

AULA 21

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Números complexos.

Plano complexo. Forma polar.

Fórmulas de Euler e de Moivre.

Raízes de números complexos.

Funções complexas de variável complexa.

21. Números complexos.

21.1. Números complexos.

O corpo dos **números complexos**, \mathbb{C} , é uma extensão do corpo dos reais, na qual a equação $x^2 + 1 = 0$ tem solução.

Se z é um número complexo, a sua forma **cartesiana** (algébrica, ou rectangular) é:

$$z = a + jb$$

, onde a e b são números reais e j (ou i) designa a **unidade imaginária**

$$j = \sqrt{-1}$$

Designamos a por **parte real** de z e b por **coeficiente da parte imaginária** de z , e notamos $a = \text{Re}(z)$, $b = \text{Im}(z)$. Dizemos que z é um número **imaginário puro** se $a = 0$ e $b \neq 0$. Se $b = 0$, z é real.

Dado o número complexo $z = a + jb$ o seu **conjugado** é $\bar{z} = a - jb$.

Operações com complexos

Sejam z e w dois números complexos, $z = a + jb$ e $w = c + jd$:

igualdade

$$a + jb = c + jd \quad \text{sse } a = c \text{ e } b = d$$

adição

$$z + w = (a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$$

multiplicação

$$zw = (a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc)$$

divisão

Se $w \neq 0$,

$$\frac{z}{w} = \frac{(a + jb)}{(c + jd)} = \frac{(a + jb)(c - jd)}{(c + jd)(c - jd)} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2}.$$

Com a adição e multiplicação assim definidas, podem demonstrar-se as propriedades (comutativa, associativa, etc.) que nos permitem concluir que o conjunto dos números complexos, \mathbb{C} , tal como o conjunto dos números reais, constitui um **corpo**.

Exemplos

1. Dados os complexos $z = 2 - j$ e $w = 1 + 2j$, temos:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= 2 + j \\ z + w &= (2 - j) + (1 + 2j) = 3 + j \\ z - w &= (2 - j) - (1 + 2j) = 1 - 3j \\ zw &= (2 - j)(1 + 2j) = 4 + 3j \\ \frac{z}{w} &= \frac{2 - j}{1 + 2j} = -j \end{aligned}$$

2. Podemos simplificar o complexo $z = \frac{3j^{30} - j^{19}}{2j - 1}$

$$\begin{aligned} z &= \frac{3(j^2)^{15} - (j^2)^9 j}{2j - 1} = \frac{3(-1)^{15} - (-1)^9 j}{2j - 1} \\ &= \frac{-3 + j}{-1 + 2j} = \frac{(-3 + j)(-1 - 2j)}{(-1 + 2j)(-1 - 2j)} \\ &= \frac{3 + 6j - j - 2j^2}{1 + 4} = \frac{5 + 5j}{5} \\ &= 1 + j \end{aligned}$$

21.2. Plano complexo. Forma polar.

Podemos interpretar um número complexo

$$z = a + jb$$

como um **par ordenado** de números reais (a, b) representáveis num plano cartesiano xy .

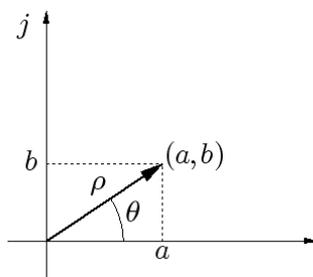


Figura 21.1

Designamos o plano de representação por **plano complexo**, **plano de Argand**, ou **plano z**. O eixo dos xx é designado por **eixo real** e o eixo dos yy é designado por **eixo imaginário**.

A cada número complexo corresponde um e um só ponto do plano, e a cada ponto do plano corresponde um e um só número complexo. Um número complexo $z = a + jb$ pode assim ser interpretado como um segmento orientado cuja origem é a origem do plano complexo e cuja extremidade é o ponto correspondente ao par ordenado (a, b) .

