

AULA 15

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Vectorios livres
Ângulo de dois vectorios. Vectorios ortogonais.
Vectorios em \mathbb{R}^n
Produto interno.
Norma.
Desigualdade de Cauchy-Schwarz.
Desigualdade triangular.
Ângulo. Distância.
Vectorios ortogonais. Teorema de Pitágoras.

15. Produto interno em \mathbb{R}^n .

15.1. Vectorios livres.

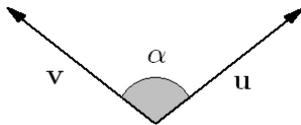


Figura 15.1

Recorde do Ensino Secundário que chamamos **ângulo de dois vectorios** não nulos, α , ao menor ângulo formado por dois segmentos orientados, com a mesma origem, que representem os vectorios, $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Quando o ângulo entre os dois vectorios é recto, $\alpha = \pi/2$, dizemos que os dois vectorios são **vectorios ortogonais** (ou vectorios perpendiculares entre si).

O **produto interno** (ou produto escalar) de dois vectorios não nulos, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, é um número real dado por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\alpha)$$

em que α é o ângulo entre os dois vectorios e $\|\mathbf{u}\|$ e $\|\mathbf{v}\|$ os comprimentos de \mathbf{u} e \mathbf{v} .

O ângulo de dois vectorios não nulos pode ser calculado a partir do produto interno

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}\right)$$

Resulta da definição de produto interno entre vectorios que:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \text{ e } \mathbf{v} \text{ são ortogonais.}$$

(Dois vectorios não nulos são ortogonais sse $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0 \Leftrightarrow 0 \leq \alpha < \pi/2$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0 \Leftrightarrow \pi/2 < \alpha \leq \pi$$

15.2. Produto interno.

Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dois vectores em \mathbb{R}^n , definimos o **produto interno** canónico (ou usual) entre os dois vectores como a soma do produto ordenado das coordenadas desses vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n \\ &= \sum_{i=1}^n u_iv_i \end{aligned}$$

Propriedades do produto interno

Se \mathbf{u} , \mathbf{v} , e \mathbf{w} são vectores de \mathbb{R}^n , e α é um escalar real, então;

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
3. $\alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\alpha\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\alpha\mathbf{v})$
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ sse $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

Para vectores coluna a **notação matricial do produto interno** resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{u}^T \mathbf{v} \\ &= [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n \end{aligned}$$

, e para vectores linha

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{u}\mathbf{v}^T \\ &= [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n \end{aligned}$$

Exemplos

1. O produto interno dos vectores $\mathbf{u} = 3\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ é

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 \\ &= (3 \times 2) + (0 \times 2) \\ &= 6 \end{aligned}$$

O produto interno entre eles é positivo, logo, o ângulo entre os vectores é $0 \leq \alpha < \pi/2$.

Obteríamos o mesmo resultado tendo em atenção, por inspeção da figura que, $\alpha = \pi/4$,

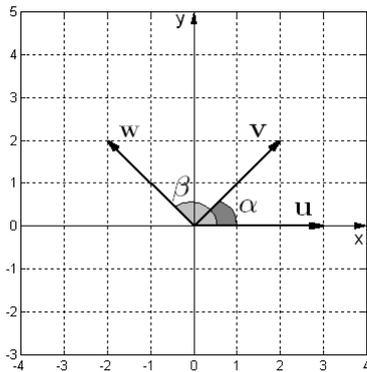


Figura 15.2

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\alpha) \\ &= 3 \times \sqrt{2^2 + 2^2} \cos(\pi/4) \\ &= 3\sqrt{8} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

O produto interno entre os vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{w} = -2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ é

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= v_1w_1 + v_2w_2 \\ &= (2 \times (-2)) + (2 \times 2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

De outro modo, por observação da figura, os vectores \mathbf{v} e \mathbf{w} formam entre si um ângulo $\beta = \pi/2$, ou seja, são ortogonais. Assim sendo $\cos(\beta) = 0$, pelo que o produto interno entre eles é nulo.



