

AULA 22

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Matrizes conjugada, transconjugada, hermitiana e anti-hermitiana.

Sinais contínuos e sinais discretos.

Função exponencial complexa contínua.

Função exponencial complexa discreta.

Função impulso unitário discreto.

22. Matrizes complexas.

22.1. Matrizes conjugada, transconjugada, hermitiana e anti-hermitiana.

Dada uma matriz complexa, \mathbf{A} , chama-se **matriz conjugada** de \mathbf{A} , e representa-se por $\overline{\mathbf{A}}$, a matriz que se obtém conjugando cada um dos elementos de \mathbf{A} . Chama-se **matriz transconjugada** de \mathbf{A} , e representa-se por \mathbf{A}^* , a transposta da conjugada de \mathbf{A} .

Uma matriz quadrada complexa $\mathbf{A} = [z_{ij}]$ diz-se **hermitiana** se $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$, ($z_{ij} = z_{ji}^*$, $\forall i, j$) e diz-se **anti-hermitiana** se $\mathbf{A}^* = -\mathbf{A}$, ($z_{ij} = -z_{ji}^*$, $\forall i, j$).

Relativamente às matrizes conjugada e transconjugada, demonstram-se as seguintes propriedades:

Conjugada

1. $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$
2. $\overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}$
3. $\overline{z\mathbf{A}} = \overline{z}\overline{\mathbf{A}}$
4. $\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{B}}$

Transconjugada

5. $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$
6. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*$
7. $(z\mathbf{A})^* = \overline{z}\mathbf{A}^*$
8. $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$

Inversa

9. $\overline{\mathbf{A}^{-1}} = (\overline{\mathbf{A}})^{-1}$

10. $(\mathbf{A}^{-1})^* = (\mathbf{A}^*)^{-1}$

Exemplos

1. Considere as matrizes:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 2+j & 1 \\ 2 & j & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -j & -1+j \\ -j & 0 & -5 \\ 1+j & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

A conjugada e a transconjugada da matriz \mathbf{D} são

$$\overline{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 3 & 2-j & 1 \\ 2 & -j & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^* = \overline{\mathbf{D}}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2-j & -j \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz \mathbf{E} é anti-hermitiana

$$\overline{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 0 & j & -1-j \\ j & 0 & -5 \\ 1-j & 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{E}^* = \overline{\mathbf{E}}^T = -\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & j & 1-j \\ j & 0 & 5 \\ -1-j & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Numa matriz anti-hermitiana, os elementos da diagonal principal são obrigatoriamente nulos e/ou imaginários puros.

Conjugada de uma matriz, **conj(A)**,>> `D=[3 2+j 1; 2 j 0]``D =`

```
3.0000          2.0000 + 1.0000i    1.0000
2.0000          0 + 1.0000i         0
```

>> `conj(D)``ans =`

```
3.0000          2.0000 - 1.0000i    1.0000
2.0000          0 - 1.0000i         0
```

Transconjugada de uma matriz, **A'**,>> `D'``ans =`

```
3.0000          2.0000
2.0000 - 1.0000i    0 - 1.0000i
1.0000              0
```

(note que o operador `'`, que significa *transconjugado*, tem sido, por economia de escrita, utilizado com matrizes e vectores de elementos reais como o operador *transposto*, que em MatLab é `.'`).

Exercícios.

22.1. Calcule $(j^{25}\mathbf{BC} + \mathbf{A}^2)^{-1}$, sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = [1 - j \quad 1 + j]^T \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1]$$

Temos

$$\begin{aligned} j^{25}\mathbf{BC} + \mathbf{A}^2 &= j(j^2)^{12} \begin{bmatrix} 1-j \\ 1+j \end{bmatrix} [1 \quad 1] + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= j(-1)^{12} \begin{bmatrix} 1-j & 1-j \\ 1+j & 1+j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ [0 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & [0 \quad -1] \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= j \begin{bmatrix} 1-j & 1-j \\ 1+j & 1+j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+j & 1+j \\ -1+j & -1+j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+j & 1+j \\ -1+j & j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Recorrendo ao método de condensação