Podemos escrever um número complexo z noutra forma, dita **forma polar** (ou **exponencial**)

$$z = \rho e^{j\theta}$$

, em que ρ representa o **módulo**, ou **valor absoluto**, do complexo, e θ o seu **argumento**. O módulo é facilmente obtido, recorrendo à representação gráfica do complexo:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

,ou, multiplicando o complexo pelo seu conjugado

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a + jb)(a - jb)} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Quando o complexo está expresso na forma polar, o reconhecimento do módulo é imediato

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\rho e^{j\theta} \rho e^{-j\theta}} \\ &= \rho \end{aligned}$$

Quanto ao argumento, recorrendo à representação gráfica

$$\theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

, idêntico à relação a partir da forma rectangular

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}\right) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Exemplos

3. A figura mostra a representação no plano complexo dos números

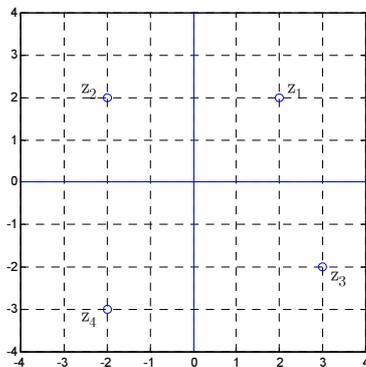


Figura 21.2

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 + 2j \\ z_2 &= -2 + 2j \\ z_3 &= 3 - 2j \\ z_4 &= -2 - 3j \end{aligned}$$

4. O complexo $z = (1 - j)(-1 + j\sqrt{3})$, tendo em atenção que

$$\begin{aligned} \rho_1 &= |1 - j| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \\ \rho_2 &= |-1 + j\sqrt{3}| = \sqrt{1 + 3} = 2 \end{aligned}$$

, e ainda que

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \arg(1 - j) = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4} \\ \theta_2 &= \arg(-1 + j\sqrt{3}) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

(notando que $1 - j$ está no 4° quadrante e $-1 + j\sqrt{3}$ está no 2° quadrante) pode ser escrito na forma polar

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} 2e^{-j\frac{2\pi}{3}} \\ &= 2\sqrt{2}e^{j\frac{5\pi}{12}} \end{aligned}$$

21.3. Fórmulas de Euler e de Moivre.

A partir da representação gráfica, e dado que $\cos(\theta) = \frac{a}{\rho}$ e $\text{sen}(\theta) = \frac{b}{\rho}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} z &= a + jb = \rho(\cos(\theta) + j \text{sen}(\theta)) \\ &= \rho \text{cis}(\theta) \end{aligned}$$

dita, também, forma trigonométrica do complexo z . A forma anteriormente apresentada

$$z = \rho e^{j\theta}$$

resulta da **fórmula de Euler**

$$e^{\pm jx} = \cos(x) \pm j \text{sen}(x)$$

, com x real. A partir da fórmula de Euler obtêm-se as definições das funções seno e co-seno:

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \qquad \text{sen}(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

O multiplicação e a divisão de dois complexos é mais simples de efectuar quando estes estão escritos na forma polar

$$z w = \rho_1 e^{j\theta_1} \rho_2 e^{j\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + j \text{sen}(\theta_1 + \theta_2))$$

Se $w \neq 0$,

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho_1 e^{j\theta_1}}{\rho_2 e^{j\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + j \text{sen}(\theta_1 - \theta_2))$$

Generalizando o produto, temos, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} z^n &= \rho e^{j\theta} \rho e^{j\theta} \dots \rho e^{j\theta} \\ &= \rho^n e^{jn\theta} \\ &= \rho^n (\cos(n\theta) + j \text{sen}(n\theta)) \end{aligned}$$

, relação conhecida por **fórmula de Moivre**.

Exemplo

5. Recorrendo à fórmula de Euler, as relações trigonométricas podem ser facilmente demonstradas. Por exemplo

$$\begin{aligned} \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) &= \frac{e^{j\left(\frac{\pi}{2} - z\right)} - e^{-j\left(\frac{\pi}{2} - z\right)}}{2j} = \frac{e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-jz} - e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{jz}}{2j} \\ &= \frac{\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) e^{-jz} - \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - j \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) e^{jz}}{2j} \\ &= \frac{(0 + j) j e^{-jz} - (0 - j) e^{jz}}{2j} = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} = \cos(z) \end{aligned}$$

21.4. Raízes de números complexos.

Seja $z \in \mathbb{C}$. Um número w diz-se uma **n-ésima raiz** (ou raiz de índice n) de z se $w^n = z$, ou seja, se $w = z^{1/n}$.

