

# AULA 23

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

## TÓPICOS

Produto interno em espaços vectoriais reais ou complexos.

Produto Interno. Norma. Distância.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Ângulo.

Vectores ortogonais. Base ortogonal. Base ortonormada.

Projecção Ortogonal.

Ortogonalização de Gram-Schmidt.

## 23. Produto interno em espaços vectoriais reais ou complexos.

### 23.1. Produto Interno. Norma. Distância.

Seja  $\mathbb{E}$  um espaço vectorial real ou complexo. Um **produto interno** em  $\mathbb{E}$  é uma aplicação  $(\cdot) : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$  que verifica as seguintes propriedades:

1.  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^*$
2.  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
3.  $(\alpha \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
4.  $\mathbf{u} \cdot (\alpha \mathbf{v}) = \alpha^*(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
5.  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$  e  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$  sse  $\mathbf{u} = 0$

Se  $\mathbb{E}$  é um espaço vectorial sobre  $\mathbb{C}$  (respectivamente,  $\mathbb{R}$ ) de dimensão finita com um produto interno,  $\mathbb{E}$  diz-se um **espaço unitário** (respectivamente, **euclidiano**)

Se  $\mathbb{E}$  é um espaço vectorial, real ou complexo, uma **norma** em  $\mathbb{E}$  é uma aplicação  $\|\cdot\| : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  que verifica as seguintes propriedades

1.  $\|\mathbf{u}\| \geq 0$
2.  $\|\mathbf{u}\| = 0$  sse  $\mathbf{u} = 0$
3.  $\|\alpha \mathbf{u}\| = |\alpha| \|\mathbf{u}\|$
4.  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

Embora as definições sejam independentes, em qualquer espaço com produto interno  $\mathbb{E}$ , a aplicação  $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

verifica as 4 propriedades da norma, logo, constitui uma norma em  $\mathbb{E}$ .

Se  $\mathbb{E}$  um espaço vectorial em que está definido um produto interno, a **distância entre dois vectores**  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$  é a norma do vector entre eles:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

### Exemplos

1. Em  $\mathbb{R}^2$ , a aplicação  $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= g((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \\ &= 4u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 2u_2v_2 \end{aligned}$$

é um produto interno. Com efeito:

1. Verifica  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^*$

$$\begin{aligned} g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) &= g((v_1, v_2), (u_1, u_2)) \\ &= 4v_1u_1 + v_1u_2 + v_2u_1 + 2v_2u_2 \\ &= 4u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 2u_2v_2 \\ &= g((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \\ &= g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

2. Verifica  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) &= g((u_1, u_2), ((v_1, v_2) + (w_1, w_2))) \\ &= g((u_1, u_2), (v_1 + w_1, v_2 + w_2)) \\ &= 4u_1(v_1 + w_1) + u_1(v_2 + w_2) + u_2(v_1 + w_1) + 2u_2(v_2 + w_2) \\ &= (4u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 2u_2v_2) + (4u_1w_1 + u_1w_2 + u_2w_1 + 2u_2w_2) \\ &= g((u_1, u_2), (v_1, v_2)) + g((u_1, u_2), (w_1, w_2)) \\ &= g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + g(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

3. Verifica  $(\alpha\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

$$\begin{aligned} g(\alpha\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= g((\alpha u_1, \alpha u_2), (v_1, v_2)) \\ &= 4(\alpha u_1)v_1 + (\alpha u_1)v_2 + (\alpha u_2)v_1 + 2(\alpha u_2)v_2 \\ &= \alpha(4u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 2u_2v_2) \\ &= \alpha g((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \\ &= \alpha g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

4.  $\mathbf{u} \cdot (\alpha\mathbf{v}) = \alpha^*(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v}) &= g((u_1, u_2), (\alpha v_1, \alpha v_2)) \\ &= g((\alpha v_1, \alpha v_2), (u_1, u_2)) \\ &\stackrel{1.}{=} \alpha g((v_1, v_2), (u_1, u_2)) \\ &\stackrel{3.}{=} \alpha g((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \\ &\stackrel{1.}{=} \alpha g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

5.  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$  e  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$  sse  $\mathbf{u} = 0$

