

# AULA 13

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

## TÓPICOS

Exercícios.

## 13. Exercícios.

### VERIFICAR SE UM VECTOR É UMA COMBINAÇÃO LINEAR DE UM CONJUNTO DE VECTORES.

**13.1.** Dado o vector  $\mathbf{u} = (3, -3, 4, -4)$  e os vectores  $\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0, -2)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (0, 2, 0, 1)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (-1, 0, 2, 0)$  e  $\mathbf{u}_4 = (2, 0, 1, 0)$ , podemos verificar que, se  $\mathbf{u}$  é uma combinação linear dos vectores  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$ ,  $\mathbf{u}_3$  e  $\mathbf{u}_4$ , então

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 + k_4\mathbf{u}_4 \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & | & \mathbf{u}_2 & | & \mathbf{u}_3 & | & \mathbf{u}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema



```
>> u=[3 -3 4 -4]';
>> u1=[0 1 0 -2]';
>> u2=[0 2 0 1]';
>> u3=[-1 0 2 0]';
>> u4=[2 0 1 0]';
>> A=[u1 u2 u3 u4];
>> B=[3 -3 4 -4]';
>> rref([A B])
```

ans =

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

O sistema é possível e determinado, tendo como solução  $[k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]^T = [1 \ -2 \ 1 \ 2]^T$ . Ou seja,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4$$

**13.2.** Mostrar que o vector  $\mathbf{u} = (7, 2, -1, -4)$  é uma combinação linear dos vectores  $\mathbf{u}_1 = (2, 0, -1, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 0, 0)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (0, 0, -1, 2)$  e  $\mathbf{u}_4 = (2, 0, 0, -1)$ .

Se  $\mathbf{u}$  é uma combinação linear dos vectores  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$ ,  $\mathbf{u}_3$  e  $\mathbf{u}_4$ , então

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 + k_4\mathbf{u}_4$$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}$$

é um sistema de equações possível. Resolvendo o sistema



```
>> A=[2 0 -1 0;-1 2 0 0;0 0 -1 2;2 0 0 -1]';
>> B=[7 2 -1 -4]';
>> rref([A B])
```

ans =

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

O sistema é possível e determinado, tendo como solução  $[k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]^T = [2 \ 1 \ -1 \ 2]^T$ . Ou seja

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4$$

**13.3.** Mostrar que o vector  $\mathbf{u} = (2, 4, 1)$  não é uma combinação linear dos vectores  $\mathbf{u}_1 = (1, 2, -1)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (0, 1, -1)$ , e  $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 1)$ .

Se  $\mathbf{u}$  é uma combinação linear dos vectores  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$ ,  $\mathbf{u}_3$  e  $\mathbf{u}_4$ , então

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

é um sistema de equações possível. Resolvendo o sistema



```
>> A=[1 0 1;2 1 0;-1 -1 1];
```

```
>> B=[2 4 1]';
```

```
>> rref([A B])
```

```
ans =
```

```
    1    0    1    0
    0    1   -2    0
    0    0    0    1
```

concluimos que o sistema é impossível, logo  $\mathbf{u}$  não é uma combinação linear dos vectores  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$ , e  $\mathbf{u}_3$ .

### VERIFICAR SE UM CONJUNTO DE VECTORES É LINEARMENTE INDEPENDENTE.

**13.4.** Mostrar que os vectores  $\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0, -2)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (0, 2, 0, 1)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (-1, 0, 2, 0)$  e  $\mathbf{u}_4 = (2, 0, 1, 0)$  são linearmente independentes, ou seja, a equação  $k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 + k_4\mathbf{u}_4 = \mathbf{0}$  só possui a solução trivial.

Recorrendo à notação matricial

$$k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \dots + k_r\mathbf{u}_r = \mathbf{0}$$

$$\left[ \mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{u}_3 \mid \mathbf{u}_4 \right] \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

, concluimos que verificar que a equação  $k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 + k_4\mathbf{u}_4 = \mathbf{0}$  só possui a solução trivial é equivalente a verificar que o sistema homogéneo  $\mathbf{U}\mathbf{k} = \mathbf{0}$  só admite solução trivial. Recorrendo ao método de Gauss-Jordan podemos concluir que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e portanto os vectores são linearmente independentes.



```
>> A=[0 0 -1 2;1 2 0 0;0 0 2 1;-2 1 0 0]';
```

```
>> B=[0 0 0 0]';
```

```
>> rref([A B])
```

```
ans =
```

```
    1    0    0    0    0
    0    1    0    0    0
    0    0    1    0    0
    0    0    0    1    0
```

**13.5.** Mostrar que o conjunto de vectores  $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ , com  $\mathbf{u}_1 = (2, 0, -1, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 0, 0)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (0, 0, -1, 2)$  e  $\mathbf{u}_4 = (2, 0, 0, -1)$ , é linearmente independente.