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2+j & 1+j & 1 & 0 \\ -1+j & j & 0 & 1 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} + \frac{1}{5}j & \frac{2}{5} - \frac{1}{5}j & 0 \\ -1+j & j & 0 & 1 \end{bmatrix} & \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}j\right)L_1 \rightarrow L_1 \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} + \frac{1}{5}j & \frac{2}{5} - \frac{1}{5}j & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} + \frac{3}{5}j & \frac{1}{5} - \frac{3}{5}j & 1 \end{bmatrix} & (1-j)L_1 + L_2 \rightarrow L_2 \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} + \frac{1}{5}j & \frac{2}{5} - \frac{1}{5}j & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}j & \frac{4}{5} - \frac{3}{5}j \end{bmatrix} & \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}j\right)L_2 \rightarrow L_2 \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} + \frac{1}{5}j & -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}j \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}j & \frac{4}{5} - \frac{3}{5}j \end{bmatrix} & \left(-\frac{3}{5} - \frac{1}{5}j\right)L_2 + L_1 \rightarrow L_1 \end{aligned}$$

Temos

$$(j^{25}\mathbf{BC} + \mathbf{A}^2)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} + \frac{1}{5}j & -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}j \\ -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}j & \frac{4}{5} - \frac{3}{5}j \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2+j & -3+j \\ -1-3j & 4-3j \end{bmatrix}$$



```
>> A=[1 0; 0 -1];
>> B=[1-i 1+j].';
>> C=[1 1];
>> inv(j^25*B*C+A^2)
```

ans =

```
    2/5      +    1/5i      -3/5      +    1/5i
   -1/5      -    3/5i      4/5      -    3/5i
```

22.2. Sendo \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} matrizes regulares de ordem n , tais que $\mathbf{B} = \mathbf{C}^2 \mathbf{A}^*$, mostre que $(\mathbf{A}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C}^2)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1} \overline{\mathbf{A}})^T$

Temos

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C}^2)^{-1} &= (\mathbf{C}^2)^{-1} (\mathbf{B}^{-1})^{-1} (\mathbf{A}^T)^{-1} \\
 &= (\mathbf{C}^2)^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{A}^{-1})^T \\
 &= (\mathbf{C}^2)^{-1} (\mathbf{C}^2 \mathbf{A}^*) (\mathbf{A}^{-1})^T \\
 &= ((\mathbf{C}^2)^{-1} \mathbf{C}^2) \mathbf{A}^* (\mathbf{A}^{-1})^T \\
 &= \mathbf{A}^* (\mathbf{A}^{-1})^T \\
 &= \overline{\mathbf{A}}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \\
 &= (\mathbf{A}^{-1} \overline{\mathbf{A}})^T
 \end{aligned}$$

22.2. Sinais contínuos e sinais discretos.

Definimos **sinal** como uma função de uma ou mais variáveis independentes, contendo informação sobre um determinado fenómeno físico.

Com base nas suas características, os sinais podem ser classificados de diversos modos. Abordaremos apenas a classificação de sinais que dependem de uma única variável independente, e o modo como são classificados com base no conjunto de valores assumidos por essa variável.

Sinal contínuo.

Um sinal diz-se contínuo quando a variável independente é contínua ($\in \mathbb{R}$).

Vamos admitir que o domínio do sinal é o conjunto dos reais, e (sem perda de generalidade) está associada ao tempo, e o contradomínio do sinal pertence ao conjunto dos complexos.

Utilizaremos a letra t para designar a variável independente e, preferencialmente, as letras x, y, z para designar o operador. Assim, um sinal contínuo é uma função $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, significando $x(t)$ o valor que o sinal assume no instante de tempo t .

Sinal discreto.

Um sinal diz-se discreto quando a variável independente é discreta ($\in \mathbb{Z}$).

Vamos admitir que o domínio do sinal é o conjunto dos inteiros, e o contradomínio do sinal pertence ao conjunto dos complexos.

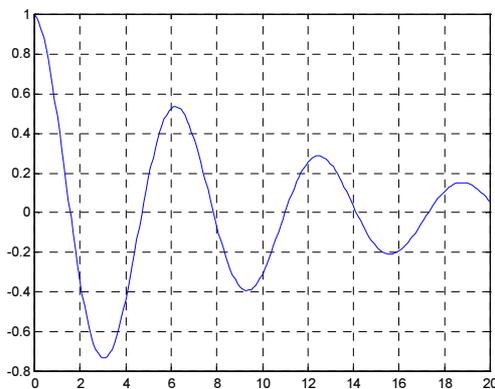


Figura 22.1

Utilizaremos a letra n para designar a variável independente e, preferencialmente, as letras x, y, z para designar o operador. Assim, um sinal discreto é uma função $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, significando $x[n]$ o valor que o sinal assume no instante n que, e sem perda de generalidade, admitimos estar de algum modo associada ao tempo.