Atendendo à fórmula de Moivre, e sendo n um inteiro positivo,

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \rho^{1/n} \left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + j \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right) \\ &= \rho^{1/n} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \\ &= \rho^{1/n} e^{j(\theta+2k\pi)/n} \end{aligned}$$

com $k = 0, 1, \dots, n - 1$, pelo que existem n valores diferentes para $z^{1/n}$, ou seja, n diferentes raízes n-ésimas de z .

Em particular, as soluções da equação $z^n = 1$, sendo n um inteiro positivo, são chamadas as **n-ésimas raízes da unidade**, sendo

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{1 \operatorname{cis}(0)} \\ &= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + j \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ &= e^{j2k\pi/n} \end{aligned}$$

, com $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Geometricamente elas correspondem a pontos do plano complexo equiespaçados sobre a circunferência de equação $|z| = 1$, dito o **círculo unitário**.

Exemplos

6. Resolvamos $z^6 = (2 + j)^3$. Para $2 + j$ temos:

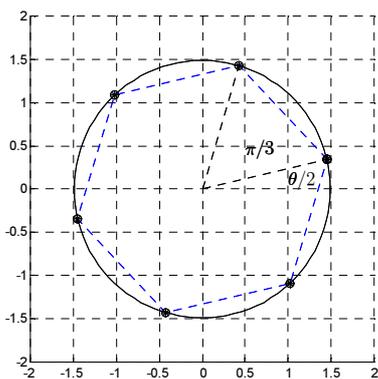


Figura 21.3

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{4 + 1} = 5^{1/2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

donde,

$$z^6 = (5^{1/2} e^{j\theta})^3 = 5^{3/2} e^{j3\theta}$$

, logo

$$\begin{aligned} z &= (5^{3/2} e^{j3\theta})^{1/6} = 5^{3/12} e^{j\left(\frac{3\theta+2k\pi}{6}\right)} \\ &= 5^{1/4} e^{j\left(\frac{\theta}{2} + k\frac{2\pi}{6}\right)} \\ &= 5^{1/4} e^{j\left(\frac{\theta}{2} + k\frac{\pi}{3}\right)} \end{aligned}$$

, com $k = 0, 1, \dots, 5$. Geometricamente temos seis complexos sobre a circunferência de módulo $5^{1/4}$ e equiespaçados de $\pi/3$ como se representa na figura 21.3.

21.5. Funções complexas de variável complexa.

Uma aplicação f , em que as variáveis dependente, w , e independente, z , pertencem ambas a um qualquer subconjunto do corpo dos complexos é dita uma **função complexa de variável complexa**, e escrevemos $w = f(z)$.

Para as funções complexas de variável complexa têm lugar, identicamente ao visto em Análise Matemática, os conceitos de: objecto, imagem, domínio, contradomínio; função sobrejectiva, injectiva e bijectiva; restrição e extensão de uma função; função inversa, função composta; etc..

Caso o domínio da função seja um subconjunto de \mathbb{C} e o contradomínio um subconjunto de \mathbb{R} a função diz-se uma **função real de variável complexa**. Caso o domínio da função seja um subconjunto de \mathbb{R} e o contradomínio um subconjunto de \mathbb{C} a função diz-se uma **função complexa de variável real**.

Exemplos

7. A função $w = f(z) = z^2$, com $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} w &= z^2 \\ u + jv &= (x + jy)^2 \\ &= (x^2 - y^2) + j2xy \end{aligned}$$

, com $u, v, x, y \in \mathbb{R}$, é uma função complexa de variável complexa, $w \in \mathbb{C}$. Quer o domínio quer o contradomínio da função correspondem a todo o plano complexo.

8. A função $w = e^{jx}$, com $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} w &= e^{jx} \\ u + jv &= \cos(x) + j\sin(x) \end{aligned}$$

, é uma função complexa de variável real, $w \in \mathbb{C}$. Note-se que o contradomínio da função corresponde apenas, no plano complexo, à circunferência de raio unitário, dado que $|w| = |e^{jx}| = 1$.

9. A função $u = |z|$, com $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} u &= |z| = |x + jy| \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

, é uma função real de variável complexa, $u \in \mathbb{R}_0^+$.

Exercícios.

