **admitindo que não existe sobreposição entre as várias réplicas da TF**, concluímos que podemos conhecer a TF de um sinal contínuo $x_c(t)$ a partir do conhecimento da TF do sinal discreto constituído pela sequência de amostras do sinal contínuo obtidas em intervalos equiespaçados nT_s , $x_d[n] = x_c(nT_s)$, sendo

$$X_c(\omega) = T_s X_{1d}(\omega T_s)$$

Teorema da amostragem

Dado que a TF de um sinal contínuo $x_c(t)$ amostrado numa sequência discreta de instantes de tempo nT_s é

$$X_p(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c(\omega - n\omega_s) \tag{1}$$

, ou seja, corresponde à sobreposição de réplicas da TF do sinal contínuo $x_c(t)$, escaladas de $1/T_s$ e trasladadas de múltiplos da frequência de amostragem $\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi/T_s$, o conhecimento da TF do sinal contínuo a partir da TF da sua versão amostrada só é possível se não

existir sobreposição entre as várias réplicas. Esta imposição só é possível de satisfazer se o sinal $x_c(t)$ for um **sinal de banda limitada**, ou seja

$$|X_c(\omega)| = 0 \quad , \forall |\omega| > \omega_M$$

, em que ω_M é a **frequência máxima do sinal**.

Dado que cada um dos espectros é trasladado de $n\omega_s$, se o espectro do sinal contínuo existir para $-\omega_M < \omega < \omega_M$, o sinal amostrado será constituído pela sobreposição de espectros não nulos para $n\omega_s - \omega_M < \omega < n\omega_s + \omega_M$. Para que não exista sobreposição a frequência limite inferior de cada uma das réplicas deverá ser maior que a frequência limite superior da réplica que a precede, ou seja

$$\begin{aligned} n\omega_s - \omega_M &> (n-1)\omega_s + \omega_M \\ n\omega_s - \omega_M &> n\omega_s - \omega_s + \omega_M \\ \omega_s &> 2\omega_M \end{aligned}$$

, concluímos assim que, para que não exista sobreposição entre as diversas réplicas do espectro do sinal $x_c(t)$, a frequência de amostragem deve ser superior ao dobro da máxima frequência do sinal contínuo.

Este é um importante resultado que constitui o fundamento do chamado **Teorema da Amostragem**

Um sinal contínuo $x(t)$ tal que $|X(\omega)| = 0, \forall |\omega| > \omega_M$ pode ser univocamente determinado a partir da sequência das suas amostras $x(nT_s)$ se a frequência de amostragem verificar $\omega_s > 2\omega_M$, com $\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi/T_s$.

A frequência de amostragem $\omega_s = 2\omega_M$ é designada por **frequência (ou ritmo) de Nyquist**.

A DFT e a SF de sinais contínuos periódicos

Como vimos no Módulo 5, um sinal contínuo periódico, de período T_0 , é naturalmente representado no domínio da frequência através da sua SF, podendo os coeficientes da SF ser determinados a partir do conhecimento da TF do sinal de energia, $x_e(t)$, correspondente a um período do sinal, sendo

$$C_k = \frac{1}{T_0} X_e(k\omega_0)$$

, com $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$.

Como vimos, se o sinal contínuo $x_e(t)$ for de banda limitada, podemos conhecer a sua TF a partir do conhecimento da TF do sinal discreto constituído pela sequência de amostras obtidas em intervalos equiespaçados nT_s , $x_d[n] = x_c(nT_s)$, sendo

$$X_e(\omega) = T_s X_{1d}(\omega T_s)$$

em que $X_{1d}(\Omega)$ corresponde ao período fundamental da TF do sinal discreto $x_d[n]$. Logo, os coeficientes da SF do sinal são dados por

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{T_0} X_e(k\omega_0) \\ &= \frac{T_s}{T_0} X_{1d}(k\omega_0 T_s) \end{aligned}$$

sendo, como se viu (pag. M2-13),

$$\begin{aligned}\omega_0 T_s &= \Omega_0 \\ \frac{T_0}{T_s} &= N\end{aligned}$$

, e atendendo à definição de DFT, resulta

$$\begin{aligned}C_k &= \frac{1}{N} X_{1d}(k\Omega_0) \\ &= \frac{1}{N} X[k]\end{aligned}$$

