

AULA 11

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Estruturas algébricas.

Espaço vectorial.

Combinação linear.

Independência linear.

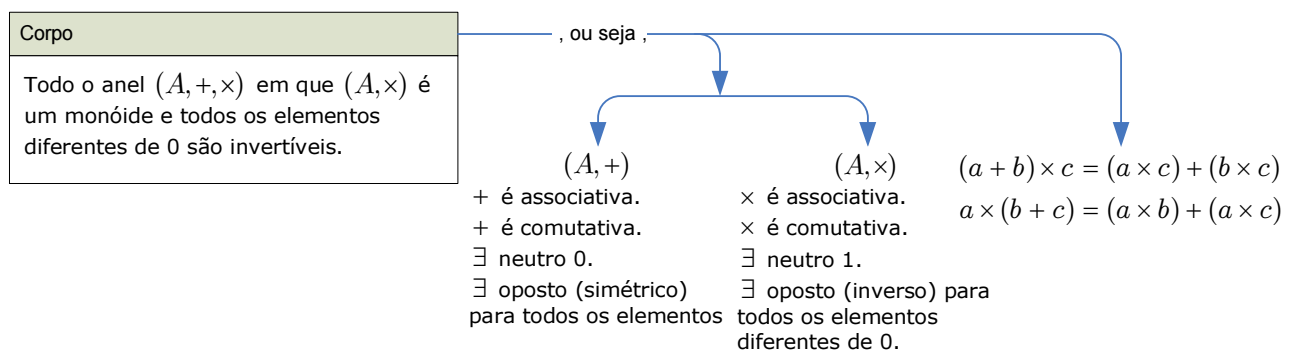
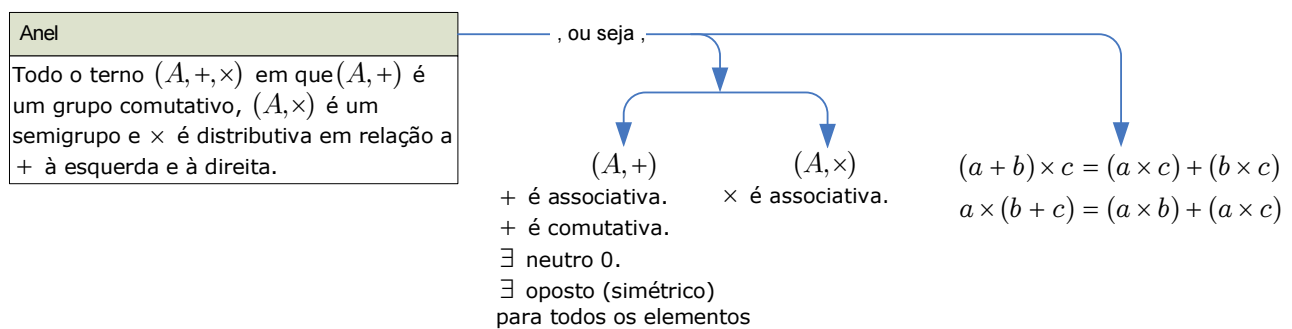
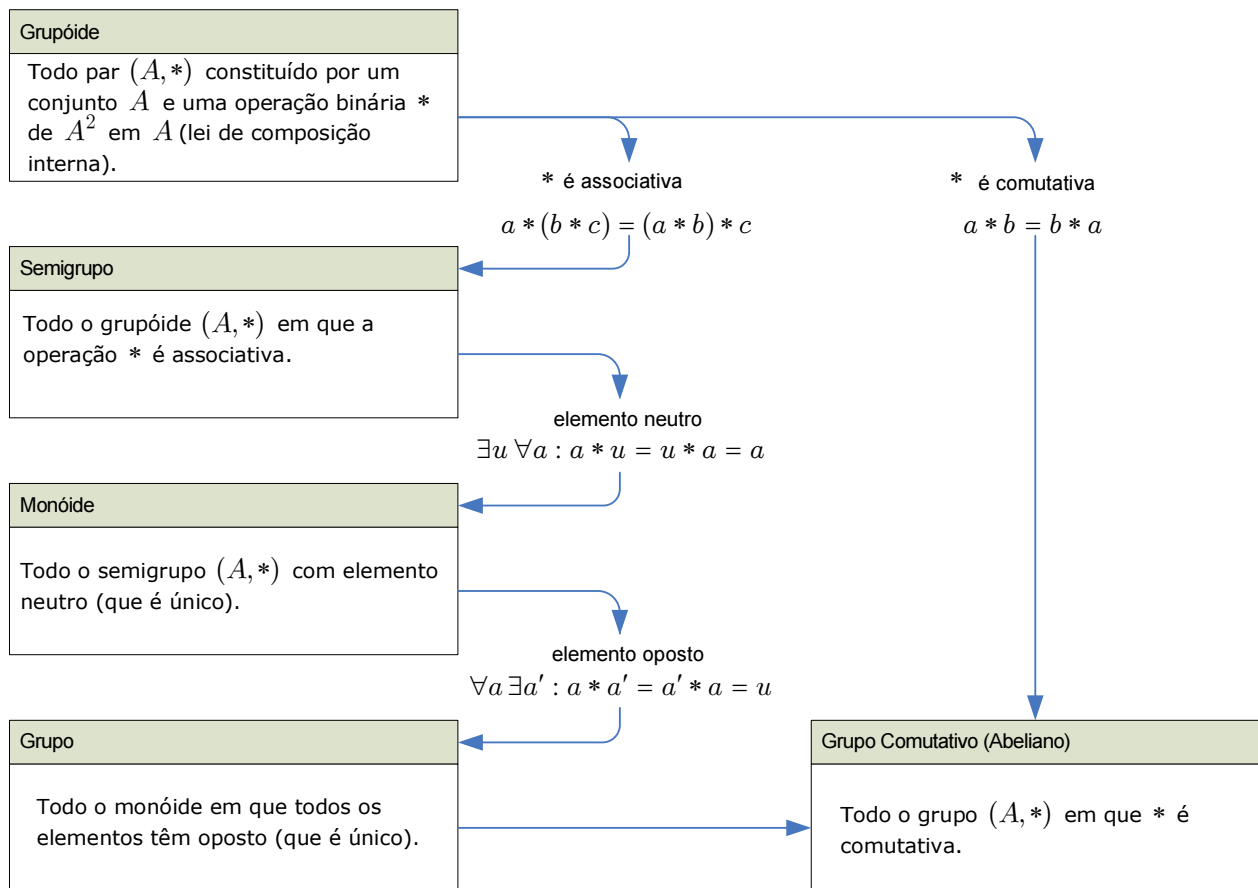
11. Espaços Vectoriais.