Utilizando a notação vector coluna, temos

```
>> u=[3 0]';
>> v=[2 2]';
>> u'*v
ans =
     6
>> w=[-2 2]';
>> v'*w
ans =
     0
```

2. O produto interno entre os vectores $\mathbf{u}_1 = (2, 0, -1, 0)$ e $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 0, 0)$ é:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4 \\ &= (2 \times -1) + (0 \times 2) + (-1 \times 0) + (0 \times 0) \\ &= -2 \end{aligned}$$

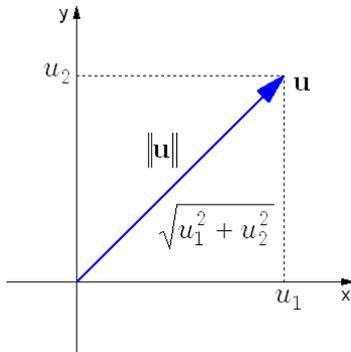


```
>> u1=[2 0 -1 0]';
>> u2=[-1 2 0 0]';
>> u1'*u2
ans =
    -2
```

15.3. Norma. Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Desigualdade triangular.

Define-se a **norma** euclidiana do vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, como

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$$



Sendo \mathbf{u} e \mathbf{v} vectores de \mathbb{R}^n e α um escalar real, demonstra-se que a norma verifica as **propriedades**:

1. $\|\mathbf{u}\| \geq 0$ e $\|\mathbf{u}\| = 0$ sse $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

2. $\|\alpha\mathbf{u}\| = |\alpha|\|\mathbf{u}\|$

3. $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$

(desigualdade de Cauchy-Schwarz)

4. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

(desigualdade triangular)

Exemplos

3. A **norma** do vector \mathbf{u} , com base nas suas coordenadas, é dada, em \mathbb{R}^2 , por

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

, e em \mathbb{R}^3 por

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

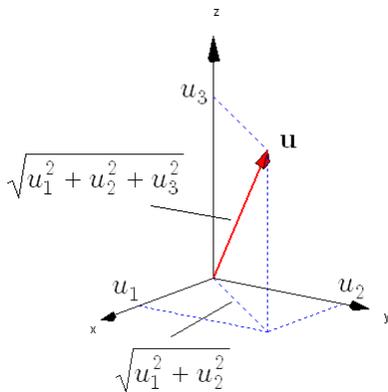


Figura 15.3

4. O vector $\mathbf{u} = 6\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ tem norma

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$$

, ou seja, tem comprimento igual a $\sqrt{45}$

, e tem versor

$$\mathbf{e}_u = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{6\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2}{\sqrt{45}} = \frac{6}{\sqrt{45}}\mathbf{e}_1 + \frac{3}{\sqrt{45}}\mathbf{e}_2$$

\mathbf{u} pode exprimir-se apenas em função do versor \mathbf{e}_u como se segue

$$\mathbf{u} = 6\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 = \sqrt{45}\mathbf{e}_u$$

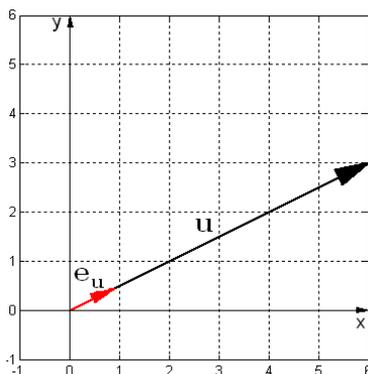


Figura 15.4



Utilizando a notação vector coluna, temos

```
>> u = [6 3]'
```

```
u =
```

```
6
```

```
3
```

Sendo a norma do vector

```
>> nu=sqrt(u'*u)
nu =
    6.7082
```

, ou simplesmente, utilizando a função **norm(u)**,

```
>> nu=norm(u)
nu =
    6.7082
```

, ou seja, $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{45}$. O seu versor é:

```
>> eu=u/nu
eu =
    0.8944
    0.4472
```

, ou seja, $\mathbf{e}_u = \frac{6}{\sqrt{45}} \mathbf{e}_1 + \frac{3}{\sqrt{45}} \mathbf{e}_2$. Podemos verificar que \mathbf{e}_u tem norma unitária

```
>> norm(eu)
ans =
    1.0000
```

5. O vector $\mathbf{u} = (1, -2, -3, 4)$ tem norma

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| &= \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2} \\ &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{30} \approx 5.48 \end{aligned}$$



```
>> u=[1 -2 -3 4]';
>> norm(u)
ans =
    5.4772
```

15.4. Ângulo.