Os vectores são linearmente independentes se a equação  $k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 + k_4\mathbf{u}_4 = \mathbf{0}$  só possui a solução trivial  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = \mathbf{0}$ . Assim

$$k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 + k_4\mathbf{u}_4 = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



```
>> A=[2 0 -1 0;-1 2 0 0;0 0 -1 2;2 0 0 -1]';
>> B=[0 0 0 0]';
>> rref([A B])
```

```
ans =
     1     0     0     0     0
     0     1     0     0     0
     0     0     1     0     0
     0     0     0     1     0
```

O sistema é possível e determinado, admitindo apenas a solução trivial  $[k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , logo os vectores são linearmente independentes.

**13.6.** Mostrar que o conjunto de vectores  $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ , com  $\mathbf{u}_1 = (1, 2, -1)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (0, 1, -1)$ , e  $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 1)$ , não é linearmente independente.

Os vectores são linearmente independentes se a equação  $k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$  só possui a solução trivial  $k_1 = k_2 = k_3 = \mathbf{0}$ . Assim

$$k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



```
>> A=[1 0 1;2 1 0;-1 -1 1];
>> B=[0 0 0]';
>> rref([A B])
```

```
ans =
     1     0     1     0
     0     1    -2     0
     0     0     0     0
```

O sistema é possível **mas é indeterminado** (admitindo um número infinito de soluções para além da solução trivial) **logo os vectores não são linearmente independentes**.

---

**DETERMINAR O SUBESPAÇO GERADO POR UM CONJUNTO DE VECTORES.**

---

**13.7.** Determinar o subespaço de  $\mathbb{R}^3$  gerado pelo conjunto de vectores  $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ , com  $\mathbf{u}_1 = (1, 2, -1)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (0, 1, -1)$ , e  $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 1)$ .

$\mathbb{W}$  é o subespaço gerado por  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ ,  $\mathbb{W} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ , se qualquer vector de  $\mathbb{W}$ ,  $\mathbf{u}$ , é uma combinação linear de  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, recorrendo ao método de Gauss-Jordan, resulta

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 2 & 1 & 0 & x_2 \\ -1 & -1 & 1 & x_3 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -2 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & -1 & 2 & x_3 + x_1 \end{bmatrix} && \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 + 1L_1 \rightarrow L_3 \end{array} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -2 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_1 + x_2 \end{bmatrix} && L_3 + 1L_2 \rightarrow L_3 \end{aligned}$$

Não é necessário continuar o processo de escalonamento da matriz. Neste momento é já possível concluir que, para que o sistema seja possível (ou seja, qualquer vector de  $\mathbb{W}$  seja uma combinação linear de  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ ), deverá ser

$$x_3 - x_1 + x_2 = 0$$

Recordando os conceitos apresentados sobre o estudo da natureza de sistemas lineares, concluímos que o sistema é possível e indeterminado, sendo  $x_1$  e  $x_2$  variáveis principais e  $x_3$  uma variável livre, sendo

$$x_1 - x_2 = x_3$$

Assim, o subespaço gerado por  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  é constituído por todos os vectores  $\mathbf{u} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  tais que  $x_1 - x_2 = x_3$

$$\mathbb{W} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1 - x_2 \right\}$$

O subespaço corresponde a um plano em  $\mathbb{R}^3$ .

**13.8.** Determinar o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  gerado pelo conjunto de vectores  $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ , com  $\mathbf{u}_1 = (2, 0, -1, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 0, 0)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (0, 0, -1, 2)$  e  $\mathbf{u}_4 = (2, 0, 0, -1)$ .

$\mathbb{W}$  é o subespaço gerado por  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ ,  $\mathbb{W} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ , se qualquer vector de  $\mathbb{W}$ ,  $\mathbf{u}$ , é uma combinação linear de  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 + k_4\mathbf{u}_4$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema,



```
>> syms x1 x2 x3 x4
>> A=[2 0 -1 0;-1 2 0 0;0 0 -1 2;2 0 0 -1]';
>> B=[x1 x2 x3 x4].';
>> rref([A B])
ans =
[ 1,  0,  0,  0, -1/2*x1-1/4*x2-x4-2*x3]
[ 0,  1,  0,  0, 1/2*x2]
[ 0,  0,  1,  0, x3+1/2*x1+1/4*x2+x4]
[ 0,  0,  0,  1, x4+2*x3+x1+1/2*x2]
```

, concluímos que o sistema é possível e determinado para qualquer valor de  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$ . Assim, o subespaço gerado por  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$  é constituído por todos os vectores  $\mathbf{u} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$  sem restrições, ou seja, é coincidente com  $\mathbb{R}^4$

$$\mathbb{W} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) = \mathbb{R}^4$$