Concluimos assim que, **admitindo que um sinal contínuo periódico, de período T_0 , é de banda limitada, $|X(\omega)| = 0, \forall |\omega| > \omega_M$, e se verifica $\omega_s > 2\omega_M$, os coeficientes da sua SF, C_k , podem ser calculados a partir dos coeficientes da DFT, $X[k]$, do sinal discreto constituído pela sequência de $N = T_0/T_s$ amostras do sinal contínuo obtidas em intervalos equiespaçados, $x_d[n] = x(nT_s)$ com $n \in [0, N - 1]$, sendo**

$$C_k = \frac{1}{N} X[k]$$

A DFT e a TF de sinais contínuos não periódicos

Como vimos no Módulo 5, um sinal contínuo não periódico é naturalmente representado no domínio da frequência através da sua TF. Se o sinal contínuo $x_c(t)$ for de banda limitada, podemos conhecer a sua TF a partir do conhecimento da TF do sinal discreto constituído pela sequência de amostras obtidas em intervalos equiespaçados nT_s , $x_d[n] = x_c(nT_s)$, sendo

$$X_c(\omega) = T_s X_{1d}(\omega T_s)$$

em que $X_{1d}(\Omega)$ designa o período fundamental da TF do sinal discreto. Dado que podemos calcular amostras da TF de um sinal discreto calculando os coeficientes da DFT desse sinal, temos então

$$\begin{aligned}X_c(k\Omega_0) &= T_s X_{1d}(k\Omega_0 T_s) \\ X_c\left(\frac{k\Omega_0}{T_s}\right) &= T_s X_{1d}(k\Omega_0) \\ &= T_s X[k]\end{aligned}$$

Assim, admitindo que um sinal contínuo não periódico é de banda limitada, $|X(\omega)| = 0, \forall |\omega| > \omega_M$, e se verifica $\omega_s > 2\omega_M$, sendo ω_M a frequência máxima do sinal e ω_s a frequência de amostragem, obtemos amostras da TF do sinal, $X(\omega)$, nos pontos $\omega = k\Omega_0/T_s$, calculando os coeficientes da DFT, $X[k]$, do sinal discreto constituído pela sequência de N amostras do sinal contínuo, obtidas em intervalos equiespaçados, $x_d[n] = x(nT_s)$, com $n \in [0, N - 1]$, sendo

$$X\left(\frac{k\Omega_0}{T_s}\right) = T_s X[k]$$



Apêndice 2: Exemplos de cálculo da DFT

Exemplo 1

Calcule a DFT dos sinais $x[n]$ e $y[n]$ representados na figura M8.49.

Sendo

$$x[n] = [2, 2, -1]$$

com

$$\Omega_o = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{3}$$

Resulta, por definição

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_N x[n] e^{-jk\Omega_o n} \\ &= \sum_{n=0}^2 x[n] e^{-jk\Omega_o n} \\ &= 2 + 2e^{-jk\Omega_o} - e^{-j2k\Omega_o} \\ &= 2 + 2e^{-jk\frac{2\pi}{3}} - e^{-j2k\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} X[0] &= 2 + 2 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X[1] &= 2 + 2e^{-j\frac{2\pi}{3}} - e^{-j2\frac{2\pi}{3}} \\ &= 1.5 - j2.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X[2] &= 2 + 2e^{-j2\frac{2\pi}{3}} - e^{-j4\frac{2\pi}{3}} \\ &= 1.5 + j2.6 \end{aligned}$$

Sendo

$$y[n] = [4, 3, 2, 1]$$

com

$$\Omega_o = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{4}$$

resulta

$$\begin{aligned} Y[k] &= \sum_N x[n] e^{-jk\Omega_o n} \\ &= \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-jk\Omega_o n} \\ &= 4 + 3e^{-jk\Omega_o} + 2e^{-j2k\Omega_o} + e^{-j3k\Omega_o} \\ &= 4 + 3e^{-jk\frac{2\pi}{4}} + 2e^{-j2k\frac{2\pi}{4}} + e^{-j3k\frac{2\pi}{4}} \\ &= 4 + 3e^{-jk\frac{\pi}{2}} + 2e^{-j2k\frac{\pi}{2}} + e^{-j3k\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

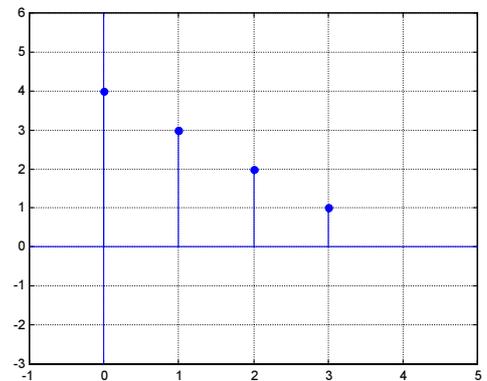
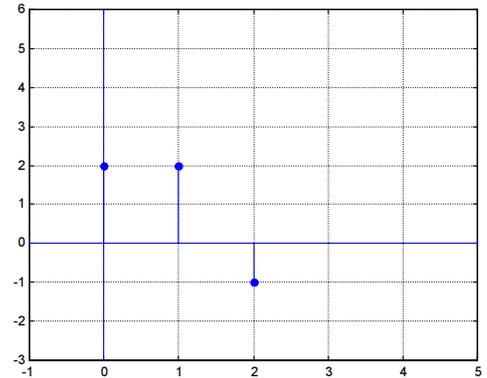