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= g((u_1, u_2), (u_1, u_2)) \\ &= 4u_1^2 + u_1u_2 + u_2u_1 + 2u_2^2 \\ &= 3u_1^2 + (u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2) + u_2^2 \\ &= 3u_1^2 + (u_1 + u_2)^2 + u_2^2 \geq 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= 0 \\ g((u_1, u_2), (u_1, u_2)) &= 0 \\ 3u_1^2 + (u_1 + u_2)^2 + u_2^2 &= 0 \Leftrightarrow 3u_1^2 = (u_1 + u_2)^2 = u_2^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow u_1 = u_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (u_1, u_2) = 0 \end{aligned}$$

Para este produto interno, que não é o usual,

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{3u_1^2 + (u_1 + u_2)^2 + u_2^2}$$

Por exemplo, sendo  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  e  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ , temos

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 &= g(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \\ &= g((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \\ &= 4u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 2u_2v_2 \\ &= 4 \times 1 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 + 2 \times 0 \times 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{e}_1\| = \|(1, 0)\| = \sqrt{3 \times 1^2 + (1 + 0)^2 + 0^2} = 2$$

$$\|\mathbf{e}_2\| = \|(0, 1)\| = \sqrt{3 \times 0^2 + (0 + 1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Em  $\mathbb{R}^2$  com o produto interno  $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 4u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 2u_2v_2$ , os vectores  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  e  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$  não são ortogonais e as suas normas não são unitárias.

Como vimos, em  $\mathbb{R}^2$  com o produto interno usual  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  são ortogonais e têm norma unitária. Temos assim dois exemplos de diferentes produtos internos definidos sobre o mesmo espaço, ou seja, o mesmo espaço com uma **métrica** diferente: cada um dos produtos internos tem associado uma norma, e deles resultam diferentes noções de ortogonalidade e distância entre os elementos do espaço vectorial.

**2.** Sendo  $f(x)$  e  $g(x)$  dois vectores do espaço das funções contínuas num intervalo  $[a, b]$ ,  $\mathcal{C}[a, b]$ , podemos demonstrar que

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g^*(x)dx$$

define um produto interno no espaço  $\mathcal{C}[a, b]$ , bem como em qualquer um dos seus subespaços,  $\mathcal{C}^n[a, b]$ .

Consideremos os vectores de  $\mathcal{C}[-1,1]$ ,  $p_1(x) = 1 + x + 2x^2$  e  $p_2(x) = 1 + x - x^2$ . O seu produto interno, tal como acima definido é

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 &= \int_{-1}^1 (1 + x + 2x^2)(1 + x - x^2) dx \\ &= \int_{-1}^1 (1 + x + 2x^2 + x + x^2 + 2x^3 - x^2 - x^3 - 2x^4) dx \\ &= \int_{-1}^1 (1 + 2x + 2x^2 + x^3 - 2x^4) dx \\ &= \left[ x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{5}x^5 \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{38}{15} \end{aligned}$$

**3.** São exemplos de normas num espaço vectorial (real ou complexo):

A norma euclidiana em  $\mathbb{R}^n$ , tal como foi definida nas aulas anteriores

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}$$

que, em  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$ , e  $\mathbb{R}^3$  associamos à noção de distância, noção esta que podemos generalizar a outros espaços (já o fizemos em  $\mathbb{R}^n$ ).

A norma euclidiana em  $\mathbb{C}^n$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |u_i|^2} = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}$$

A norma- $p$  em  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$

$$\|\mathbf{u}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |u_i|^p}$$

A norma euclidiana é um caso particular da norma- $p$ , para  $p = 2$ , podendo escrever-se  $\|\mathbf{u}\|_2$ , norma-2.

#### 4. Energia e potência média de um sinal contínuo.

Define-se o produto interno entre dois sinais contínuos,  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , num intervalo  $\mathbb{I} = [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$  (ou seja, o produto interno entre dois vectores do espaço  $\mathcal{C}(\mathbb{I})$ ) como

$$x_1 \cdot x_2 = \int_{t_1}^{t_2} x_1(t)x_2^*(t) dt$$

, sendo a norma associada

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \left( \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

### Sinais de potência

Dado um sinal contínuo  $x(t)$ , periódico de período  $T_0$ , isto é, um sinal tal que  $x(t) = x(t + T_0), \forall t \in \mathbb{R}$  em que  $T_0$  é uma constante positiva, define-se a **potência média do sinal**,  $P$ , como

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt$$

Dizemos que um sinal é um **sinal de potência** se a sua potência for finita não nula,  $0 < P < \infty$ .

