

AULA 18

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Exercícios.

18. Exercícios.

ORTOGONALIDADE EM $\mathbb{R}^N$

18.1. Dados os vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + 0.5\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v} = 0.5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, o vector $\mathbf{u}$ tem norma

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{2^2 + 0.5^2 + 1^2} \approx 2.29$$

O produto interno entre os vector $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, é

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \\ &= (2 \times 0.5) + (0.5 \times 2) + (1 \times 2) \\ &= 4\end{aligned}$$

Sendo o produto interno entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ positivo, o ângulo entre os vectores é $0 \leq \alpha < \pi/2$

$$\begin{aligned}\alpha &= \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right) = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{(2^2 + 0.5^2 + 1)(0.5^2 + 2^2 + 2^2)}}\right) \\ &\approx 0.92 \text{ (} \approx 0.58\pi/2 \approx 52.6^\circ \text{)}\end{aligned}$$

A projecção ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ é

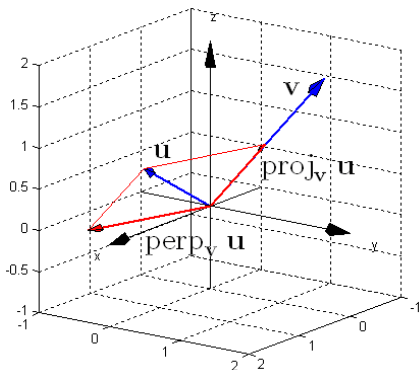


Figura 18.1

$$\begin{aligned}\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \\ &= \frac{4}{8.25} (0.5 \mathbf{e}_1 + 2 \mathbf{e}_2 + 2 \mathbf{e}_3) \\ &\approx 0.24 \mathbf{e}_1 + 0.97 \mathbf{e}_2 + 0.97 \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

, sendo a componente perpendicular

$$\begin{aligned}\text{perp}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 \\ &\approx 1.76 \mathbf{e}_1 - 0.47 \mathbf{e}_2 + 0.03 \mathbf{e}_3\end{aligned}$$



```
>> u=[2 0.5 1]';
>> v=[0.5 2 2]';
>> norm(u)
ans =
    2.2913
>> u'*v
ans =
    4
>> alfa=acos(u'*v/(norm(u)*norm(v)))
alfa =
    0.9175
>> u1=(u'*v)/(v'*v)*v
u1 =
    0.2424
    0.9697
    0.9697
>> u2=u-u1
u2 =
    1.7576
   -0.4697
    0.0303
```

18.2. Mostrar que os vectores $\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0, -2)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 2, 0, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1, 0, 2, 0)$ e $\mathbf{u}_4 = (2, 0, 1, 0)$ são ortogonais, isto é, $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ para $i \neq j$.

Um modo prático de verificar que todos os produtos internos cruzados são nulos, consiste em dispor os vectores na forma de uma matriz e multiplicá-la pela sua transposta. Seja a matriz cujas colunas correspondem a cada um dos vectores

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{u}_3 \mid \mathbf{u}_4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A sua transposta é uma matriz em que cada um dos vectores está disposto segundo as linhas da matriz

$$U^T = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \mathbf{u}_3^T \\ \mathbf{u}_4^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Atendendo à definição de produto matricial e de produto interno

$$\begin{aligned} U^T U &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \mathbf{u}_3^T \\ \mathbf{u}_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_3^T \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_3^T \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3^T \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_3^T \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_4^T \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_4^T \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_4^T \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4^T \mathbf{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{u}_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Atendendo a que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$, concluímos que a matriz resultante é uma matriz simétrica, tendo as normas dos vectores na sua diagonal, e os produtos internos cruzados quer acima quer abaixo da diagonal.

Se a matriz resultante, como é o caso, for uma matriz diagonal, concluímos que os vectores são ortogonais.

$$U^T U = \begin{bmatrix} \|\mathbf{u}_1\|^2 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \|\mathbf{u}_2\|^2 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 & \|\mathbf{u}_3\|^2 & \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_4 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_4 & \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_4 & \|\mathbf{u}_4\|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$



```
>> u1=[0 1 0 -2]';
>> u2=[0 2 0 1]';
>> u3=[-1 0 2 0]';
>> u4=[2 0 1 0]';
>> U=[u1 u2 u3 u4];
>> U'*U
ans =
     5     0     0     0
     0     5     0     0
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

18.3. Dado o vector $\mathbf{u} = (3, -3, 4, -4)$ e os vectores ortogonais $\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0, -2)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 2, 0, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1, 0, 2, 0)$ e $\mathbf{u}_4 = (2, 0, 1, 0)$, podemos verificar que, sendo

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^4 k_i \mathbf{u}_i$$

, temos

$$k_i = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|^2} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i}$$

Atendendo ao exemplo anterior temos $\|\mathbf{u}_1\|^2 = \|\mathbf{u}_2\|^2 = \|\mathbf{u}_3\|^2 = \|\mathbf{u}_4\|^2 = 5$, pelo que, adoptando a notação matricial

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\|\mathbf{u}_i\|^2} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\|\mathbf{u}_i\|^2} \mathbf{u}^T [\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{u}_3 \mid \mathbf{u}_4]$$

$$\mathbf{k} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4$$



```
>> u=[3 -3 4 -4]';
>> u1=[0 1 0 -2]';
>> u2=[0 2 0 1]';
>> u3=[-1 0 2 0]';
>> u4=[2 0 1 0]';
>> U=[u1 u2 u3 u4];
>> nui=diag(U'*U)'
>> k=u'*U./nui
k =
     1     -2     1     2
```

18.4. Os vectores $\mathbf{u}_1 = [2 \ 1 \ -1]^T$, $\mathbf{u}_2 = [0 \ 1 \ 1]^T$ são ortogonais, dado que $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$



