

LICENCIATURA EM ENGENHARIA DE SISTEMAS
DE TELECOMUNICAÇÕES E ELECTRÓNICA

Apontamentos de Análise de Sinais



© Prof. José Amaral
Versão 3.0 • 26-05-2003
Secção de Comunicações e Processamento de Sinal
ISEL-CEDET, Gabinete C • jda@isel.pt

Índice

OBJECTIVOS	1	EXERCÍCIO 3	25
1. SISTEMAS LINEARES E INVARIANTES NO TEMPO	2		
SISTEMA	2		
LINEARIDADE.....	2		
INVARIÂNCIA NO TEMPO.....	2		
SLIT.....	2		
2. RESPOSTA AO IMPULSO, AO ESCALÃO E NA FREQUÊNCIA	3		
RESPOSTA AO IMPULSO	3		
RESPOSTA AO ESCALÃO	3		
RESPOSTA EM FREQUÊNCIA	4		
3. PROPRIEDADES	5		
MEMÓRIA.....	5		
INVERTIBILIDADE.....	5		
CAUSALIDADE.....	6		
ESTABILIDADE.....	7		
4. MODELOS LINEARES	8		
MODELO AR.....	8		
MODELO MA.....	9		
MODELO ARMA.....	10		
SISTEMAS FIR E IIR	11		
SISTEMAS REALIMENTADOS E NÃO REALIMENTADOS.....	12		
EXERCÍCIO 9.1	13		
EXEMPLO 1.....	13		
EXEMPLO 2.....	15		
EXEMPLO 3.....	17		
EXEMPLO 4.....	19		
MATLAB 9.1	21		
EXEMPLO1.....	21		
FICHA DE AVALIAÇÃO M9	25		
GRUPO C	25		
EXERCÍCIO 1	25		
GRUPO B	25		
EXERCÍCIO 2	25		
GRUPO A	25		

Sistemas Discretos Lineares e Invariantes no Tempo

TÓPICOS

Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo

Resposta ao impulso e ao escalão

Resposta na frequência

Propriedades

Modelos Lineares

Modelos ARMA, AR e MA

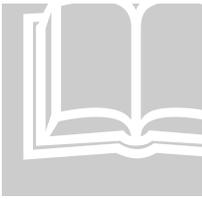
Sistemas FIR e IIR

Neste Módulo é feita a introdução ao estudo de sistemas discretos lineares e invariantes no tempo. É apresentado o conceito de sistema linear e invariante no tempo (SLIT) e o conceito de resposta impulsiva de um SLIT. Mostra-se de seguida como a resposta de um sistema, quer no tempo quer na frequência, pode ser calculado a partir do conhecimento da sua resposta impulsiva, e mostra-se como, com base nesta mesma resposta, se pode classificar um sistema quanto à memória, invertibilidade, causalidade, e estabilidade. São apresentados os modelos AR, MA e ARMA de sistemas causais, e o conceito de sistemas FIR e IIR. São dados exemplos analíticos simples de aplicação dos conceitos, e mostra-se como os referidos exemplos se podem analisar no ambiente *Matlab* recorrendo às funções *impz*, *conv*, *filter*, *freqz*, e *fvtool*. A matéria será retomada nos Módulos 11 e 12, onde se serão estudados exemplos de maior complexidade.

Objectivos

No fim deste módulo o aluno deverá :

1. Saber calcular a resposta impulsiva de um SLIT.
2. Saber calcular a resposta de um SLIT ao escalão unitário.
3. Saber calcular a resposta em frequência de um SLIT.
4. Compreender o conceito de invertibilidade, causalidade e estabilidade de um SLIT.
5. Saber reconhecer sistemas AR, MA, ARMA, FIR e IIR.
6. Dominar a utilização das funções *impz*, *conv*, *filter*, *freqz*, e *fvtool*.



1. Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo

Sistema

Define-se **sistema** como um processo que estabelece uma relação de causa-efeito entre duas entidades chamadas o **signal de entrada** do sistema (causa), ou simplesmente entrada, e o **signal de saída** do sistema (efeito), ou simplesmente saída.

Designamos por **sistema contínuo** aquele em que os sinais de entrada e saída do sistema são sinais contínuos, e por **sistema discreto** aquele em que os sinais de entrada e saída do sistema são sinais discretos. Faremos apenas o estudo de sistemas discretos.

A relação entre a entrada do sistema, $x[n]$, e a saída do sistema, $y[n]$, é estabelecida através de uma ou várias equações chamada(s) o modelo matemático do sistema, ou simplesmente o

modelo do sistema,

$$y[n] = S[x[n]]$$

Um sistema genérico é representado por um diagrama de blocos como se mostra na figura M9.1.

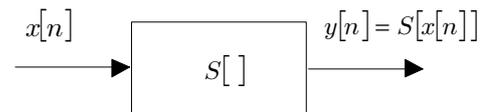


Figura M9.1

Linearidade

Um sistema diz-se um **sistema linear** se a resposta do sistema a uma combinação linear de vários sinais for uma combinação linear, pesada pelos mesmos coeficientes, das respostas individuais a cada um dos sinais. Portanto, sendo

$$x(t) = \sum_k a_k x_k(t)$$

e

$$y_k(t) = S[x_k(t)]$$

então

$$\begin{aligned} y(t) &= S[x(t)] \\ &= S\left[\sum_k a_k x_k(t)\right] = \sum_k a_k S[x_k(t)] \end{aligned}$$

e finalmente

$$y(t) = \sum_k a_k y_k(t)$$

Por outras palavras, um sistema diz-se um sistema linear se verificar o **princípio da sobreposição**.

Invariância no tempo

Um sistema diz-se um **sistema invariante no tempo** se um deslocamento no tempo do sinal de entrada provocar o mesmo deslocamento no tempo no sinal de saída, sem que a forma do sinal de saída se altere.

$$y[n]_{x[n-n_o]} = y[n]_{n-n_o}$$

O mesmo é dizer, quando um sistema é invariante no tempo, a saída do sistema depende dos valores do sinal de entrada, mas não do instante em que estes foram apresentados ao sistema.

SLIT

Um sistema diz-se um **sistema linear e invariante no tempo (SLIT)** se verificar simultaneamente as condições de linearidade e invariância no tempo.



2. Resposta ao impulso, ao escalão e na frequência

Resposta ao impulso

Considere que o sinal de entrada de um sistema discreto é o impulso unitário

$$x[n] = \delta[n]$$

Na saída do sistema, com modelo $S[\]$, teremos o sinal

$$\begin{aligned} y[n] &= S[x[n]] \\ &= S[\delta[n]] \\ &= h[n] \end{aligned}$$

Define-se a **resposta impulsiva** de um sistema discreto como o sinal que o sistema apresenta na saída quando a sua entrada é um impulso unitário, utilizando-se para a designar a notação $h[n]$

$$h[n] = S[x[n]] \Big|_{x[n]=\delta[n]}$$

Seja $x[n]$ o sinal de entrada de um SLIT discreto com modelo $S[\]$. O sinal de saída do sistema será

$$y[n] = S[x[n]] = S\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]\delta[n-i]\right]$$

Atendendo a que o sistema é linear, podemos escrever

$$y[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]S[\delta[n-i]]$$

Ora, atendendo à definição de resposta impulsiva, e dado que o sistema é invariante no tempo

$$S[\delta[n-i]] = h[n-i]$$

, e portanto

$$y[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]h[n-i]$$

, o que, por definição de convolução, corresponde à convolução ente a entrada e a resposta impulsiva do sistema

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

A **resposta de um SLIT discreto a um qualquer sinal** $x[n]$ é facilmente determinável, uma vez conhecida a sua resposta impulsiva

$$h[n] = S[x[n]] \Big|_{x[n]=\delta[n]}$$

, sendo

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Conseguimos assim passar da descrição da resposta do sistema a sinal genérico $x[n]$, com base num operador, desconhecido, que representa o modelo do sistema, $y[n] = S[x[n]]$, para uma relação explícita entre o sinal de entrada e o sinal de saída do sistema $y[n] = x[n] * h[n]$. Concluimos portanto que o modelo do sistema fica completamente definido desde que seja conhecida a sua resposta impulsiva.

