

AULA 1

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Matriz.
Elemento, linha e coluna de uma matriz.
Matriz linha e matriz coluna. Matriz fila.
Matriz nula.
Matriz rectangular e matriz quadrada.
Matriz quadrada:
Diagonais principal e secundária.
Traço.
Matriz triangular superior e inferior.
Matriz diagonal.
Matriz escalar.
Matriz identidade.

1. Matrizes. Conceitos elementares.

1.1. Matriz.

Sejam m e n dois números naturais, uma **matriz** \mathbf{A} real (ou complexa), $m \times n$ (m por n), é uma tabela de m vezes n números reais (ou complexos) dispostos em m linhas e n colunas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} ; a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ (ou } a_{ij} \in \mathbb{C} \text{)}$$

Exemplos

1. Uma matriz 3×3 , 3 linhas por 3 colunas,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

2. Uma matriz 2×3 , 2 linhas por 3 colunas,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

3. Uma matriz 3×2 , 3 linhas por 2 colunas,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

4. Uma matriz 1×3 , 1 linha por 3 colunas,

$$\mathbf{D} = [5 \quad 1 \quad 3]$$



Criação de uma matriz 3×3

```
>> A=[1 2 3 ; 4 1 2 ; 3 5 1]
```

A =

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{array}$$

1.2. Elemento, linha e coluna de uma matriz.

Dizemos que a_{ij} é o **elemento** (ou entrada) da posição i, j da matriz \mathbf{A} .

A i -ésima **linha** da matriz \mathbf{A} é

$$[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}]$$

A j -ésima **coluna** da matriz \mathbf{A} é

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

Exemplos

5. Sejam as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = [5 \quad 1 \quad 3], \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

São exemplo de alguns elementos das matrizes dadas acima:

$$a_{12} = 2, \quad b_{23} = 7, \quad d_{11} = 5, \quad e_{31} = 3$$



Seleção de um elemento de uma matriz (a_{32}), **A(lin,col)**,

```
>> A(3,2)
```

```
ans = 5
```

Seleção de uma linha de uma matriz (2ª linha), **A(lin, :)**,

```
>> A(2, :)
```

```
ans = 4      1      2
```

Seleção de uma coluna de uma matriz (1ª coluna), **A(:, col)**,

```
>> A(:, 1)
```

```
ans = 1
```

```
4
```

```
3
```

1.3. Matriz linha e matriz coluna. Matriz fila.

Uma matriz que só possui uma linha é chamada **matriz linha** ($1 \times n$), ou vector linha,

$$\mathbf{A} = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}]$$

, e uma matriz que só possui uma coluna é chamada **matriz coluna** ($n \times 1$), ou vector coluna,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

Ambas são designadas por **matriz fila**, usando-se o termo *fila da matriz* para designar quer uma linha quer uma coluna de uma matriz.

Exemplos

6. Sejam as seguintes matrizes:

$$\mathbf{D} = [5 \quad 1 \quad 3], \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

D é uma matriz linha (1×3) e E é uma matriz coluna (3×1).



Criação de uma matriz linha 1×3

```
>> A = [1 2 3]
```

```
A = 1      2      3
```

Criação de uma matriz coluna 3×1

```
>> A = [1 2 3]'
```

```
(ou >> A = [1; 2; 3] )
```

```
A = 1
```

```
2
```

```
3
```

1.4. Matriz nula.

Uma matriz em que todos os elementos são iguais a zero diz-se uma **matriz nula**, $\mathbf{0}_{m,n}$ ou $\mathbf{0}_n$,

$$a_{ij} = 0, \forall i, j$$

Exemplos

7. Uma matriz nula de 2×3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Criação de uma matriz nula (2×4), **zeros(nlin,ncol)**,

```
>> A=zeros(2,4)
```

```
A = 0      0      0      0
```

```
0      0      0      0
```

1.5. Matriz rectangular e matriz quadrada.

Se $m \neq n$ dizemos que \mathbf{A} é uma **matriz rectangular**, e se $m = n$ dizemos que \mathbf{A} é uma **matriz quadrada** (de ordem n).

Exemplos

8. Sejam as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = [5 \ 1 \ 3], \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz \mathbf{A} é uma matriz quadrada (de ordem 3), tal como \mathbf{F} (de ordem 2). As restantes são matrizes rectangulares.