Exemplos

2. O sinal $x(t)$, definido por

$$x(t) = \cos(t) e^{-0.1t}$$

com $t \in \mathbb{R}$, cuja evolução para $0 \leq t \leq 20$ se mostra na figura 22.1, é um sinal contínuo.

O sinal $x[n]$, definido por

$$x[n] = \cos(0.5n) e^{-0.05n}$$

com $n \in \mathbb{Z}$, cuja evolução para $0 \leq n \leq 40$ se mostra na figura 22.2, é um sinal discreto.

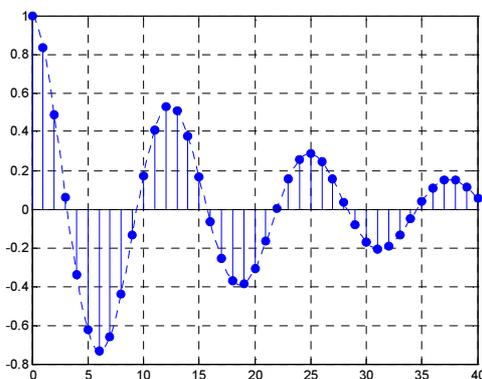


Figura 22.2

22.3. Função exponencial complexa contínua.

Um dos sinais que utilizará nas cadeiras da especialidade é designado por função exponencial complexa de variável contínua.

Exponencial complexa contínua.

O sinal

$$x(t) = Ce^{at}$$

em que C e a são, em geral, números complexos e $t \in \mathbb{R}$ é designado por sinal exponencial complexo contínuo.

Escrevendo C na forma polar

$$C = |C|e^{j\theta_0}$$

, e a na forma cartesiana

$$a = \tau + j\omega_0$$

, temos

$$x(t) = Ce^{at} = |C|e^{j\theta_0}e^{(\tau + j\omega_0)t} = |C|e^{\tau t}e^{j(\omega_0 t + \theta_0)}$$

Torna-se assim explícito que a exponencial complexa tem módulo

$$|x(t)| = |C|e^{\tau t}$$

, e argumento

$$\arg(x(t)) = \omega_0 t + \theta_0$$

Atendendo à relação de Euler, podemos escrever

$$\begin{aligned} x(t) &= |C|e^{\tau t}e^{j(\omega_0 t + \theta_0)} \\ &= |C|e^{\tau t} \cos(\omega_0 t + \theta_0) + j|C|e^{\tau t} \sin(\omega_0 t + \theta_0) \end{aligned}$$

, o que torna claro que a componente real e a componente imaginária do sinal têm uma evolução sinusoidal de período $T_0 = 2\pi/\omega_0$, afectadas por uma exponencial real, com um comportamento ao longo do tempo determinado por τ .

$$\text{Re}(x(t)) = |C|e^{\tau t} \cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

$$\text{Im}(x(t)) = |C|e^{\tau t} \sin(\omega_0 t + \theta_0)$$

Exemplos

3. O sinal $x(t) = 2e^{(-0.05 + j0.5)t}$, com $t \in \mathbb{R}$, é uma função $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Atribuindo valores a t podemos fazer a sua representação no plano complexo

$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^{(-0.05 + j0.5)t} \\ &= 2e^{-0.05t}e^{+j0.5t} \end{aligned}$$

A figura 22.3 (optou-se aqui pela representação polar e não pela representação cartesiana) mostra a evolução de $x(t)$ para $0 < t < 20$.