Resposta ao escalão

Considere que o sinal de entrada de um sistema discreto é o escalão unitário

$$u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$

Designando a resposta do sistema ao escalão unitário por $g[n]$, será

$$\begin{aligned}
 g[n] &= S[x[n]]_{x[n]=u[n]} \\
 &= u[n] * h[n] \\
 &= h[n] * u[n] \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i] u[n-i]
 \end{aligned}$$

Sendo $u[i]$ nulo para $i < 0$, então $u[-i]$ é nulo para $i > 0$ e, logo, $u[-i+n] = u[n-i]$ é nulo para $i > n$. Assim sendo, resulta finalmente

$$g[n] = \sum_{i=-\infty}^n h[i]$$

Sendo

$$g[n-1] = \sum_{i=-\infty}^{n-1} h[i]$$

então

$$g[n] - g[n-1] = \sum_{i=-\infty}^n h[i] - \sum_{i=-\infty}^{n-1} h[i] = h[n]$$

A resposta impulsiva de um SLIT discreto, $h[n]$, pode ser obtida a partir da **resposta ao escalão** unitário, $g[n]$, sendo

$$h[n] = g[n] - g[n-1]$$

ou, vice-versa, a resposta ao escalão unitário pode ser obtida a partir da resposta impulsiva

$$g[n] = \sum_{i=-\infty}^n h[i]$$

Resposta em frequência

Sendo a resposta no domínio do tempo de um SLIT discreto, a um qualquer sinal de entrada $x[n]$, determinável a partir da resposta impulsiva

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Resulta, aplicando a TF a ambos os membros da equação, que

$$\begin{aligned}
 Y(\Omega) &= TF[x[n] * h[n]] \\
 &= X(\Omega)H(\Omega)
 \end{aligned}$$

A **resposta em frequência** de um SLIT discreto é facilmente determinável a partir dos espectros de um sinal de entrada e respectivo sinal de saída, sendo

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

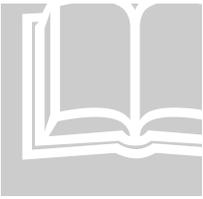
A relação

$$|H(\Omega)| = \frac{|Y(\Omega)|}{|X(\Omega)|}$$

, que estabelece o quociente entre as amplitude de cada uma das componentes do sinal de saída com as respectivas componentes do sinal de entrada é designada por **resposta em amplitude**, ou **ganho** do SLIT. A relação

$$\arg\{H(\Omega)\} = \arg\{Y(\Omega)\} - \arg\{X(\Omega)\}$$

é designada **por resposta de fase**, ou simplesmente **fase** do SLIT discreto, e representa o desfasamento introduzido pelo sistema. Note que resulta de $Y(\Omega)$ e $X(\Omega)$ que $H(\Omega)$ é periódica de 2π .



3. Propriedades

Para além da linearidade e da invariância no tempo, os sistemas podem ainda ser caracterizados por um conjunto de propriedades que em seguida se enunciam

Memória.

Um sistema diz-se um **sistema com memória** se a saída do sistema em pelo menos um instante n_0 , $y[n_0]$, depender de outros valores da entrada do sistema para além da entrada nesse instante, $x[n_0]$.

Quando a saída de um sistema num qualquer instante n_0 , $y[n_0]$, depender apenas do valor da entrada nesse instante, $x[n_0]$, o sistema diz-se um **sistema sem memória**.

No caso de um SLIT, a saída do sistema pode ser calculada uma vez conhecida a resposta impulsiva do sistema

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * x[n] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i] x[n-i] \end{aligned}$$

, para que a resposta do sistema no instante n_0 não dependa do sinal de entrada em qualquer outro instante deve ser

$$\begin{cases} h[i] = 0 & i \neq 0 \\ h[i] \neq 0 & i = 0 \end{cases}$$

, ou seja, atendendo à definição do impulso unitário

$$h[n] = K\delta[n]$$

Um **SLIT discreto sem memória** é caracterizado por uma resposta impulsiva

$$h[n] = K\delta[n]$$

, pelo que

$$y[n] = Kx[n]$$

Resultando ainda

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * x[n] \\ &= K\delta[n] * x[n] \\ &= Kx[n] \end{aligned}$$

Um SLIT sem memória limita-se a fazer uma simples operação de escalamento da amplitude do sinal apresentado na entrada.

Invertibilidade

Um sistema diz-se um **sistema invertível** se entradas distintas produzirem saídas distintas. O mesmo é dizer, conhecida que seja a saída do sistema é possível saber qual a entrada que lhe deu origem. Caso contrário o sistema diz-se um **sistema não invertível**. Um sistema cuja saída seja igual à entrada é designado por **sistema identidade**.

Um sistema S_2 diz-se um **sistema inverso** de um sistema S_1 se o sistema constituído pela ligação em cascata dos sistemas S_1 e S_2 é um sistema identidade, isto é, um sistema em que o sinal de saída do sistema S_1 constitui o sinal de entrada do sistema S_2 , tem uma saída igual à entrada do sistema S_1 .

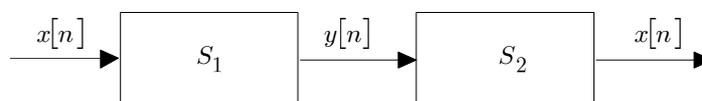


Figura M9.2

Dado um SLIT S_1 , como vimos,

$$y_1[n] = x_1[n] * h_1[n]$$

Se o sistema for invertível, então existe um sistema inverso S_2 , que admitimos ser um SLIT,

$$y_2[n] = x_2[n] * h_2[n]$$

, que quando ligado em cascata com o sistema S_1 produz na sua saída a entrada do sistema S_1 .

Ou seja

$$\begin{aligned} y_2[n] &= x_2[n] * h_2[n] \\ &= y_1[n] * h_2[n] \\ &= x_1[n] * h_1[n] * h_2[n] \\ &= x_1[n] \end{aligned}$$

Um **SLIT discreto com resposta impulsiva** $h[n]$ **é invertível** se for possível determinar um outro SLIT discreto com resposta impulsiva $h_i[n]$, chamado SLIT inverso, tal que

$$h[n] * h_i[n] = \delta[n]$$

Recordando que para um impulso unitário

$$\delta[n] * x[n] = x[n]$$

Deve então ser

$$h_1[n] * h_2[n] = \delta[n]$$

Dada a complexidade de cálculo da convolução, os sistemas inversos não são determinados directamente a partir das expressões acima, mas sim das respostas em frequência. Sendo

$$h[n] * h_i[n] = \delta[n]$$

resulta, aplicando a TF a ambos os membros

$$\begin{aligned} H(\Omega)H_i(\Omega) &= 1 \\ H_i(\Omega) &= \frac{1}{H(\Omega)} \end{aligned}$$

Causalidade

Um sistema diz-se um **sistema causal** se a saída em qualquer instante n_0 só depender dos valores da entrada nesse instante ou nos instantes anteriores ($n \leq n_0$). Se a saída de um sistema depender de valores da entrada em instantes posteriores ao actual o sistema diz-se um **sistema não causal**.

Como, no caso de um SLIT, a saída do sistema é dada por

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * x[n] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]x[n-i] \end{aligned}$$

Então, para que a saída em qualquer instante n_0

$$y[n_0] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]x[n_0-i]$$

Um **SLIT discreto com resposta impulsiva** $h[n]$ **é causal** se

$$h[n] = 0, \quad \forall n < 0$$

não dependa dos instantes anteriores a n_0 , deve ser

$$h[i]x[n_0-i] = 0, \quad \forall i < 0$$

, o que implica

$$h[i] = 0, \quad \forall i < 0$$

Resultando imediatamente da somas de convolução que, para um SLIT discreto causal, o sinal de saída é

$$y[n] = \sum_{i=0}^{\infty} h[i]x[n-i] = \sum_{i=-\infty}^n x[i]h[n-i]$$

Estabilidade

Um sistema diz-se um **sistema estável** se para qualquer sinal de entrada limitado em amplitude, $|x[n]| \leq M$, $\forall n$, o sinal de saída for também limitado em amplitude, $|y[n]| \leq N$, $\forall n$. Um sistema que não é estável diz-se um **sistema instável**.