### Sinais de energia

Dado um sinal contínuo  $x(t)$  pertencente ao espaço das funções quadraticamente integráveis,  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , define-se a **energia do sinal**,  $E$ , como

$$E = x \cdot x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Dizemos que um sinal é um **sinal de energia** se a sua energia for finita não nula,  $0 < E < \infty$ .

## 5. Energia e potência média de um sinal discreto.

Define-se o produto interno entre dois sinais discretos,  $x_1[n]$  e  $x_2[n]$ , num intervalo  $\mathbb{I} = [n_1, n_2] \subset \mathbb{Z}$ , como

$$x_1 \cdot x_2 = \sum_{n_1}^{n_2} x_1[n]x_2^*[n]$$

, sendo a norma associada

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \left( \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2 \right)^{1/2}$$

### Sinais de potência

Dado um sinal discreto  $x[n]$ , periódico de período  $N$ , isto é, um sinal tal que  $x[n] = x[n + N], \forall n \in \mathbb{Z}$  em que  $N$  é um inteiro positivo, define-se a **potência média do sinal**,  $P$ , como

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

### Sinais de energia

Dado um sinal discreto  $x[n]$ , pertencente ao espaço das funções quadraticamente somáveis,  $l^2(\mathbb{Z})$ , define-se a **energia do sinal**,  $E$ , como

$$E = x \cdot x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

## 23.2. Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Ângulo. Vectores ortogonais. Base ortogonal. Base ortonormada.

Seja  $\mathbb{E}$  um espaço vectorial real ou complexo com um produto interno.

Para quaisquer vectores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  de  $\mathbb{E}$

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \quad (\text{desigualdade de Cauchy Schwarz})$$

Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são não nulos, resulta desta desigualdade que

$$\frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

, ou seja,

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

Faz por isso sentido a seguinte definição:

Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vectores não nulos de  $\mathbb{E}$ , o **ângulo** entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  é

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}\right)$$

Se o produto interno entre os dois vectores for nulo,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

, os vectores dizem-se **vectores ortogonais**.

Se  $\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  é um conjunto de vectores não nulos de  $\mathbb{E}$ , ortogonais dois a dois, então  $\mathcal{S}$  é linearmente independente.

Sendo  $\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  uma base de um subespaço  $\mathbb{W}$  de  $\mathbb{E}$ , dizemos que  $\mathcal{S}$  é uma **base ortogonal** se  $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$  para  $i \neq j$ , ou seja, se os vectores da base são ortogonais.

$\mathcal{S}$  é uma **base ortonormada** se, para além de ser uma base ortogonal,  $\|\mathbf{u}_i\| = 1$  para  $i = 1, \dots, n$ .

### Exemplos

**6.** A base  $\mathcal{B} = \{(1, 1), (-3, 5)\}$  é ortogonal relativamente ao produto interno definido no exemplo 1. Com efeito

$$\begin{aligned} (1, 1) \cdot (-3, 5) &= g((1, 1), (-3, 5)) \\ &= 4 \times 1 \times (-3) + 1 \times 5 + 1 \times (-3) + 2 \times 1 \times 5 \\ &= -12 + 5 - 3 + 10 \\ &= 0 \end{aligned}$$

**7.** O conjunto de vectores  $\mathcal{B} = \{f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2\}$  constitui uma base de um subespaço  $\mathbb{W}$  de  $\mathcal{C}[-1, 1]$ . Relativamente ao produto interno em  $\mathcal{C}[-1, 1]$

$$f \cdot g = \int_{-1}^1 f(x)g^*(x)dx$$

$\mathcal{B}$  não é uma base ortogonal de  $\mathbb{W}$ , dado que  $f_1$  e  $f_2$  são ortogonais

$$f_1 \cdot f_2 = \int_{-1}^1 (1 \times x) dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = 0$$

, tal como  $f_2$  e  $f_3$

$$f_2 \cdot f_3 = \int_{-1}^1 (x \times x^2) dx = \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = 0$$

, mas  $f_1$  e  $f_3$  não são ortogonais

$$f_1 \cdot f_3 = \int_{-1}^1 (1 \times x^2) dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