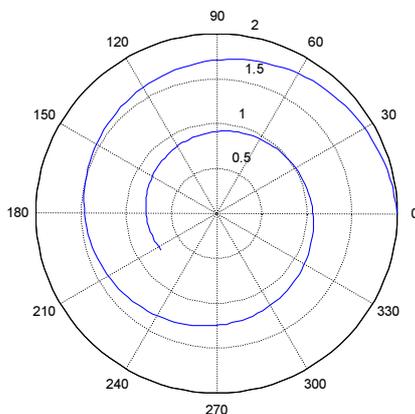
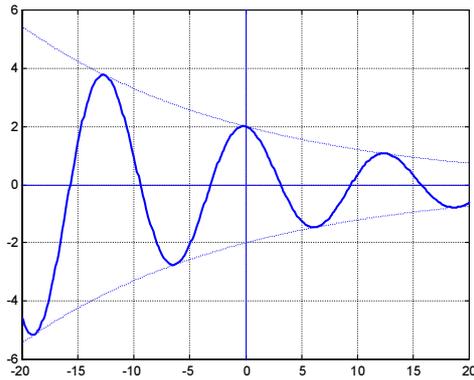
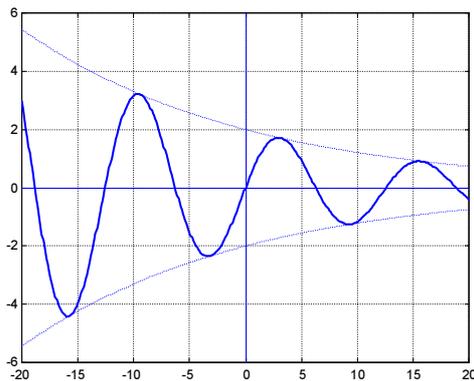


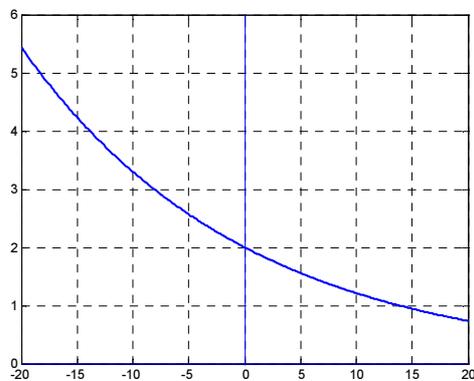
Figura 22.3



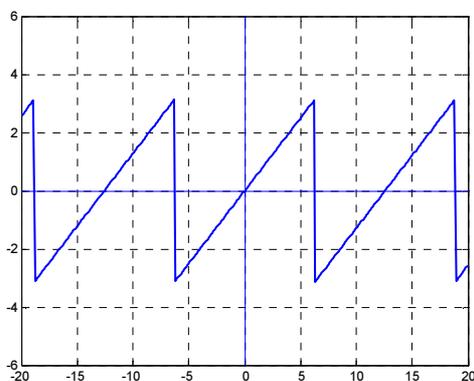
a)



b)



c)



d)

Podemos optar por fazer a representação, em dois gráficos separados, da parte real e da parte imaginária da função. Sendo

$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^{-0.05t}e^{j0.5t} \\ &= 2e^{-0.05t}(\cos(0.5t) + j\sin(0.5t)) \end{aligned}$$

, temos

$$\begin{aligned} \text{Re}(x(t)) &= 2e^{-0.05t} \cos(0.5t) \\ \text{Im}(x(t)) &= 2e^{-0.05t} \sin(0.5t) \end{aligned}$$

As figuras 22.4 a) e b) mostram, respectivamente, a evolução da parte real e da parte imaginária de $x(t)$ para $-20 < t < 20$. Como se pode ver, a evolução traduz a evolução das funções trigonométricas $\cos(0.5t)$ e $\sin(0.5t)$ afectadas pela multiplicação pela exponencial negativa (logo decrescente) $e^{-0.05t}$.

A representação mais comum nas cadeiras da especialidade não é, no entanto, nenhuma destas duas, mas sim a representação do módulo e do argumento de $x(t)$ em planos separados. Temos

$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^{-0.05t}e^{j0.5t} \\ &= \left| 2e^{-0.05t}e^{j0.5t} \right| \\ &= 2e^{-0.05t} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \arg(x(t)) &= \arg(2e^{-0.05t}e^{j0.5t}) \\ &= 0.5t \end{aligned}$$

As figuras 22.4 c) e d) mostram, respectivamente, a evolução do módulo e do argumento de $x(t)$. Na evolução do argumento optou-se pela representação periódica entre -2π e 2π , embora, obviamente, esteja em causa apenas a representação da recta $\theta = 0.5t$.

Figura 22.4

22.4. Função exponencial complexa discreta.

Outra das funções que utilizará nas cadeiras da especialidade é a função exponencial complexa discreta.

Exponencial complexa discreta.