11.1. Estruturas Algébricas.

Na generalidade, uma estrutura algébrica é constituída por um ou mais conjuntos (suportes da estrutura), munidos de uma ou mais operações (leis de composição interna ou externa, operações unárias, etc.) envolvendo elementos daquele(s) conjuntos e satisfazendo certas propriedades formais.

Caso não exista ambiguidade, pode identificar-se um dos conjuntos suporte com a estrutura algébrica. Por exemplo, o corpo $(\mathbb{R}, +, \times)$ refere-se, geralmente, apenas como o corpo $\mathbb{R}$ (o corpo dos reais).

Algumas estruturas algébricas envolvem mais de um conjunto. Por exemplo, um espaço vectorial tem inerentes dois conjuntos: um conjunto de vectores e outro de escalares (um corpo), uma lei de composição interna (adição vectorial) e outra externa (multiplicação de escalar por vector).



11.2. Espaço Vectorial.

Seja $\mathbb{E}$ um conjunto de elementos $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots, \mathbf{w}$, chamados **vectores**, e $\mathbb{K}$ um corpo, de elementos $\alpha, \beta, \dots, \gamma$, chamados **escalares**. Diz-se que $\mathbb{E}$ é um **espaço vectorial** (ou **espaço linear**) sobre o corpo $\mathbb{K}$ sse:

- a. estiver definida em $\mathbb{E}$ a operação *adição vectorial*, $+$, que a $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$ e a $\mathbf{v} \in \mathbb{E}$ associa o elemento $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{E}$, tal que $(\mathbb{E}, +)$ é um grupo comutativo, ou seja, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{E}$:

$$\text{a1. } \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad (+ \text{ é associativa})$$

$$\text{a2. } (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \quad (+ \text{ é comutativa})$$

$$\text{a3. } \exists_1 \mathbf{0} \in \mathbb{E} : (\mathbf{u} + \mathbf{0}) = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} \quad (\text{elemento neutro de } +, \text{ designado por zero})$$

$$\text{a4. } \forall \mathbf{u} \exists_1 -\mathbf{u} \in \mathbb{E} : \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (\text{elemento oposto de } \mathbf{u} \text{ para a operação } +, \text{ designado por simétrico de } \mathbf{u})$$

- m. estiver definida a operação *multiplicação de escalar por vector*, $\times$, que a $\alpha \in \mathbb{K}$ e a $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$ associa o elemento $\alpha \times \mathbf{u} \in \mathbb{E}$ (ou, simplesmente $\alpha \mathbf{u}$), que verifica:

$$\text{m1. } \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{u} + \alpha \mathbf{v} \quad (\times \text{ é distributiva em relação à adição dos elementos de } \mathbb{E})$$

$$\text{m2. } (\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{u} \quad (\times \text{ é distributiva em relação à adição de elementos de } \mathbb{K})$$

$$\text{m3. } \alpha(\beta \mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u} \quad (\text{associatividade mista})$$

$$\text{m4. } 1 \mathbf{u} = \mathbf{u} \quad (\text{elemento neutro de } \times \text{ à esquerda})$$

A operação binária $+$ de $\mathbb{E}^2$ em $\mathbb{E}$ designa-se por **adição vectorial**, e a operação binária $\times$ de $\mathbb{E} \times \mathbb{K}$ em $\mathbb{E}$ designa-se por **multiplicação de escalar por vector**.

Saliente-se que um espaço vectorial é fechado relativamente à adição vectorial.

Quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ diz-se que $\mathbb{E}$ é um espaço vectorial real, e quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ diz-se que $\mathbb{E}$ é um espaço vectorial complexo.

Exemplos

1. São exemplos de espaços vectoriais (ou seja, pode demonstrar-se que verificam as 8 propriedades acima enunciadas) os seguintes conjuntos, com a definição habitual de adição entre os seus elementos, e de multiplicação dos seus elementos por um escalar do corpo $\mathbb{K}$ indicado:

- O conjunto $\mathbb{R}^n$, como temos vindo a considerar até aqui, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
- O conjunto dos segmento orientados, que apropriadamente designámos por vectores, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
- O conjunto $\mathbb{C}^n$, com $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (e também com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
- O conjunto das funções reais (ou complexas) de variável real num intervalo $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, com as definições habituais de adição de funções e de multiplicação de uma função por uma constante $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\alpha \in \mathbb{C}$): $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). O vector nulo é a função f_0 tal que $f_0(x) = 0, \forall x \in \mathbb{I}$.

É importante pensar em cada uma das funções como um vector, ou seja, simplesmente como um elemento do espaço vectorial. Para apenas duas funções podemos fazer a analogia com os segmentos orientados em $\mathbb{R}^2$.

Sendo um espaço vectorial constituído por funções, é designado por **espaço de funções**, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{I})$. Tem especial interesse, como verá nas cadeiras da especialidade, o **espaço de sinais** que é, exactamente, um espaço de funções que contém informação sobre um determinado fenómeno físico relevante para as aplicações

11.3. Combinação Linear.

Seja $\mathbb{E}$ um espaço vectorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Diz-se que um vector $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$ é **combinação linear** dos vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{E}$, se existirem escalares $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{K}$, designados por **coeficientes da combinação linear**, tais que

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= k_1 \mathbf{u}_1 + k_2 \mathbf{u}_2 + \dots + k_n \mathbf{u}_n \\ &= \sum_{i=1}^n k_i \mathbf{u}_i\end{aligned}$$

Exemplos

2. O vector de $\mathbb{R}^4$, $\mathbf{u} = (1, -2, -3, 4)$ é combinação linear dos vectores $\mathbf{u}_1 = (2, 0, -1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 0, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 0, -1, 2)$ e $\mathbf{u}_4 = (2, 0, 0, -1)$, dado que existem escalares, $k_1 = 2, k_2 = -1, k_3 = 1, k_4 = -2$, tais que