Sejam \mathbf{u} e \mathbf{v} vetores não nulos de \mathbb{R}^n , o ângulo entre eles é

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right)$$

Exemplos

6. Desconhecendo o ângulo entre dois vetores, podemos calculá-lo com base no produto interno e na norma dos vetores. Retomemos os vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} do exemplo 1. Temos:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right) = \arccos\left(\frac{6}{3\sqrt{8}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \approx 0.79$$

Aliás, tendo em atenção que a norma de um vector pode ser calculada com base no produto interno,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$$

, podemos reconhecer que o ângulo entre dois vetores pode ser calculado com base em produtos internos

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right) = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}}\right)$$



```
>> nu=norm(u);
>> nv=norm(v);
>> alfa=acos((u'*v)/(nu*nv))
alfa =
    0.7854
```

7. O ângulo entre os vetores $\mathbf{u}_1 = (2, 0, -1, 0)$ e $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 0, 0)$ é

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos\left(\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_1\|\|\mathbf{u}_2\|}\right) = \arccos\left(\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{\sqrt{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2)}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{((2, 0, -1, 0) \cdot (2, 0, -1, 0))((-1, 2, 0, 0) \cdot (-1, 2, 0, 0))}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{(4 + 0 + 1 + 0)(1 + 4 + 0 + 0)}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{5 \times 5}}\right) = \arccos\left(\frac{-2}{5}\right) = \arccos(-0.4) \\ &\approx 1.98 \end{aligned}$$



```
>> u1=[2 0 -1 0]';
>> u2=[-1 2 0 0]';
>> alfa=acos((u1'*u2)/sqrt((u1'*u1)*(u2'*u2)))
alfa =
    1.9823
```

15.5. Distância. Propriedades. Espaço euclidiano.

A distância euclidiana entre dois pontos, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, também dita a distância entre os dois vectores cujas extremidades correspondem a estes dois pontos, é igual à norma do vector por eles definido:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Sendo \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} pontos de \mathbb{R}^n , demonstram-se as propriedades:

1. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ ($d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ sse $\mathbf{x} = \mathbf{y}$)
2. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$
3. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ (desigualdade triangular)

O espaço vectorial \mathbb{R}^n com o produto interno atrás definido é designado por **espaço euclidiano**, ou espaço com métrica euclidiana.

Exemplo

8. A distância entre os vectores $\mathbf{u}_1 = (2, 0, -1, 0)$ e $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 0, 0)$ é

$$d(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|$$

$$= \sqrt{(2 - (-1))^2 + (0 - 2)^2 + (-1 - 0)^2 + (0 - 0)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 4 + 1 + 0}$$

$$= \sqrt{14} \approx 3.74$$



```
>> u1=[2 0 -1 0]';
>> u2=[-1 2 0 0]';
>> d=norm(u1-u2)
d =
    3.7417
```

15.6. Vectores ortogonais. Teorema de Pitágoras.

Dois vectores \mathbf{u} e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ são vectores ortogonais sse

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Se \mathbf{u} e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ são vectores ortogonais então:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \quad (\text{teorema de Pitágoras})$$

Exemplos

9. Os vectores $\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0, -2)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 2, 0, 1)$ são ortogonais. Adoptando a notação matricial temos (usando vectores coluna)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_2 \\ &= [0 \quad 1 \quad 0 \quad -2] \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 + 2 + 0 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Sendo os vectores ortogonais, podemos verificar o teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2\|^2 &= (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)^T (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \\ &= [0 + 0 \quad 1 + 2 \quad 0 + 0 \quad -2 + 1] \begin{bmatrix} 0 + 0 \\ 1 + 2 \\ 0 + 0 \\ -2 + 1 \end{bmatrix} \\ &= 0 + 9 + 0 + 1 = 10 \\ \|\mathbf{u}_1\|^2 + \|\mathbf{u}_2\|^2 &= (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) + (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2) = (\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1) + (\mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_2) \\ &= [0 \quad 1 \quad 0 \quad -2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + [0 \quad 2 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= (0 + 1 + 0 + 4) + (0 + 4 + 0 + 1) = 10 \end{aligned}$$



```
>> u1=[0 1 0 -2]';
>> u2=[0 2 0 1]';
>> u2'*u1
ans =
     0
>> (u1+u2)'*(u1+u2)
ans =
    10
>> u1'*u1+u2'*u2
ans =
    10
```