Para que um SLIT seja estável, deve ser

$$|y[n]| = \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]x[n-i] \right|$$

Como

$$\left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]x[n-i] \right| \leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]x[n-i]|$$

Então

$$|y[n]| \leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]x[n-i]|$$

$$|y[n]| \leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]|M$$

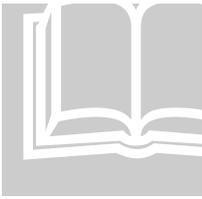
$$\leq M \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]|$$

Um **SLIT discreto é estável** se a sua resposta impulsiva for absolutamente somável

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]| < \infty$$

Pelo que, para que $y[n]$ seja limitado, deve ser

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]| < \infty$$



4. Modelos Lineares

Na sua forma mais geral, o modelo de um SLIT discreto causal pode ser descrito analiticamente por uma equação às diferenças linear de coeficientes constantes

$$\sum_{i=0}^N a_i y[n-i] = \sum_{i=0}^M b_i x[n-i]$$

É portanto um modelo em que a relação temporal entre os sinais de entrada e saída do sistema obedece genericamente à equação

$$\left(\begin{array}{l} \text{Combinação linear} \\ \text{dos valores passados} \\ \text{e presente da saída} \\ \text{do modelo} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Combinação linear} \\ \text{dos valores passados} \\ \text{e presente da entrada} \\ \text{do modelo} \end{array} \right)$$

Da simplificação deste modelo mais geral, resultam os modelos

1. Modelo de média ponderada, ou **modelo MA (Moving Average)**
2. Modelo autoregressivo, ou **modelo AR (AutoRegressive)**
3. Modelo ARMA (**AutoRegressive Moving Average**)

Modelo AR

Um **modelo AR** (de ordem N) satisfaz a equação às diferenças

$$\sum_{i=0}^N a_i y[n-i] = x[n]$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Combinação linear dos valores} \\ \text{passados e presente da saída} \\ \text{do modelo} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Valor presente} \\ \text{da entrada do} \\ \text{modelo} \end{array} \right)$$

em que a_0, a_1, \dots, a_N são coeficientes constantes, designados por **parâmetros do modelo AR**.

O modelo AR é um caso particular do modelo geral, em que não são utilizados os valores passados da entrada do sistema. Note que, em relação à expressão geral, os coeficientes são normalizados, de modo a ser $b_0 = 1$.

A figura M9.3 representa o modelo AR. Explicitando a equação do sistema relativamente à sua saída temos

$$y(n) = \frac{1}{a_0} \left(x[n] - \sum_{i=1}^N a_i y[n-i] \right)$$

Escrevendo os diversos coeficientes a_i na forma de uma sequência $a[i]$, podemos reescrever a equação na forma

$$\sum_{i=0}^N a[i] y[n-i] = x[n]$$

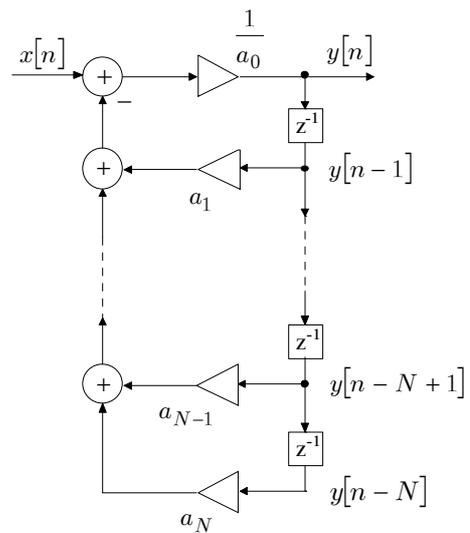


Figura M9.3

ficando claro que o primeiro membro da equação corresponde à convolução da sequência $a[n]$ dos parâmetros do sistema com a saída do sistema $y[n]$

$$a_n * y[n] = x[n]$$

Calculando a TF de ambos os membros da equação, podemos determinar a resposta em frequência do sistema. Temos

$$H_a(\Omega)Y(\Omega) = X(\Omega)$$

logo

$$Y(\Omega) = \frac{1}{H_a(\Omega)} X(\Omega) = H_{AR}(\Omega)X(\Omega)$$

Sendo, $H_a(\Omega)$ a TF da sequência de parâmetros

$$H_a(\Omega) = \sum_{n=0}^N a_n e^{-j\Omega n}$$

Podemos então escrever a resposta em frequência de um sistema AR

Um **modelo AR** tem uma **resposta em frequência** só com pólos

$$H_{AR}(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^N a_n e^{-j\Omega n}}$$

Modelo MA

Um **modelo MA** (de ordem M) satisfaz a equação às diferenças

$$y[n] = \sum_{i=0}^M b_i x[n-i]$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Valor presente} \\ \text{da saída do} \\ \text{modelo} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Combinação linear dos} \\ \text{valores passados e presente} \\ \text{da entrada do modelo} \end{array} \right)$$

em que b_0, b_1, \dots, b_M são os **parâmetros do modelo MA**.

O modelo MA é um caso particular do modelo geral em que não são utilizados os valores passados da saída do sistema. Note ainda que, em relação à expressão geral, os coeficientes foram normalizados, de modo a ser $a_0 = 1$. A figura M9.4 representa o modelo MA. Explicitando a equação do sistema relativamente à sua saída temos.

$$y[n] = \sum_{i=0}^M b_i x[n-i]$$

Calculando a TF de ambos os membros da equação, resulta

$$Y(\Omega) = H_b(\Omega)X(\Omega)$$

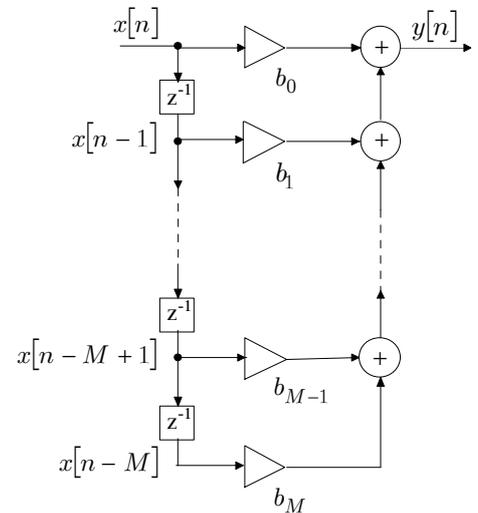


Figura M9.4

Em que $\overline{H_b}(\Omega)$ é a TF da sequência de parâmetros. Temos assim um sistema com uma resposta em frequência

$$H_{MA}(\Omega) = \sum_{n=0}^M b_n e^{-j\Omega n}$$

Um **modelo MA** tem uma **resposta em frequência** só com zeros

$$H_{MA}(\Omega) = \sum_{n=0}^M b_n e^{-j\Omega n}$$

Modelo ARMA.

Um **modelo ARMA** (de ordem (N, M)) satisfaz a equação às diferenças

$$\sum_{i=0}^N a_i y[n-i] = \sum_{i=0}^M b_i x[n-i]$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Combinação linear} \\ \text{dos valores passados} \\ \text{e presente da saída} \\ \text{do modelo} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Combinação linear} \\ \text{dos valores passados} \\ \text{e presente da entrada} \\ \text{do modelo} \end{array} \right)$$

em que a_0, a_1, \dots, a_N e b_0, b_1, \dots, b_M são os **parâmetros do modelo ARMA**

É portanto um modelo completo, do qual os modelos AR e MA são casos particulares. As figuras M9.5 e M9.6 apresentam dois modelos alternativos para a representação de um sistema ARMA, designados, respectivamente, por forma directa I

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left(\sum_{i=0}^M b_i x[n-i] - \sum_{i=1}^N a_i y[n-i] \right)$$