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^4 k_i \mathbf{u}_i$$

Com efeito

$$\begin{aligned}k_1 \mathbf{u}_1 + k_2 \mathbf{u}_2 + k_3 \mathbf{u}_3 + k_4 \mathbf{u}_4 &= 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 - 2\mathbf{u}_4 \\ &= 2 \times (2, 0, -1, 0) - (-1, 2, 0, 0) + (0, 0, -1, 2) - 2(2, 0, 0, -1) \\ &= (4, 0, -2, 0) + (1, -2, 0, 0) + (0, 0, -1, 2) + (-4, 0, 0, 2) \\ &= (1, -2, -3, 4) \\ &= \mathbf{u}\end{aligned}$$

3. A função real de variável real $f(x) = x + 2x^3$ pode ser descrita como combinação linear das funções (vectores) $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$, e $f_4(x) = x^3$:

$$f(x) = 0f_1(x) + 1f_2(x) + 0f_3(x) + 2f_4(x)$$

ou, simplesmente,

$$f(x) = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 2]$$

4. A função $f(x) = e^{jx}$, com $x \in \mathbb{R}$, é uma função complexa de variável real designada por **exponencial complexa**. A **fórmula de Euler** estabelece a relação entre a função exponencial complexa e as funções trigonométricas seno e co-seno :

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$$

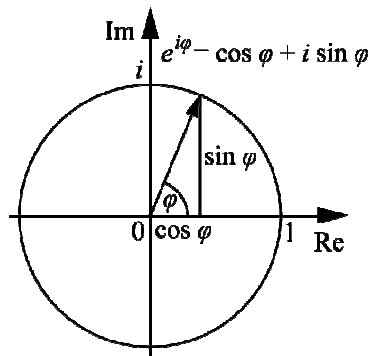


Figura 11.1

Nas expressões acima e é a base do logaritmo natural ($e \approx 2.7183$) e assume-se que x é expresso em radianos e não em graus.

A função $\cos(\omega_0 t)$ pode ser expressa como combinação linear das funções $e^{j\omega_0 t}$ e $e^{-j\omega_0 t}$

$$\cos(\omega_0 t) = 0.5e^{j\omega_0 t} + 0.5e^{-j\omega_0 t}$$

A função $\cos(\omega_0 t)$ pode ser interpretada como um vector pertencente ao subespaço das funções contínuas (complexas de variável real) gerado pelos vectores $e^{j\omega_0 t}$ e $e^{-j\omega_0 t}$, e, nesse subespaço, pode ser descrito apenas pelas suas coordenadas

$$\cos(\omega_0 t) = [0.5 \quad 0.5]$$

Também a função $\sin(\omega_0 t)$ pode ser expressa como combinação linear das funções $e^{j\omega_0 t}$ e $e^{-j\omega_0 t}$

$$\begin{aligned} \sin(\omega_0 t) &= -0.5j e^{j\omega_0 t} + 0.5j e^{-j\omega_0 t} \\ &= [-0.5j \quad 0.5j] \end{aligned}$$

Note que, agora, o espaço vectorial é necessariamente definido sobre o corpo dos complexos e não sobre o corpo dos reais, uma vez que os escalares da combinação linear obtida são complexos.

11.4. Independência linear.

O conjunto de vectores $\mathbb{V} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset \mathbb{E}$, diz-se **linearmente independente** sse a equação

$$k_1 \mathbf{u}_1 + k_2 \mathbf{u}_2 + \dots + k_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

só possui a solução trivial

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$$

Ou, o que é equivalente, nenhum dos vectores pode ser expresso como combinação linear dos restantes.

Caso contrário, isto é, se a equação possui uma solução não trivial, dizemos que os vectores de $\mathbb{V}$ são **linearmente dependentes**. Equivalentemente, $\mathbb{V}$ é linearmente dependente sse um dos seus elementos é combinação linear dos restantes.