21.1. Calcular

$$\int_a^b e^{jt} dt$$

Tendo em atenção que $e^{jt} = \cos(t) + j \operatorname{sen}(t)$, temos

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{jt} dt &= \int_a^b (\cos(t) + j \operatorname{sen}(t)) dt = \int_a^b \cos(t) dt + j \int_a^b \operatorname{sen}(t) dt \\ &= [\operatorname{sen}(t) - j \cos(t)]_a^b = [-j(\cos(t) + j \operatorname{sen}(t))]_a^b \\ &= [-je^{jt}]_a^b = \left[\frac{1}{j} e^{jt} \right]_a^b \\ &= \frac{e^{jb} - e^{ja}}{j} \end{aligned}$$

, ou seja, no cálculo das primitivas das funções complexas de variável real podemos proceder identicamente às primitivas de funções reais de variável real. Sendo conhecida a primitiva de $f(z) = e^{jt}$ podemos fazer de imediato

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{jt} dt &= \left[\frac{1}{j} e^{jt} \right]_a^b \\ &= \frac{e^{jb} - e^{ja}}{j} \end{aligned}$$

21.2. Calcular

$$\int_0^\pi \frac{2e^{j\theta} + 2}{2e^{j\theta}} 2je^{j\theta} d\theta$$

Temos

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{2e^{j\theta} + 2}{2e^{j\theta}} 2je^{j\theta} d\theta &= \int_0^\pi j(2e^{j\theta} + 2) d\theta \\ &= 2 \left[e^{j\theta} \right]_0^\pi + 2j \left[\theta \right]_0^\pi \\ &= 2(e^{j\pi} - e^{j0}) + 2j(\pi - 0) \\ &= 2(-1 - 1) + 2j\pi \\ &= -4 + 2\pi j \end{aligned}$$

21.3. Calcular

$$\int_0^\pi \frac{(2 + 2j) + 2e^{j\theta} + 2}{(2 + 2j) + 2e^{j\theta}} 2je^{j\theta} d\theta$$

Temos

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{(2 + 2j) + 2e^{j\theta} + 2}{(2 + 2j) + 2e^{j\theta}} 2je^{j\theta} d\theta &= \int_0^\pi 2je^{j\theta} d\theta + 2 \int_0^\pi \frac{2je^{j\theta}}{2 + 2j + 2e^{j\theta}} d\theta \\ &= \left[2e^{j\theta} \right]_0^\pi + 2 \left[\ln(2 + 2j + 2e^{j\theta}) \right]_0^\pi \\ &= (-2) - (2) + 2 \ln(2j) - 2 \ln(4 + 2j) \\ &= -4 + 2 \ln(2j) - 2 \ln(4 + 2j) \end{aligned}$$

21.4. Calcular as raízes do polinómio

$$f(z) = z^2 + 1$$

Temos

$$\begin{aligned} z^2 + 1 &= 0 \\ z^2 &= -1 \\ z &= \pm j \end{aligned}$$

21.5. Calcular as raízes do polinómio

$$f(z) = z^8 - 1$$

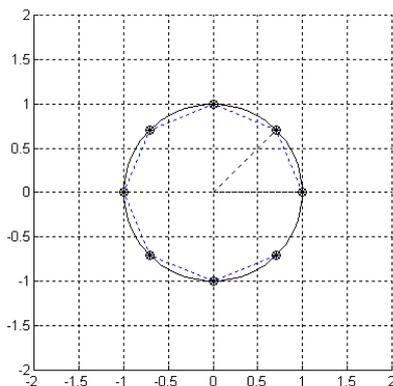


Figura 21.4

Tendo em atenção que $z^{1/n} = \rho^{1/n} e^{j(\theta+2k\pi)/n}$, temos

$$\begin{aligned} z^8 - 1 &= 0 \\ z^8 &= 1 \\ z &= (1)^{\frac{1}{8}} = (e^{j0})^{\frac{1}{8}} = e^{j\frac{0+2k\pi}{8}} = e^{jk\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

com $k = 0, 1, \dots, 7$. Ou seja,

$$\begin{aligned} z^8 - 1 &= (z + 1)(z - 1)(z + j)(z - j) \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j) \right) \\ &\quad \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - j) \right) \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + j) \right) \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - j) \right) \end{aligned}$$