, e forma directa II

$$w[n] = \frac{1}{a_0} \left(x[n] - \sum_{i=1}^N a_i w[n-i] \right)$$

$$y[n] = \sum_{i=0}^M b_i w[n-i]$$

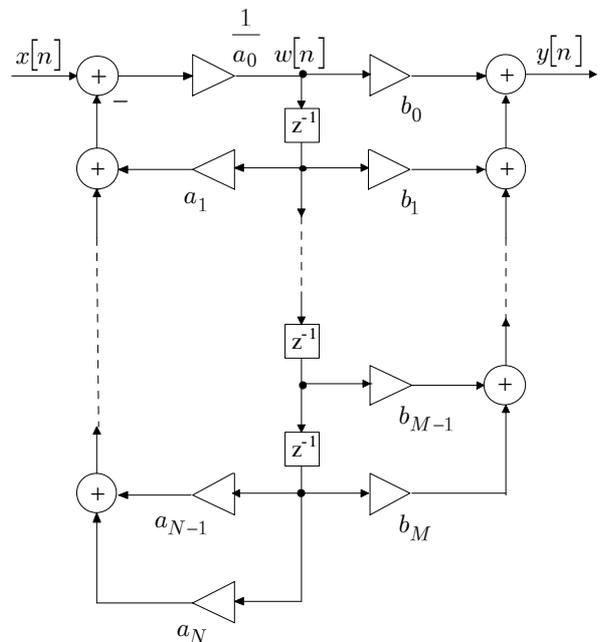


Figura M9.5

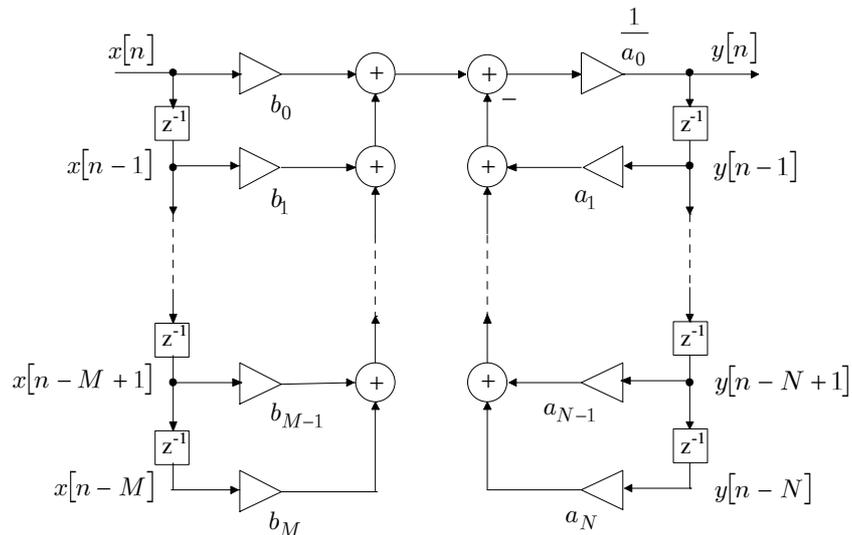


Figura M9.6

Calculando a TF de ambos os membros da equação

$$\sum_{i=0}^N a_i y[n-i] = \sum_{i=0}^M b_i x[n-i]$$

resulta

$$Y(\Omega) \sum_{n=0}^M a_n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^N b_n e^{-j\Omega n} X(\Omega)$$

Um **modelo ARMA** tem uma **resposta em frequência** com polos e zeros

$$H_{ARMA}(\Omega) = \frac{\sum_{n=0}^N b_n e^{-j\Omega n}}{\sum_{n=0}^M a_n e^{-j\Omega n}}$$

Sistemas FIR e IIR.

Alternativamente à classificação baseada na equação às diferenças que descreve o sistema, é comum **classificar os SLIT com base na dimensão da resposta impulsiva**. Como vimos, o sinal de saída de um SLIT discreto pode ser calculada uma vez conhecida a sua resposta impulsiva

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * x[n] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i] x[n-i] \end{aligned}$$

Se $h[n]$ for uma sequência de dimensão finita o sistema é designado por **sistema FIR (Finite Impulse Response)**. Admitindo que o sistema é causal, a resposta do sistema toma a forma particular

$$y[n] = \sum_{i=0}^M h[i] x[n-i]$$

, sendo portanto coincidente com um modelo MA.

$$y[n] = \sum_{i=0}^M b_i x[n-i]$$

com $h[i] = b_i$, $0 < i < M$

Sendo uma soma finita, a expressão anterior é muito útil do ponto de vista computacional para o cálculo da resposta do sistema. A menos que $M = 0$, resulta de imediato da definição que **um sistema FIR é um sistema com memória**. A resposta em frequência de um sistema FIR é

$$\begin{aligned} H_{FIR}(\Omega) &= H_{MA}(\Omega) \\ &= \sum_{n=0}^M b_n e^{-j\Omega n} \end{aligned}$$

pelo que, dado que não existem pólos, **um sistema FIR é sempre um sistema estável**. O esquema de blocos da figura xxx é representativo de um sistema FIR.

Se $h[n]$ for uma sequência de dimensão infinita, o sistema é designado por **sistema IIR (Infinite Impulse Response)**. Neste caso, e admitindo que o sistema é causal, o cálculo da resposta do sistema é feito a partir da expressão

$$y[n] = \sum_{i=0}^{\infty} h[i] x[n-i]$$

não sendo útil do ponto de vista computacional, embora, naturalmente, possa ser usada para calcular a resposta do ponto de vista teórico. Um subconjunto importante dos possíveis sistemas IIR é o daqueles sistemas que podem ser descritos pela equação às diferenças

$$y[n] + \sum_{i=1}^N a_i y[n-i] = x[n] + \sum_{i=1}^M b_i x[n-i]$$

Ou seja, os coincidentes com os sistemas ARMA. Neste caso a resposta do sistema pode ser calculada com base num numero finito de termos, tendo resposta em frequência

$$H_{IIR}(\Omega) = \frac{\sum_{n=0}^N b_n e^{-j\Omega n}}{\sum_{n=0}^M a_n e^{-j\Omega n}}$$

, pelo que, dependendo do posicionamento dos pólos, **um sistema IIR não é necessariamente um sistema estável**. Os esquemas de blocos das figuras xxx e xxx são representativos de um sistema IIR.

Sistemas realimentados e não realimentados.

Os sistemas podem ainda ser classificados de um terceiro ponto de vista. Se a saída do sistema puder ser calculada sequencialmente com base apenas no valor do sinal de entrada no presente instante e nos instantes anteriores, o sistema é dito um **sistema não realimentado**. Os sistemas FIR e MA são exemplos de sistemas não realimentados, com um esquema de blocos tipicamente descrito pela figura M9.4. Se o cálculo da saída do sistema recorrer a valores anteriores dessa mesma saída então o sistema diz-se um **sistema realimentado**. Os sistemas IIR, AR e ARMA são exemplos de sistemas realimentados, com um esquema de blocos tipicamente descrito pela figura M9.3, M9.5 e M9.6.



Exercício 9.1

Exemplo 1

Considere um SLIT discreto caracterizado pelo modelo

$$y[n] = \frac{x[n] + x[n-1]}{2}$$

a) Determine a resposta impulsiva do sistema.

Por definição de resposta impulsiva

$$\begin{aligned} h[n] &= S[x[n]] \Big|_{x[n]=\delta[n]} \\ &= 0.5x[n] + 0.5x[n-1] \Big|_{x[n]=\delta[n]} \\ &= 0.5\delta[n] + 0.5\delta[n-1] \end{aligned}$$

b) O sistema é FIR ou IIR?

Dado que a resposta impulsiva é finita, o sistema é FIR.

Alternativamente poderíamos ter tido em atenção que, sendo

$$\begin{aligned} y[n] &= 0.5x[n] + 0.5x[n-1] \\ &= \sum_{i=0}^1 b_i x[n-i] \end{aligned}$$

pelo que podemos classificar o sistema como sendo um sistema MA, ou como sendo um sistema FIR, com $M = 1$, $b_0 = 0.5$ e $b_1 = 0.5$.

c) Determine e esboce a resposta do sistema ao escalão unitário.

Por definição de resposta do sistema ao escalão unitário

$$\begin{aligned} g[n] &= \sum_{i=-\infty}^n h[i] \\ &= \sum_{i=-\infty}^n \frac{\delta[i] + \delta[i-1]}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^n \delta[i] + \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^n \delta[i-1] \\ &= \frac{1}{2} u[n] + \frac{1}{2} u[n-1] \end{aligned}$$

d) Determine o sinal à saída do sistema admitindo que à entrada tem o sinal discreto

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$

A partir do modelo do sistema.

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{x[n] + x[n-1]}{2} \\ &= \frac{1}{2} (\delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]) + \frac{1}{2} (\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 3\delta[n-3]) \\ &= \frac{1}{2} \delta[n] + \delta[n-1] + \frac{3}{2} \delta[n-2] + \frac{1}{2} \delta[n-1] + \delta[n-2] + \frac{3}{2} \delta[n-3] \\ &= \frac{1}{2} \delta[n] + \frac{3}{2} \delta[n-1] + \frac{5}{2} \delta[n-2] + \frac{3}{2} \delta[n-3] \end{aligned}$$

A resposta do sistema ao sinal de entrada pode também ser calculada a partir da resposta impulsiva do sistema. Sendo $y[n] = x[n] * h[n]$ resulta (veja o método gráfico de resolução da convolução que se mostra na figura M9.7)

$$y[n] = \frac{1}{2} \delta[n] + \frac{3}{2} \delta[n-1] + \frac{5}{2} \delta[n-2] + \frac{3}{2} \delta[n-3]$$

e) Determine e esboce a resposta em frequência do sistema.