Exemplos

5. O conjunto de vectores $\mathbb{V} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$, com $\mathbf{u}_1 = (2, 0, -1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 0, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 0, -1, 2)$ e $\mathbf{u}_4 = (2, 0, 0, -1)$, é linearmente independente dado que

$$\begin{aligned}
 & k_1 \mathbf{u}_1 + k_2 \mathbf{u}_2 + k_3 \mathbf{u}_3 + k_4 \mathbf{u}_4 = \mathbf{0} \\
 & \Rightarrow k_1(2, 0, -1, 0) + k_2(-1, 2, 0, 0) + k_3(0, 0, -1, 2) + k_4(2, 0, 0, -1) = 0 \\
 & \Rightarrow (2k_1, 0, -k_1, 0) + (-k_2, 2k_2, 0, 0) + (0, 0, -k_3, 2k_3) + (2k_4, 0, 0, -k_4) = 0 \\
 & \Rightarrow (2k_1 - k_2 + 2k_4, 2k_2, -k_1 - k_3, 2k_3 - k_4) = 0 \\
 & \Rightarrow \begin{cases} 2k_1 - k_2 + 2k_4 = 0 \\ 2k_2 = 0 \\ -k_1 - k_3 = 0 \\ 2k_3 - k_4 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema podemos verificar que só existe a solução trivial $k_1 = 0 \wedge k_2 = 0 \wedge k_3 = 0 \wedge k_4 = 0$.

6. O conjunto de vectores $\mathbb{V} = \{3x^2, 1 - x + 2x^2, 2 - 2x + x^2\} \subset \mathcal{P}_2$ é linearmente dependente, dado que

$$3x^2 = 2(1 - x + 2x^2) - (2 - 2x + x^2)$$

7. O conjunto de vectores $\mathbb{V} = \{\sin^2(x), \cos^2(x), \cos(2x)\}$ é linearmente dependente, dado que

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

8. O conjunto de vectores $\mathbb{P} = \{1, x, x^2, x^3\}$ é linearmente independente. Nenhum dos seus vectores pode exprimir-se como combinação linear dos outros.

9. O conjunto de vectores $\mathbb{P} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$ é linearmente independente, uma vez que

$$k_1(1 + x) + k_2(x + x^2) + k_3(1 + x^2) = 0$$

implica que

$$\begin{aligned}
 k_1 + k_1x + k_2x + k_2x^2 + k_3 + k_3x^2 &= 0 \\
 (k_1 + k_3) + (k_1 + k_2)x + (k_2 + k_3)x^2 &= 0
 \end{aligned}$$

, ou seja

$$\begin{aligned}
 k_1 + k_3 &= 0 \\
 k_1 + k_2 &= 0 \\
 k_2 + k_3 &= 0
 \end{aligned}$$

, e ainda, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

, pelo que, sendo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

, o sistema só possui a solução trivial, $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, pelo que os vectores $1 + x$, $x + x^2$, e $1 + x^2$, são linearmente independentes.

11.5. Wronskiano.

Não existe nenhum método geral para demonstrar que um conjunto de n vectores de um espaço de funções é linearmente independente. No caso dos n vectores pertencerem a $\mathcal{C}^{n-1}$ (o conjunto das funções $n-1$ vezes continuamente diferenciáveis), a independência linear pode ser demonstrada verificando que o determinante

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

, designado por **Wronskiano** dos n vectores, é não nulo pelo menos para um valor de $x \in \mathbb{R}$.

Exemplos

10. Para o conjunto de vectores $\mathbb{V} = \{\sin(x), \cos(x), 1\}$ temos

$$\begin{aligned} W(x) &= \det \begin{bmatrix} \sin(x) & \cos(x) & 1 \\ \cos(x) & -\sin(x) & 0 \\ -\sin(x) & -\cos(2x) & 0 \end{bmatrix} \\ &= 1(-\cos^2(x) - \sin^2(x)) \\ &= -1 \end{aligned}$$

O determinante nunca é nulo (bastaria que fosse não nulo para apenas um valor de x) pelo que $\mathbb{V}$ é linearmente independente.

11. Para o conjunto de vectores $\mathbb{P} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$, temos

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1+x & x+x^2 & 1+x^2 \\ 1 & 1+2x & 2x \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= (1+x)(2+4x-4x) - (2x+2x^2-2-2x^2) \\ &= 2+2x-2x+2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

O determinante nunca é nulo (bastaria que não fosse nulo para apenas um valor de x), pelo que os vectores são linearmente independentes.