```
>> u1=[2 1 -1]';
>> u2=[0 1 1]';
>> u1'*u2
ans =
      0
```

Para encontrar um terceiro vector ortogonal, a $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, podemos recorrer ao conceito de produto externo, dado que $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ é ortogonal a $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ (e tem um sentido ditado pela regra da mão direita)



```
>> u3=cross(u1,u2)
u3 =
      2
     -2
      2
```

Podemos verificar que $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, e $\mathbf{u}_3 = [2 \ -2 \ 2]^T$ formam um conjunto ortogonal, isto é, $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ para $i \neq j$,



```
>> U=[u1 u2 u3];
>> U'*U
ans =
      6      0      0
      0      2      0
      0      0     12
```

Sendo ortogonais, os vectores são linearmente independentes, pelo que formam uma base de $\mathbb{R}^3$ (recordando que n vectores linearmente independentes formam uma base de $\mathbb{R}^n$) e, porque são ortogonais, $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

Nenhum dos vectores tem norma unitária. Como se constata pela diagonal da matriz $U^T U$, $\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{6}$, $\|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{2}$, e $\|\mathbf{u}_3\| = \sqrt{12}$. Se normalizarmos os vectores, encontramos os versores de cada um deles

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \text{ e } \mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{12} \\ -2/\sqrt{12} \\ 2/\sqrt{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

, resultando que $\mathcal{Q} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.



```
>> q1=u1/sqrt(u1'*u1);
>> q2=u2/sqrt(u2'*u2);
>> q3=u3/sqrt(u3'*u3);
```

```
>> Q=[q1 q2 q3];
>> Q'*Q
ans =
    1.0000         0         0
         0    1.0000         0
         0         0    1.0000
```

18.5. Consideremos a base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ constituída pelos vectores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ do exemplo anterior, $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. Qualquer vector de $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}$, pode exprimir-se como combinação linear dos vectores da base, $\mathbf{u} = k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3$. Cada um dos coeficientes da combinação linear está relacionado com a projecção ortogonal do vector $\mathbf{u}$ sobre cada um dos vectores $\mathbf{u}_i$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 k_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|^2} \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i} \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^3 \text{proj}_{\mathbf{u}_i} \mathbf{u}$$

Consideremos agora a base ortonormada $\mathcal{Q} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ construída a partir de $\mathcal{U}$. Sendo, como vimos, $\mathbf{q}_i = \mathbf{u}_i / \|\mathbf{u}_i\|$, temos

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|^2} \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|} \frac{\mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|} = \sum_{i=1}^3 \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|} \right) \frac{\mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|} = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_i) \mathbf{q}_i = \sum_{i=1}^3 \text{proj}_{\mathbf{q}_i} \mathbf{u}$$

Assim, sendo a base ortonormada, o cálculo dos coeficientes que permitem representar qualquer vector como uma combinação linear dos vectores da base é mais simples, correspondendo apenas ao produto interno do vector por cada um dos vectores $k_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_i$.

Seja $\mathbf{u} = [1 \ -2 \ 1]^T$. Subentende-se que o vector está escrito na base canónica de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, ou seja,

$$\mathbf{u} = 1\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3$$

, que é uma base ortonormada, pelo que cada uma das coordenadas do vector $\mathbf{u}$ não é mais do que a sua projecção ortogonal sobre cada um dos vectores da base canónica.

Podemos representar $\mathbf{u}$ na base ortogonal $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ sendo

$$k_i = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i}$$



```
>> u=[1 -2 1]';
>> format rat
>> k1=u'*u1/(u1'*u1)
>> k1 =
    -1/6
>> k2=u'*u2/(u2'*u2)
k2 =
    -1/2
```

```
>> k3=u'*u3/(u3'*u3)
k3 =
      2/3
```

temos

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{6}\mathbf{u}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{u}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{u}_3$$

Podemos representar $\mathbf{u}$ na base ortonormada $\mathcal{Q} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ sendo simplesmente

$$k_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_i$$



```
>> k1=u'*q1
k1 =
    -0.4082
>> k2=u'*q2
k2 =
    -0.7071
>> k3=u'*q3
k3 =
     2.3094
```

temos

$$\mathbf{u} = -\frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{q}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{q}_2 + \frac{2\sqrt{12}}{3}\mathbf{q}_3$$

Note-se ainda que, como $k_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_i = \mathbf{u}^T \mathbf{q}_i$, temos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T \mathbf{q}_1 & \mathbf{u}^T \mathbf{q}_2 & \mathbf{u}^T \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{u}^T \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \end{aligned}$$

, onde $\mathbf{Q}$ é a matriz cujas colunas são os vectores da base $\mathcal{Q}$.



```
>> u'*[q1 q2 q3]
ans =
    -0.4082    -0.7071     2.3094
```

18.6. O exemplo anterior pode, evidentemente, ser interpretado num contexto mais geral de representação de um vector em diferentes bases (não necessariamente ortogonais).

Temos $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, com $\mathbf{u}_1 = [2 \ 1 \ -1]^T$, $\mathbf{u}_2 = [0 \ 1 \ 1]^T$, e $\mathbf{u}_3 = [2 \ -2 \ 2]^T$. Sabendo $[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = [1 \ -2 \ 1]^T$, temos

$$M_{\mathcal{U}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}]_{\mathcal{U}} &= M_{\mathcal{E}\mathcal{U}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} \\ &= M_{\mathcal{U}\mathcal{E}}^{-1} [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



```
>> format rat
>> Wue=[2 0 2;1 1 -2;-1 1 2];
>> ve=[1 -2 1]';
>> vu=inv(Wue)*ve
vu =
    -1/6
    -1/2
     2/3
```