O sinal

$$x[n] = Cz^n$$

em que C e z são, em geral, números complexos e $n \in \mathbb{Z}$ é designado por sinal exponencial complexo discreto.

Escrevendo C e z na forma polar

$$C = |C|e^{j\theta_0}$$

$$z = |z|e^{j\Omega_0}$$

, resulta

$$\begin{aligned} x[n] &= Cz^n = |C|e^{j\theta_0} \left(|z|e^{j\Omega_0} \right)^n \\ &= |C||z|^n e^{j(\Omega_0 n + \theta_0)} \end{aligned}$$

temos

$$|x[n]| = |C||z|^n$$

e

$$\arg(x[n]) = \Omega_0 n + \theta_0$$

Exemplos

4. As figuras 22.5 a) e b) mostram o sinal exponencial complexo

$$x[n] = |C||z|^n e^{j(\Omega_0 n + \theta_0)}$$

e a sua parte real,

$$\text{Re}(x[n]) = |C||z|^n \cos(\Omega_0 n + \theta_0)$$

, com $C = 2$, $\Omega_0 = \pi/10$, $0 < n < 20$, $\theta_0 = 0$, e $z = 0.95$.

Sendo $|z| < 1$, o afixo da exponencial complexa aproxima-se da origem do plano complexo à medida que os valores de n crescem. A parte real do sinal é um coseno envolvido pelas exponenciais decrescentes $\pm |C||z|^n$.

As figuras 22.5 c) e d) mostram o sinal exponencial complexo e a sua parte real com $C = 2$, $\Omega_0 = \pi/10$, $0 < n < 20$, $\theta_0 = 0$, e $z = 1.00$.

Sendo $|z| = 1$, o módulo do sinal é constante.