Sendo

$$h[n] = 0.5\delta[n] + 0.5\delta[n-1]$$

resulta de imediato para a resposta em frequência do sistema

$$\begin{aligned} H[\Omega] &= 0.5 + 0.5e^{-j\Omega} \\ &= e^{-j\frac{\Omega}{2}} \frac{e^{j\frac{\Omega}{2}} + e^{-j\frac{\Omega}{2}}}{2} \\ &= e^{-j\frac{\Omega}{2}} \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) \end{aligned}$$

Alternativamente, poderíamos ter tido em atenção que, tratando-se de um sistema FIR, a resposta em frequência do sistema é

$$\begin{aligned} H_{FIR}(\Omega) &= H_{MA}(\Omega) \\ &= \sum_{n=0}^M b_n e^{-j\Omega n} \end{aligned}$$

Para o caso concreto, com $M = 1$, $b_0 = 0.5$ e $b_1 = 0.5$, temos

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \sum_{n=0}^1 b_n e^{-j\Omega n} \\ &= 0.5 + 0.5e^{-j\Omega} \end{aligned}$$

f) Classifique o sistema em relação à memória, causalidade e estabilidade.

Concluimos de imediato, a partir de $h[n]$

$$h[n] = 0.5\delta[n] + 0.5\delta[n-1]$$

, que se trata de um sistema causal, dado que $h[n] = 0$ para $n < 0$, e com memória, dado que $h[n] \neq 0$ para $n \neq 0$. Sendo, como vimos, um sistema FIR, o sistema é necessariamente estável.

g) Faça um esquema de blocos que represente o sistema.

A partir da equação do sistema

$$y[n] = 0.5x[n] + 0.5x[n-1]$$

o esquema de blocos é conforme se mostra na figura M9.8

		0	1	n
		0.5	0.5	$h[n]$
0	1	0.5	0.5	
1	2	1	1	
2	3	1.5	1.5	
n	$x[n]$			

Figura M9.7

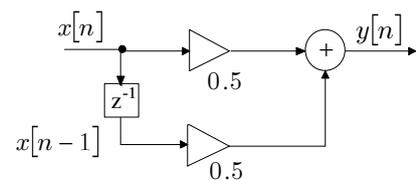


Figura M9.8

Exemplo 2

Considere um SLIT discreto caracterizado pelo modelo

$$y[n] = 0.5y[n-1] + x[n]$$

a) Determine e esboce a resposta impulsiva do sistema.

Sendo, por definição

$$h[n] = S[x[n]]|_{x[n]=\delta[n]}$$

e **admitindo** $y[n] = x[n] = 0$ para $n < 0$. Temos então

$$h[0] = y[0] = 0.5y[-1] + \delta[0] = 1$$

$$h[1] = y[1] = 0.5y[0] + \delta[1] = 0.5$$

$$h[2] = y[2] = 0.5y[1] + \delta[2] = 0.5^2$$

$$h[3] = y[3] = 0.5y[2] + \delta[3] = 0.5^3$$

...

$$h[n] = 0.5^n u[n]$$

b) O sistema é FIR ou IIR?

Dado que a resposta impulsiva é infinita, o sistema é IIR.

Alternativamente, dado que

$$y[n] - 0.5y[n-1] = x[n]$$

$$\sum_{i=0}^N a_i y[n-i] = x[n]$$

Podemos classificar o sistema como sendo um sistema AR, ou como sendo um sistema IIR, com $N = 1$, $a_0 = 1$ e $a_1 = -0.5$.

c) Determine e esboce a resposta do sistema ao escalão unitário.

A resposta do sistema ao escalão unitário, por definição, é

$$g[n] = \sum_{i=-\infty}^n h[i]$$

logo

$$\begin{aligned} g[n] &= \sum_{i=-\infty}^n 0.5^i u[i] \\ &= u[n] \sum_{i=0}^n 0.5^i \end{aligned}$$

Tendo em atenção que

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

resulta

$$\begin{aligned}
 g[n] &= \frac{1 - 0.5^{n+1}}{1 - 0.5} u[n] \\
 &= 2(1 - 0.5^{n+1}) u[n]
 \end{aligned}$$

d) Determine e esboce a resposta em frequência do sistema.

A resposta em frequência do sistema, notando que se trata de um sistema AR, é

$$H_{AR}(\Omega) = \frac{1}{\sum_{n=0}^N a_n e^{-j\Omega n}}$$

Para o caso concreto, com $N = 1$, $a_0 = 1$ e $a_1 = -0.5$, temos

$$\begin{aligned}
 H(\Omega) &= \frac{1}{\sum_{n=0}^1 a_n e^{-j\Omega n}} \\
 &= \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega}}
 \end{aligned}$$

e) Classifique o sistema em relação à memória, causalidade e estabilidade.

Um SLIT sem memória é caracterizado por uma resposta impulsiva $h[n] = K\delta[n]$. O presente SLIT, tendo resposta impulsiva $h[n] = 0.5^n u[n]$, existe para $t \neq 0$, pelo que se trata de um sistema com memória

Para que o sistema seja causal deve ser $h[n] = 0$, $\forall n < 0$. Sendo $h[n] = 0.5^n u[n]$ o sistema não assume valores não nulos para $n < 0$, logo, o sistema é causal.

Para que o sistema seja estável deve ser

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]| < \infty$$

Para o sistema em análise temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]| &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} |0.5^i u[i]| \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \\
 &= \frac{1}{1 - 0.5} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Logo o sistema é estável.

f) Faça um esquema de blocos que represente o sistema.

A partir da equação do sistema

$$y[n] = 0.5y[n-1] + x[n]$$

o esquema de blocos é conforme se mostra na figura M9.9

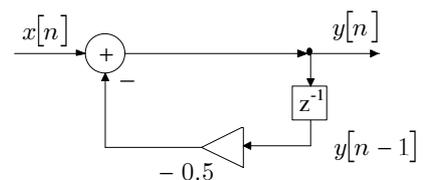


Figura M9.9

g) Determine a resposta impulsiva do sistema inverso.

Um SLIT é invertível se for possível determinar um outro SLIT com resposta impulsiva $h_i[n]$ tal que

$$h[n] * h_i[n] = \delta[n]$$

, ou, aplicando a TF a ambos os membros resulta

$$H(\Omega)H_i(\Omega) = 1$$

Sendo

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= TF[0.5^n u[n]] \\ &= \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega}} \end{aligned}$$

Resulta

$$\begin{aligned} H_i(\Omega) &= \frac{1}{H(\Omega)} \\ &= 1 - 0.5e^{-j\Omega} \end{aligned}$$

Pelo que

$$\begin{aligned} h_i[n] &= TF^{-1}[1 - 0.5e^{-j\Omega}] \\ &= \delta[n] - 0.5\delta[n-1] \end{aligned}$$

Exemplo 3

Considere um sistema discreto caracterizado pela equação

$$y[n] = x[n] - 0.5y[n-1]$$

a) Diga, justificando, se o sistema é um FIR ou um IIR

O modelo do sistema é do tipo

$$\sum_{i=0}^N a_i y[n-i] = x[n]$$

pelo que se trata de um sistema IIR.

b) Calcule a resposta impulsiva do sistema.