### 8. Espaço de sinais.

Um conjunto de  $m$  sinais contínuos não nulos  $\{y_k(t)\}$ , com  $k = 1, 2, \dots, m$ , ortogonais num intervalo  $[t_1, t_2]$ , constitui uma base ortogonal de sinais. Qualquer sinal contínuo  $x(t)$  que pertença a esse espaço, pode escrever-se como combinação linear dos vectores que definem a base, ou seja, dos sinais  $y_k(t)$ , ditos sinais de base

$$x(t) = \sum_{k=1}^m a_k y_k(t)$$

O mesmo se pode dizer para um conjunto de  $m$  sinais discretos  $\{y_k[n]\}$ , com  $k = 1, 2, \dots, m$ , ortogonais num intervalo  $[n_1, n_2]$ . Estes sinais constituem uma base dum espaço de sinais discretos, sendo que qualquer sinal discreto  $x[n]$  que pertença a esse espaço pode ser escrito como combinação linear dos vectores que definem a base,

$$x[n] = \sum_{k=1}^m a_k y_k[n]$$

### 9. Ortogonalidade no espaço de sinais.

Dois sinais contínuos,  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , dizem-se **sinais ortogonais**, num intervalo  $[t_1, t_2]$ , se o seu produto interno for nulo

$$\int_{t_1}^{t_2} x_1(t)x_2^*(t)dt = 0$$

Observe a figura 23.1. A área sob a curva do sinal  $x(t) = \cos(t)\text{sen}(t)$  acima e abaixo do eixo das abcissas é igual, ou seja, o produto interno entre os sinais  $x_1(t) = \cos(t)$  e  $x_2(t) = \text{sen}(t)$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , dado por

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\text{sen}(t)dt$$

, é nulo, pelo que os sinais são ortogonais no intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

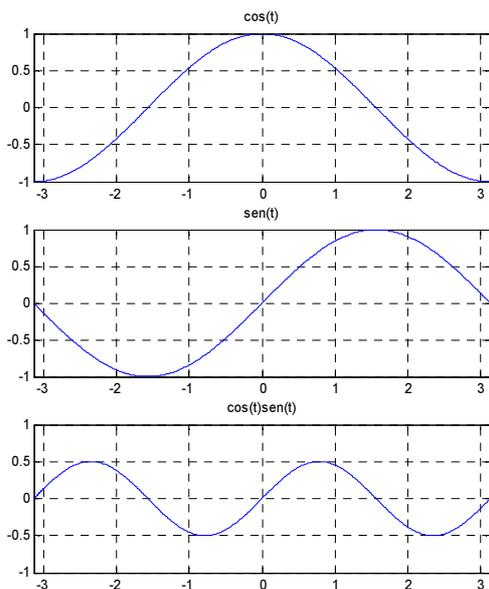


Figura 23.1

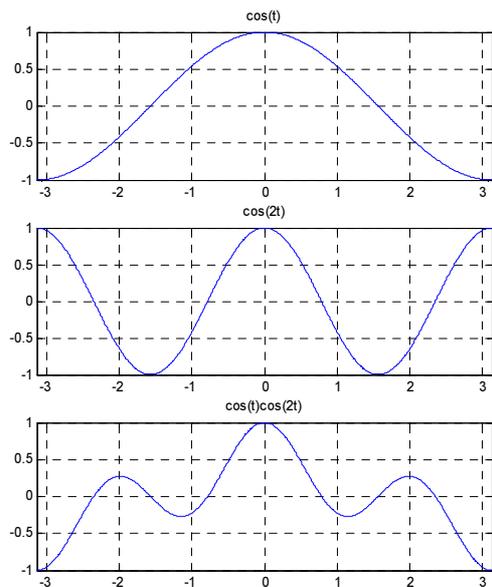


Figura 23.2

Observe a figura 23.2 A área sob a curva do sinal  $x(t) = \cos(t) \cos(2t)$  acima e abaixo do eixo das abcissas é igual, ou seja, o produto interno entre os sinais  $x_1(t) = \cos(t)$  e  $x_2(t) = \cos(2t)$ , no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , dado por

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t) \cos(2t) dt$$

, é nulo, pelo que os sinais são ortogonais no intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

### 23.3. Projecção Ortogonal.

Sejam  $\mathbb{E}$  um espaço vectorial real ou complexo com um produto interno e  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  dois vectores não nulos de  $\mathbb{E}$ . Podemos sempre decompor  $\mathbf{u}$  na soma de dois vectores,  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$ ,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