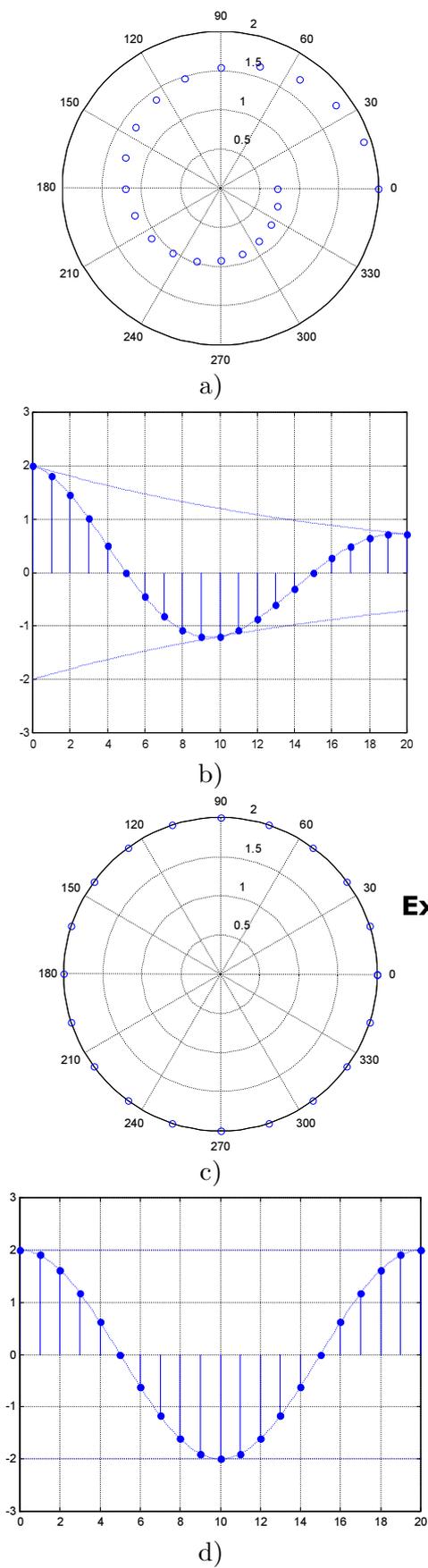


Figura 22.5

22.5. Função impulso unitário discreto.

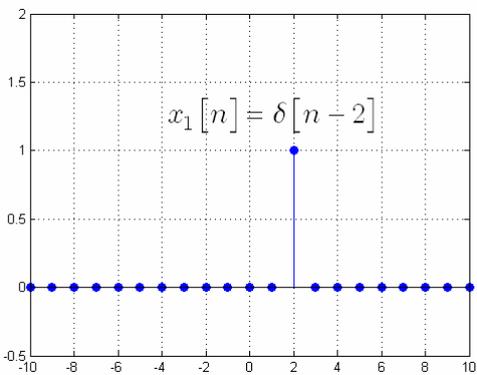
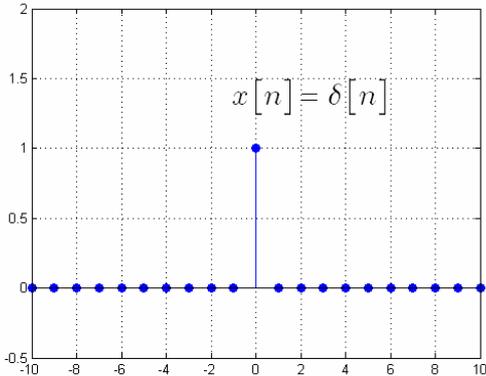
Define-se o sinal **impulso unitário** discreto como um sinal que é sempre nulo, excepto na origem em que toma o valor 1, ou seja:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & , n \neq 0 \\ 1 & , n = 0 \end{cases}$$

As figuras 22.6 e 22.7 mostram, para $-10 < n < 10$, a evolução do sinal impulso unitário

$$x[n] = \delta[n]$$

e dos sinais



$$x_1[n] = \delta[n - 2]$$

$$x_2[n] = \delta[n + 2] + \delta[n - 2]$$

$$x_3[n] = \sum_{i=-2}^2 \delta[n - i]$$

$$x_4[n] = \sum_{i=0}^6 \left| \frac{i}{6} \right| \delta[n - i]$$

$$x_5[n] = \sum_{i=0}^6 e^{-\frac{i}{2}} \delta[n - i]$$

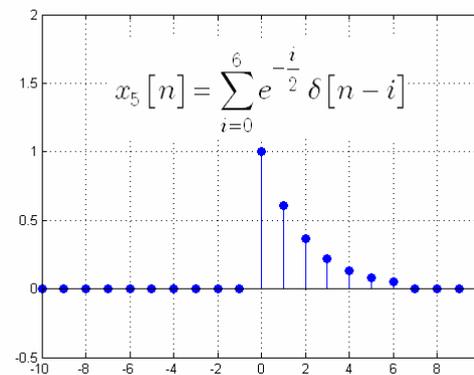
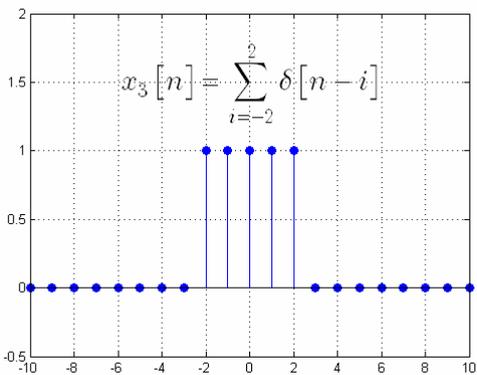
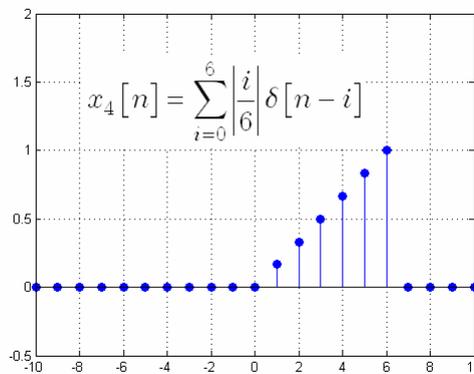
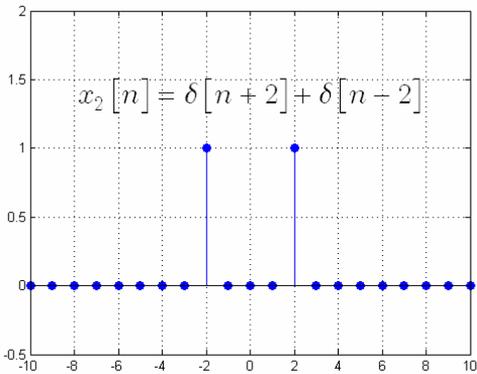


Figura 22.6

Figura 22.7