A resposta impulsiva corresponde ao sinal que o sistema apresenta na saída quando a sua entrada é um impulso unitário

$$h[n] = S[x[n]]|_{x[n]=\delta[n]}$$

Então, fazendo $x[n] = \delta[n]$, e admitindo $y[n] = x[n] = 0$ para $n < 0$, temos

$$\begin{aligned} h[0] &= y[0] = \delta[0] - 0.5y[-1] = 1 \\ h[1] &= y[1] = \delta[1] - 0.5y[0] = -0.5 \\ h[2] &= y[2] = \delta[2] - 0.5y[1] = (-0.5)^2 \\ h[3] &= y[3] = \delta[3] - 0.5y[2] = (-0.5)^3 \\ &\dots \\ h[n] &= (-0.5)^n u[n] \end{aligned}$$

c) Determine a saída do sistema quando a sequência à entrada do sistema for

$$x[n] = \sum_{i=4}^7 3\delta[n-i]$$

Conhecida a resposta impulsiva, resulta

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= \sum_{i=4}^7 3\delta[n-i] * h[n] \\ &= 3 \sum_{i=4}^7 h[n-i] \\ &= 3 \sum_{i=4}^7 (-0.5)^{n-i} u[n-i] \end{aligned}$$

d) Calcule a resposta em frequência

Sendo um sistema IIR, a equação às diferenças é do tipo

$$\sum_{i=0}^N a_i y[n-i] = x[n]$$

Logo, a resposta em frequência é dada por

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \frac{1}{\sum_{i=0}^N a_i e^{-j\Omega i}} \\ &= \frac{1}{1 + 0.5e^{-j\Omega}} \end{aligned}$$

e) Calcule a resposta impulsiva do sistema inverso

O filtro inverso é tal que

$$\begin{aligned} H_i(\Omega) &= \frac{1}{H(\Omega)} \\ &= 1 + 0.5e^{-j\Omega} \end{aligned}$$

É portanto um filtro com resposta em frequência do tipo

$$H(\Omega) = \sum_{i=0}^M b_i e^{-j\Omega i}$$

, característica dos sistemas FIR, cuja equação às diferenças é

$$y[n] = \sum_{i=0}^N b_i x[n-i]$$

Por comparação com a expressão de $H_i(\Omega)$ é imediato que

$$y[n] = x[n] + 0.5x[n-1]$$

Exemplo 4

Considere o SLIT discreto caracterizado pela seguinte resposta ao escalão unitário

$$g[n] = 2\delta[n+2] + \delta[n+1] - \delta[n] - 2\delta[n-1]$$

a) Determine a resposta impulsiva do sistema

Temos

$$\begin{aligned} h[n] &= g[n] - g[n-1] \\ &= 2\delta[n+2] + \delta[n+1] - \delta[n] - 2\delta[n-1] \\ &\quad - 2\delta[n+1] - \delta[n] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2] \\ &= 2\delta[n+2] - \delta[n+1] - 2\delta[n] - \delta[n-1] + 2\delta[n-2] \end{aligned}$$

b) Determine a resposta em frequência do sistema. Sendo

$$h[n] = 2\delta[n+2] - \delta[n+1] - 2\delta[n] - \delta[n-1] + 2\delta[n-2]$$

Resulta de imediato

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= 2e^{j\Omega 2} - e^{j\Omega} - 2 - e^{-j\Omega} + 2e^{-j\Omega 2} \\ &= -2 - 2 \frac{e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}}{2} + 4 \frac{e^{j\Omega 2} + e^{-j\Omega 2}}{2} \\ &= -2 - 2 \cos(\Omega) + 4 \cos(2\Omega) \end{aligned}$$

c) Diga, justificando, se o sistema é um FIR ou um IIR, e se o sistema é ou não realizável.

Sendo

$$h[n] = 2\delta[n+2] - \delta[n+1] - 2\delta[n] - \delta[n-1] + 2\delta[n-2]$$

a resposta impulsiva é finita, logo trata-se de um sistema FIR.

Como $h[n]$ existe para $n < 0$, o sistema não é causal, logo não é realizável.

d) Considere que à entrada do sistema tem um sinal discreto

$$x[n] = 5 \cos\left[n \frac{\pi}{2}\right] + 3 \operatorname{sen}\left[n\pi + \frac{\pi}{4}\right]$$

Determine o sinal na saída do sistema.

Sendo um SLIT, o sistema não apresenta na saída frequências para além das apresentadas na entrada. Assim, se o sinal de entrada for

$$x[n] = A \cos[\Omega_o n + \Theta]$$

Então, sendo

$$x[n] = \frac{A}{2} e^{j(\Omega_o n + \Theta)} + \frac{A}{2} e^{-j(\Omega_o n + \Theta)}$$

resulta

$$\begin{aligned} y[n] &= |H(\Omega_o)| \frac{A}{2} e^{j(\Omega_o n + \Theta + \arg\{H(\Omega_o)\})} \\ &\quad + |H(\Omega_o)| \frac{A}{2} e^{j(\Omega_o n + \Theta + \arg\{H(\Omega_o)\})} \\ &= A |H(\Omega_o)| \cos(\Omega_o n + \Theta + \arg\{H(\Omega_o)\}) \end{aligned}$$

No caso presente

$$\begin{aligned}
 y[n] &= 5 \left| H\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| \cos \left[\frac{\pi}{2} n + \arg \left\{ H\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\} \right] \\
 &\quad + 3 \left| H(\pi) \right| \sin \left[\pi n + \frac{\pi}{4} + \arg \left\{ H(\pi) \right\} \right] \\
 &= 5 \times 6 \cos \left[\frac{\pi}{2} n + \pi \right] + 3 \times 4 \sin \left[\pi n + \frac{\pi}{4} + 0 \right] \\
 &= 30 \cos \left[\frac{\pi}{2} n + \pi \right] + 12 \sin \left[\pi n + \frac{\pi}{4} \right]
 \end{aligned}$$

e) Classifique o sistema em relação à memória, estabilidade e causalidade.

Sendo

$$h[n] = 2\delta[n+2] - \delta[n+1] - 2\delta[n] - \delta[n-1] + 2\delta[n-2]$$

Resulta

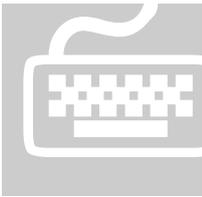
1. O SLIT tem resposta impulsiva que existe para $n \neq 0$, logo é um sistema com memória.
2. Para que o sistema seja causal deve ser $h[n] = 0, \forall n < 0$. O presente sistema assume valores não nulos para $n < 0$, logo, o sistema não é causal.
3. Para que o sistema seja estável dever ser

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]| < \infty$$

Para o sistema em análise temos

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]| = 2 + 1 + 2 + 1 + 2 = 8$$

pelo que o sistema é estável.



Matlab 9.1

Como vimos, na sua forma mais genérica, podemos caracterizar um sistemas discreto (causal) pela equação às diferenças

$$\sum_{i=0}^N a_i y[n-i] = \sum_{i=0}^M b_i x[n-i]$$

em que a_0, a_1, \dots, a_N e b_0, b_1, \dots, b_M são os parâmetros do modelo ARMA (de ordem (N, M)), $x[n-i]$ representa os valores passados e presente ($i = 0$) na entrada do modelo, e $y[n-i]$ representa os valores passados e presente ($i = 0$) na saída do modelo.

Em *Matlab*, conhecidos que sejam os parâmetros do modelo, e uma vez definindo os respectivos vectores, $\mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_N]$ e $\mathbf{b} = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_M]$, existe um conjunto de funções, que no seguimento apresentamos à medida da utilidade da sua utilização, que nos permitem responder ao conjunto de questões postas no Exercício 9.1

Exemplo1

Recorra ao *Matlab* para resolver o Exercício 9.1 Exemplo1.

Dada a equação dos sistema

$$y[n] = 0.5x[n] + 0.5x[n-1]$$

é imediato reconhecer o valor dos parâmetros: $a_0 = 1$; $b_0 = 0.5$; $b_1 = 0.5$. Começemos por definir os vectores \mathbf{a} e \mathbf{b}

```
a=[1];
b=[0.5 0.5];
```

impz(b, a, n)

a) **A resposta impulsiva pode ser calculada recorrendo à função impz(b, a, n)**, em que b e a correspondem aos vectores de parâmetros e n especifica a dimensão (temporal) desejada para a resposta. Consulte o *Help* do *Matlab* para conhecer em pormenor a funcionalidade e formas possíveis de enunciar esta função. Assim, por exemplo para $n = 10$, basta fazer

```
[h n]=impz(b,a,10);
```

para ficar a conhecer a resposta impulsiva. Note que h e n são vectores coluna

```
[h n]'
ans =
    0.5    0.5    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    1    2    3    4    5    6    7    8    9
```

Note que a chamada da função sem argumentos de saída traça de imediato o gráfico da resposta impulsiva. Fazendo

```
impz(b,a,10)
grid on
axis([min(n) max(n) 0 2*max(h)])
```

obtemos o gráfico que se mostra na figura M9.10.