, tendo  $\mathbf{u}_1$  a direcção de  $\mathbf{v}$  e sendo  $\mathbf{u}_2$  ortogonal a  $\mathbf{v}$ . O vector  $\mathbf{u}_1$  é chamado projecção ortogonal de  $\mathbf{u}$  sobre  $\mathbf{v}$ ,  $\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$ , sendo

$$\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$$

, e a componente ortogonal

$$\text{perp}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$$

Verificamos que

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$$

é ortogonal a  $\mathbf{v}$ :

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ &= 0 \end{aligned}$$

#### Exemplos

10. Em  $\mathbb{R}^2$  consideremos os vectores  $\mathbf{u} = (1, 2)$  e  $\mathbf{v} = (1, -1)$  e o produto interno definido no exemplo 1

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) \\ &= 4u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 2u_2v_2 \end{aligned}$$

Temos

$$\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} = \frac{4 - 1 + 2 - 4}{4 - 1 - 1 + 2} (1, 1) = \left( \frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right)$$

$$\text{perp}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = (1, 2) - \left( \frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right) = \left( \frac{3}{4}, \frac{9}{4} \right)$$

Verificamos que  $\mathbf{v} \cdot \text{perp}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = 0$

$$\begin{aligned} (1, -1) \cdot \left( \frac{3}{4}, \frac{9}{4} \right) &= 4 \frac{3}{4} + \frac{9}{4} - \frac{3}{4} + 2(-1) \frac{9}{4} \\ &= 3 + \frac{6}{4} - \frac{9}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

11. Consideremos os vectores  $f_1(x) = 1 - x^2$  e  $f_2(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$  no espaço das funções contínuas no intervalo  $[-1,1]$ ,  $\mathcal{C}[-1,1]$ , com o produto interno

$$f \cdot g = \int_{-1}^1 f(x)g^*(x)dx$$

A projecção ortogonal de  $f_2$  sobre  $f_1$  é

$$\begin{aligned} \text{proj}_{f_1} f_2 &= \frac{f_2 \cdot f_1}{f_1 \cdot f_1} f_1 \\ &= \frac{\int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)(1-x^2)dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)(1-x^2)dx} (1-x^2) \\ &= \frac{30}{\pi^3} (1-x^2) \end{aligned}$$

, sendo a componente ortogonal

$$\text{perp}_{f_1} f_2 = f_2 - \text{proj}_{f_1} f_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{30}{\pi^3} (1-x^2)$$

Podemos verificar que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\text{proj}_{f_1} f_2)(\text{perp}_{f_1} f_2)dx &= \int_{-1}^1 \frac{30}{\pi^3} (1-x^2) \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{30}{\pi^3} (1-x^2) \right) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

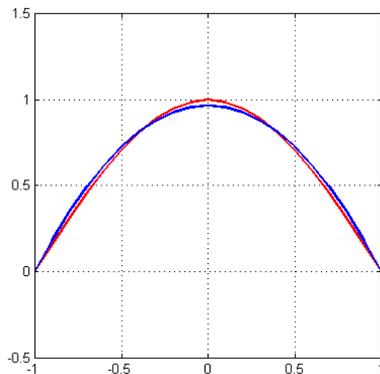


Figura 23.3

A figura 23.3 mostra os vectores

$$f_2(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

(a vermelho) e

$$\text{proj}_{f_1} f_2 = \frac{30}{\pi^3} (1-x^2)$$

(a azul).

### 23.4. Ortogonalização de Gram-Schmidt.

A ortogonalização de Gram-Schmidt é um método que, a partir de uma qualquer base de um subespaço  $\mathbb{W}$  dum espaço vectorial  $\mathbb{E}$ , em que está definido um produto interno, permite obter uma base ortonormada para esse subespaço. Seja  $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  uma base do subespaço  $\mathbb{W}$ , e façamos:

1.  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$

2. Para  $2 \leq k \leq n$

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i} \mathbf{v}_i$$

3.  $\mathbf{q}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|}$

O conjunto de vectores  $\mathcal{Q} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n\}$  é uma base ortonormada, do subespaço  $\mathbb{W}$ .