Figura M8.49

Logo

$$\begin{aligned} Y[0] &= 4 + 3 + 2 + 1 \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y[1] &= 4 + 3e^{-j\frac{\pi}{2}} + 2e^{-j2\frac{\pi}{2}} + e^{-j3\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 - j2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y[2] &= 4 + 3e^{-j2\frac{\pi}{2}} + 2e^{-j4\frac{\pi}{2}} + e^{-j6\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y[3] &= 4 + 3e^{-j3\frac{\pi}{2}} + 2e^{-j6\frac{\pi}{2}} + e^{-j9\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 + j2 \end{aligned}$$

Exemplo 2

Determine a DFT do sinal $x_2[n]$ representado na figura M8.50.

Sendo

$$x_2[n] = [5, -1, -2, 3]$$

Resulta, por definição

$$\begin{aligned} X_2[k] &= \sum_N x_2[n] e^{-jk\Omega_o n} \\ &= \sum_{n=0}^3 x_2[n] e^{-jk\Omega_o n} \\ &= 5 - e^{-jk\Omega_o} - 2e^{-j2k\Omega_o} + 3e^{-j3k\Omega_o} \end{aligned}$$

com

$$\Omega_o = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Logo

$$\begin{aligned} X_2[0] &= 5 - 1 - 2 + 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2[1] &= 5 - e^{-j\frac{\pi}{2}} - 2e^{-j2\frac{\pi}{2}} + 3e^{-j3\frac{\pi}{2}} \\ &= 5 + j + 2 + 3j \\ &= 7 + 4j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2[2] &= 5 - e^{-j2\frac{\pi}{2}} - 2e^{-j4\frac{\pi}{2}} + 3e^{-j6\frac{\pi}{2}} \\ &= 5 + 1 - 2 - 3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2[3] &= 5 - e^{-j3\frac{\pi}{2}} - 2e^{-j6\frac{\pi}{2}} + 3e^{-j9\frac{\pi}{2}} \\ &= 5 - j + 2 - 3j \\ &= 7 - 4j \end{aligned}$$

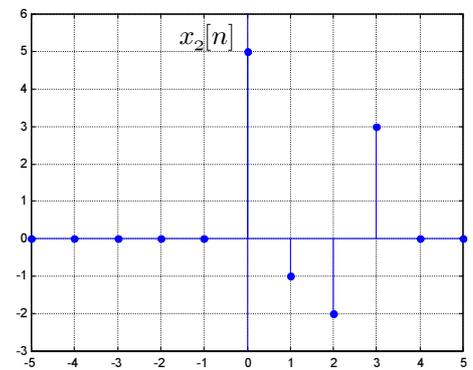


Figura M8.50



Ficha de Avaliação M8

N: Nome: Turma:

Data limite de entrega 26-05-2003

(A ficha deve ser colocada, até à data limite, no recipiente apropriado existente junto ao Gabinete C –CEDET)

Grupo C

Exercício 1

Represente o módulo da TF dos seguintes sinais, recorrendo ao cálculo dos coeficientes da DFT de um conjunto de amostras de cada um deles. Faça as necessárias opções.

$$1) x(t) = \frac{2}{\pi t^2} \left(\text{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right) - \cos(t) \right)$$

$$2) x(t) = te^{-0.5t} u(t)$$

$$3) x(t) = \cos(200\pi t)u(t)$$

Grupo B

Exercício 2

Leia o ficheiro [ficha82003.mat](#) Represente o sinal e o seu espectro. Detecte a existência de componentes harmónicas no sinal e diga quais são as suas frequências.

Grupo A

Exercício 3

Considere um trem de pulsos rectangulares de amplitude $A = 1$, duração $\tau = 4$, e período $T_o = 8$.

- Gere e represente graficamente os coeficientes da SF do sinal periódico contínuo a partir da sua expressão teórica. Limite a representação aos primeiros 15 coeficientes.
- Gere e represente graficamente os coeficientes da DFT, recorrendo à função *MatLab* `fft`, e verifique a sua relação com os coeficientes calculados a partir da expressão deduzida teoricamente para o sinal contínuo. Faça as opções necessárias. Comente.

Grupo AA

Exercício 4

- Relativamente ao exercício 3, qual é a menor frequência de amostragem do sinal contínuo que garante que a amplitude da 10ª harmónica é calculada com um erro inferior a 1%.