A partir do gráfico a expressão analítica é imediata

$$h[n] = 0.5\delta[n] + 0.5\delta[n-1]$$

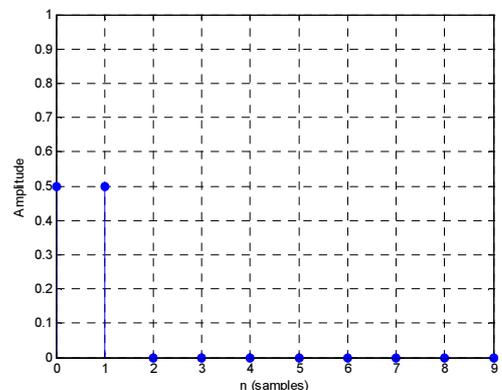


Figura M9.10

conv(h, x)

c) **A resposta de um sistema a um qualquer sinal pode ser obtida a partir do cálculo da**

convolução entre esse sinal e a resposta impulsiva do sistema, $\text{conv}(h, x)$. Conhecida a resposta impulsiva a resposta ao escalão pode então ser obtida fazendo

```
u=ones(1,length(n));
g=conv(h,u)
figure(2);
stem(n,g(1:length(n)),'filled')
grid on
axis([min(n) max(n) 0 2*max(g)])
```

Obtemos assim o gráfico que se mostra na figura M9.11. Note que da convolução entre um sinal de dimensão M e um sinal de dimensão N resulta um sinal de dimensão $M + N - 1$. O gráfico da figura M9.11 foi traçado utilizando apenas as primeiras N (dimensão da entrada), $g(1:\text{length}(n))$, amostras da convolução. Note que se observássemos todos os valores resultantes da convolução, como se mostra na figura M9.12, teríamos a resposta do sistema a um pulso rectangular de dimensão N , resultante do modo como especificámos o escalão, $u=\text{ones}(1,\text{length}(n))$.

filter(b, a, x)

A resposta de um sistema a um qualquer sinal pode ser calculada recorrendo à função $\text{filter}(b, a, x)$, em que b e a correspondem aos vectores de parâmetros e x especifica o sinal de entrada. Consulte o *Help* do *Matlab* para conhecer em pormenor a funcionalidade e formas possíveis de enunciar esta função. Assim, para conhecer a resposta ao escalão podemos fazer, alternativamente,

```
u=ones(1,length(n));
g=filter(b,a,u)
figure(4);stem(n,g,'filled')
grid on
axis([min(n) max(n) 0 2*max(g)])
```

Obtendo assim um gráfico idêntico à figura M9.11. Note que a saída da função *filter* é de dimensão igual ao sinal de entrada.

d) Recorrendo à função *filter*, temos

```
x=[1 2 3 0 0 0];
y=filter(b,a,x);
n=0:length(x)-1;
figure(5);stem(n,y,'filled')
grid on
axis([min(n) max(n) 0 2*max(y)])
```

Obtendo assim o gráfico da figura M9.13. Note que houve o cuidado de colocar zeros à direita dos valores significativos de $x[n]$, de modo a prevenir a resposta truncada da função *filter*. Fazendo simplesmente

```
x=[1 2 3];
```

obteríamos, erradamente, o gráfico da figura M9.14

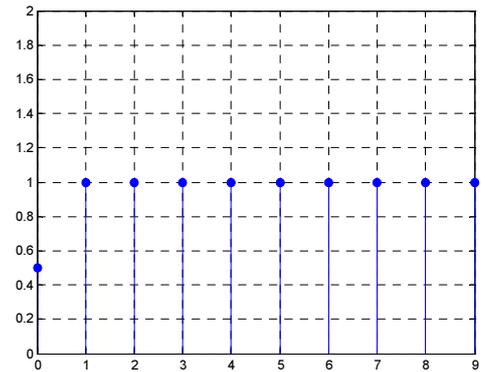


Figura M9.11

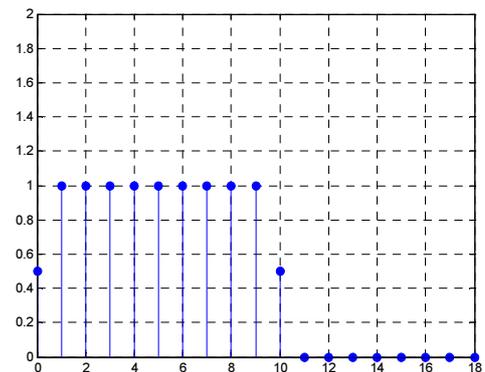


Figura M9.12

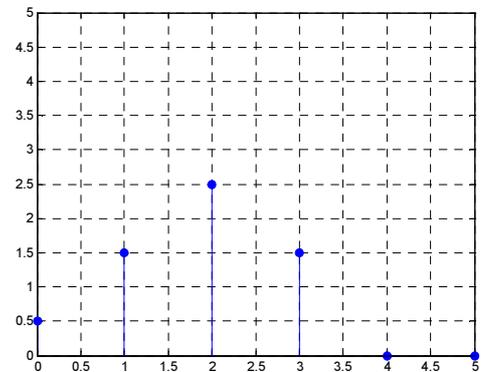


Figura M9.13

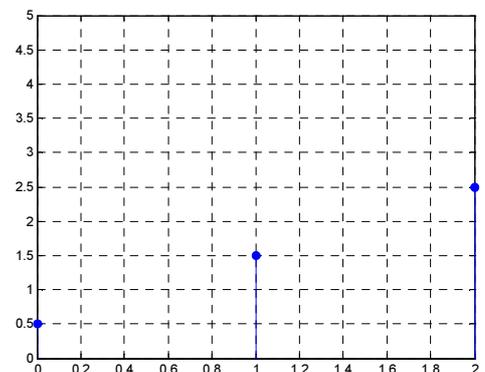


Figura M9.14

freqz(b, a, w)

e) **A resposta em frequência de um sistema a um qualquer sinal, $x[n]$, pode ser calculada recorrendo à função `freqz(b, a, w)`, em que b e a correspondem aos vectores de parâmetros e w especifica a gama de frequências em que se pretende conhecer a resposta. Consulte o *Help* do *Matlab* para conhecer em pormenor a funcionalidade e formas possíveis de enunciar esta função. Assim, para conhecer a resposta em frequência do sistema podemos fazer**

```
w=-2*pi:pi/100:2*pi;
[H w]=freqz(b,a,w);
figure(7);plot(w,abs(H));grid on
axis([min(w) max(w) 0
      max(abs(H))])
figure(8);plot(w,angle(H));grid on
axis([min(w) max(w) -pi/2 pi/2])
```

Obtemos assim os gráficos que se mostram na figura M9.15 relativamente à resposta de amplitude e de fase. Note que a respostas dos sistemas discretos é periódica de 2π , correspondendo $\Omega = 0$ e $\Omega = \pm 2\pi$ às altas frequências e $\Omega = \pm \pi$ às altas frequências. Por ser de leitura mais intuitiva, é comum fazer a representação para $\Omega \in [-\pi, \pi]$ ou para $\Omega \in [0, \pi]$

```
w=0:pi/100:pi;
[H w]=freqz(b,a,w);
...
```

, como se mostra na figura M9.16. Note que, admitindo que o sinal discreto presente na entrada do sistema resultou da amostragem de um sinal contínuo amostrado a uma frequência ω_s , é $\Omega = \omega T_s$, pelo que $\omega = \omega_s \Omega / 2\pi$, resultando que a representação no intervalo $\Omega \in [0, \pi]$ corresponde à resposta do sistema no intervalo $\omega \in [0, \omega_s/2]$, que, como vimos no módulo anterior, corresponde ao semi-domínio positivo de representação válida do sinal de entrada (que se admite ser de banda limitada, e amostrado a uma frequência $\omega_s > 2\omega_M$).

fvtool(b, a)

A resposta impulsiva, a resposta ao escalão, e a resposta em frequência de um sistema de parâmetros a e b, pode ser calculada recorrendo à função `fvtool(b, a)`

```
a=[1];
b=[0.5 0.5];
fvtool(b,a);
```

A função abre uma aplicação feita em GUI (*Graphical User Interface*), como se mostra na figura M.17. A partir desta aplicação é possível visualizar, entre outras, a resposta impulsiva, a resposta ao escalão, e a resposta em frequência de um sistema discreto.