Criação de uma matriz quadrada 3×3

```
>> A=[1 2 3 ; 6 5 4 ; 7 8 9]
```

```
A =
     1     2     3
     6     5     4
     7     8     9
```

1.6. Diagonais principal e secundária.

Dada uma matriz quadrada, \mathbf{A} , de ordem n , a **sequência ordenada** (ou **n-uplo**) dos elementos $a_{ij}, \forall i = j$, $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$, diz-se a **diagonal principal** de \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Os elementos a_{ij} , em que $i + j = n + 1$ constituem a **diagonal secundária**.

Exemplo

O terno ordenado $(1, 3, 6)$ constitui a diagonal principal da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$



Seleção da diagonal principal de uma matriz quadrada, **diag(A)**,

```
>> diag(A)
ans =
     1
     3
     6
```

1.7. Traço.

Dada uma matriz quadrada, \mathbf{A} , de ordem n , designamos por **traço** de \mathbf{A} a soma de todos os elementos da sua diagonal principal

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Exemplos

O traço da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

é $\text{tr}(\mathbf{A}) = 1 + 3 + 6 = 10$.



Cálculo do traço da matriz, **trace(A)**,

```
>> sum(diag(A))
```

```
ans =
     10
```

, ou simplesmente

```
>> trace(A)
```

```
ans =
     10
```

1.8. Matriz triangular superior.

Uma matriz quadrada, \mathbf{A} , de ordem n , diz-se uma **matriz triangular superior** se todos os elementos situados abaixo da diagonal principal são iguais a zero.

$$a_{ij} = 0, \forall i > j$$

Exemplos

A matriz

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

é uma matriz triangular superior.



Seleção da matriz triangular superior, **triu(A)**, de uma matriz já existente

```
>> triu(A)
```

```
ans =
     1     4     2
     0     3     5
     0     0     6
```

1.9. Matriz triangular inferior.

Uma matriz quadrada, \mathbf{A} , de ordem n , diz-se uma **matriz triangular inferior** se todos os elementos situados acima da diagonal principal são iguais a zero.

$$a_{ij} = 0, \forall i < j$$

Exemplos

A matriz

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

é uma matriz triangular inferior.



Seleção da matriz triangular inferior, **tril(A)**, de uma matriz já existente

```
>> tril(A)
ans =
     1     0     0
     2     3     0
     4     1     6
```

1.10. Matriz diagonal.

Uma matriz quadrada, \mathbf{A} , de ordem n , diz-se uma **matriz diagonal** se todos os elementos que estão fora da diagonal principal são iguais a zero.

$$a_{ij} = 0, \forall i \neq j$$

Exemplos

A matriz

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonal.



Criação de uma matriz diagonal

```
>> D=diag([ 1 2 3])
D =
     1     0     0
     0     2     0
     0     0     3
```

1.11. Matriz escalar.

Uma matriz quadrada, \mathbf{A} , de ordem n , diz-se uma **matriz escalar** se for diagonal e todos os elementos da diagonal principal forem iguais a uma constante k ,

$$(a_{ij} = 0, \forall i \neq j) \wedge (a_{ij} = k, \forall i = j)$$

Exemplos

A matriz

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

é uma matriz escalar.



Criação de uma matriz escalar, 3×3 ,

```
>> K=3*eye(3)
```

K =

```

3      0      0
0      3      0
0      0      3
```

1.12. Matriz identidade.

Uma matriz quadrada, \mathbf{A} , de ordem n , diz-se a **matriz identidade** de ordem n , se for uma matriz escalar com elemento diagonal igual a 1.

$$(a_{ij} = 0, \forall i \neq j) \wedge (a_{ij} = 1, \forall i = j)$$

Exemplos

A matriz

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz identidade de ordem 3, \mathbf{I}_3 .



Criação da matriz identidade, 3×3 , **eye (n)**,

```
>> I=eye(3)
```

I =

```

1      0      0
0      1      0
0      0      1
```

Exercícios.

1.1. Especifique para a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Os elementos a_{22} , a_{32} e a_{13} :

$$a_{22} = 3 \qquad a_{32} = 4 \qquad a_{13} = 6$$

2. A segunda linha da matriz:

$$a_{2j} = [5 \quad 3 \quad 7]$$

3. A terceira coluna da matriz:

$$a_{i3} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4. A diagonal (principal) da matriz \mathbf{A} :

$$\text{diag}(\mathbf{A}) = (1, 3, 2)$$

5. O traço da matriz \mathbf{A} :

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = 6$$

1.2. Classifique cada uma das seguintes matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ j \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = [2 \quad 0 \quad 3]$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz	A	B	C	D	E	F	G
Linha	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Coluna	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Fila	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Nula	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Rectangular	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quadrada	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Tri. Superior	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Tri. Inferior	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Diagonal	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Identidade	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Escalar	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>