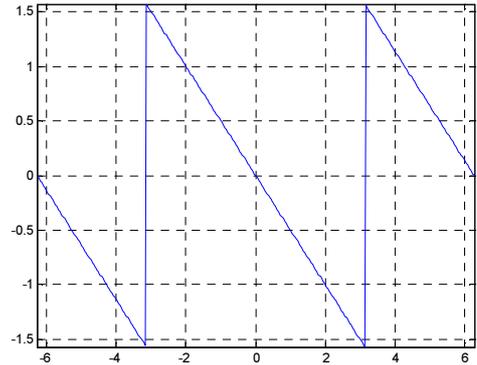
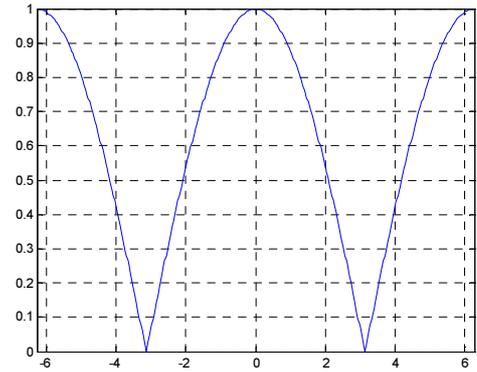


Figura M9.15

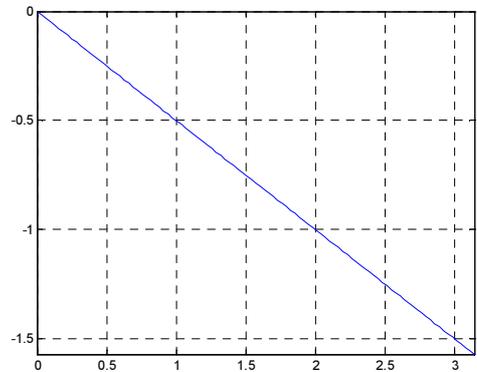
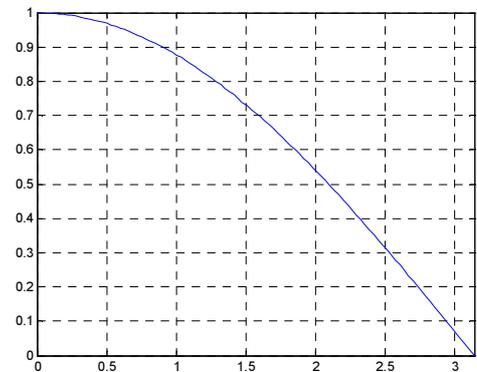


Figura M9.16

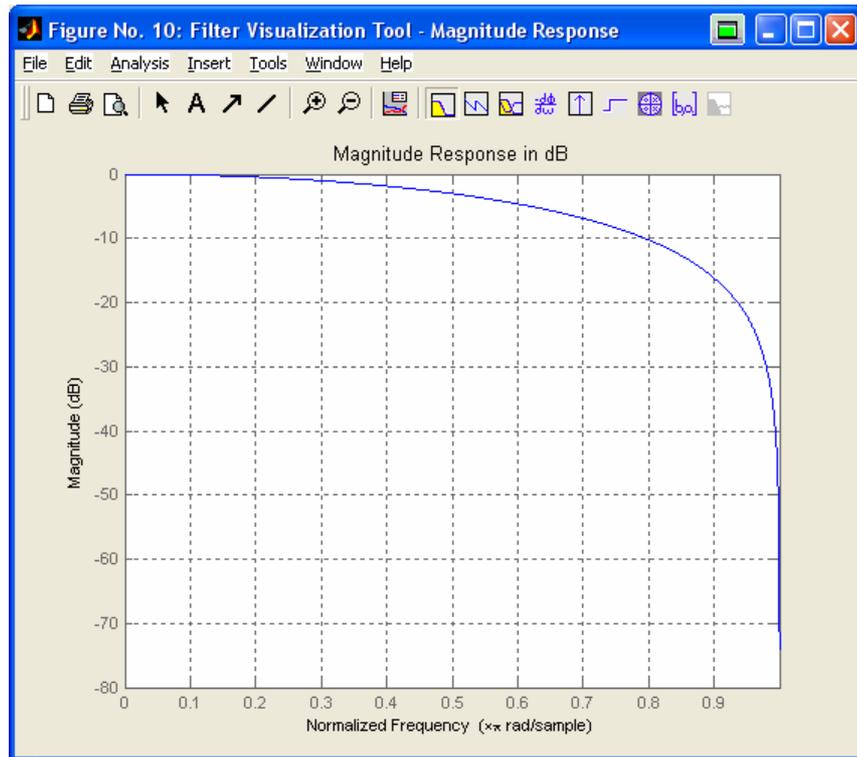


Figura M9.17

A figura M9.17 mostra, por exemplo, o ganho do filtro, em escala logarítmica, em função da frequência normalizada. Explore a aplicação até se sentir suficientemente familiarizado com a sua funcionalidade. Os pormenores da sua utilização serão dados na aula. Como se mostra na figura M9.18, poderíamos, por exemplo, modificar os parâmetros da aplicação de modo a obter um gráfico do ganho do sistema idêntico ao da figura 9.16

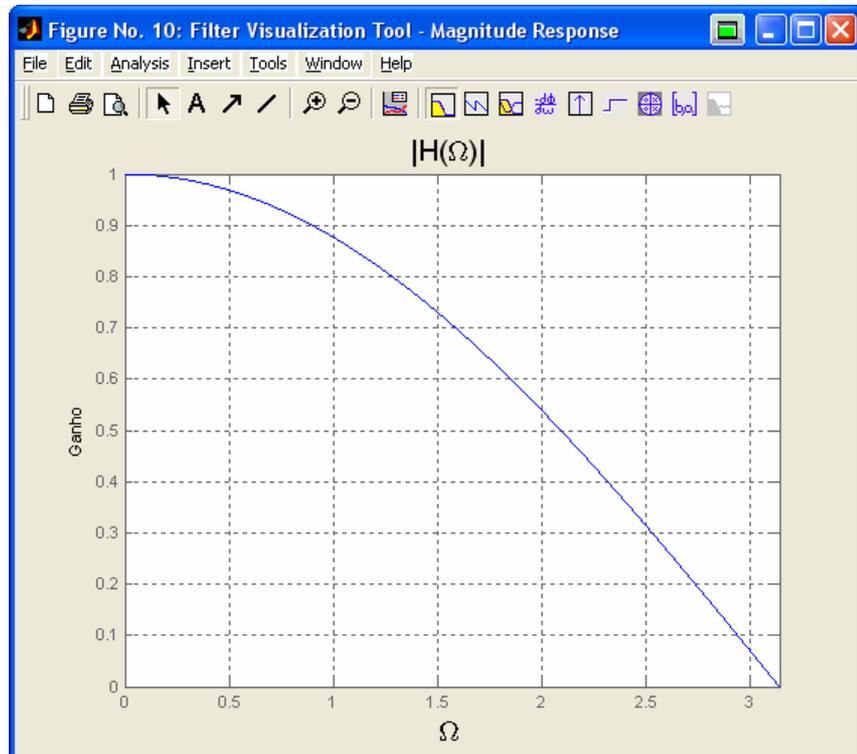


Figura M9.18



Ficha de Avaliação M9

N: Nome: Turma:

Data limite de entrega 02-06-2003

(A ficha deve ser colocada, até à data limite, no recipiente apropriado existente junto ao Gabinete C - CEDET)

Grupo C

Exercício 1

Considere os SLITs discretos caracterizados por

$$1. y[n] = x[n] + x[n-1]$$

$$2. y[n] = \sum_{k=0}^3 (-1)^k x[n-k]$$

$$3. h[n] = 5\delta[n] - \delta[n-1] - 2\delta[n-2] + 3\delta[n-3]$$

Recorra ao *Matlab* para traçar o gráfico da resposta impulsiva, resposta ao escalão, e resposta em frequência do sistema.

Grupo B

Exercício 2

Considere os SLITs discretos caracterizados por

$$1. y[n] = x[n] - 0.5y[n-1]$$

$$2. y[n] = x[n] + x[n-2] + 0.5y[n-1]$$

$$3. h[n] = 0.8^n u[n]$$

Recorra ao *Matlab* para traçar o gráfico da resposta impulsiva, resposta ao escalão, e resposta em frequência do sistema.

Grupo A

Exercício 3

Considere o SLITs discretos caracterizados por

$$1. h[n] = 0.8^n \cos(\pi n/4) u[n]$$

$$2. g[n] = 2\delta[n+2] + \delta[n+1] - \delta[n] - 2\delta[n-1]$$

Recorra ao *Matlab* para traçar o gráfico da resposta impulsiva, resposta ao escalão, e resposta em frequência do sistema.