#### Exemplos

12. Em  $\mathcal{C}[-1, 1]$ , consideremos o subespaço  $\mathbb{W}$  gerado por  $\mathcal{B} = \{f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2\}$  e o produto interno

$$f \cdot g = \int_{-1}^1 f(x)g^*(x)dx$$

Como vimos, os vectores de  $\mathcal{B}$  são linearmente independentes e não são ortogonais. Aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vectores de  $\mathcal{B}$  podemos construir uma base ortogonal para  $\mathbb{W}$ .

Temos então

1.  $r_1 = p_1 = 1$

2.  $r_2 = p_2 - \frac{p_2 \cdot r_1}{r_1 \cdot r_1} r_1 = x - \frac{\int_{-1}^1 x dx}{\int_{-1}^1 dx} = x - \frac{0}{2} = x$

3.  $r_3 = p_3 - \frac{p_3 \cdot r_2}{r_2 \cdot r_2} r_2 - \frac{p_3 \cdot r_1}{r_1 \cdot r_1} r_1$   
 $= x^2 - \frac{\int_{-1}^1 x^3 dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} x - \frac{\int_{-1}^1 x^2 dx}{\int_{-1}^1 dx} = x^2 - \frac{0}{2/3} x - \frac{2/3}{2}$   
 $= x^2 - \frac{1}{3}$

Assim, o conjunto  $\mathcal{U} = \left\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\right\}$  constitui uma base ortogonal de  $\mathbb{W}$  relativamente ao produto interno

$$f \cdot g = \int_{-1}^1 f(x)g^*(x)dx$$

## Exercícios.

### ORTOGONALIDADE EM ESPAÇOS DE SINAIS

**23.1.** O sinal  $x_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ , com  $k$  inteiro, é um sinal periódico de período  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ .

Em qualquer intervalo correspondente a um período  $[t_1, t_1 + T_0]$ , a norma de  $x_k(t)$  é

$$\begin{aligned}\|x_k\| &= \sqrt{x_k \cdot x_k} = \left( \int_{t_1}^{t_1+T_0} x_k(t)x_k^*(t) dt \right)^{1/2} \\ &= \left( \int_{t_1}^{t_1+T_0} e^{jk\omega_0 t} e^{-jk\omega_0 t} dt \right)^{1/2} \\ &= \left( \int_{t_1}^{t_1+T_0} dt \right)^{1/2} \\ &= \left( [t]_{t_1}^{t_1+T_0} \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{t_1 + T_0 - t_1} \\ &= \sqrt{T_0}\end{aligned}$$

Temos assim que o sinal

$$e_k(t) = \frac{x_k(t)}{\|x_k(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{T_0}} e^{jk\omega_0 t} = \sqrt{\frac{\omega_0}{2\pi}} e^{jk\omega_0 t}$$

é um vector de norma unitária no espaço  $\mathcal{C}[t_1, t_1 + T_0]$ .

**23.2.** Uma forma de verificar que  $f(x) = \text{sen}(2x)$  não pertence ao espaço gerado por  $f_1(x) = \text{sen}(x)$  e  $f_2(x) = \text{cos}(x)$ , é mostrar que  $\text{sen}(2x)$  é ortogonal a  $\text{sen}(x)$  e a  $\text{cos}(x)$  num certo intervalo de números reais.

Atendendo a que  $\text{sen}(2x) = 2 \text{sen}(x) \text{cos}(x)$ , temos

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \text{sen}(2x) \text{sen}(x) dx &= \int_0^{2\pi} 2 \text{sen}(x) \text{cos}(x) \text{sen}(x) dx \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(x) \text{cos}(x) dx \\ &= 2 \left[ \frac{1}{3} \text{sen}^3(x) \right]_0^{2\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(2x) \cos(x) dx &= \int_0^{2\pi} 2 \operatorname{sen}(x) \cos(x) \cos(x) dx \\
&= 2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x) \cos^2(x) dx \\
&= 2 \left[ -\frac{1}{3} \cos^3(x) \right]_0^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Aliás, e em geral, podemos demonstrar que, com  $m \neq n$ , as funções  $\operatorname{sen}(mx)$ ,  $\operatorname{sen}(nx)$ ,  $\cos(mx)$  e  $\cos(nx)$  são ortogonais.

**23.3.** Calcular a energia do sinal contínuo definido por

$$x(t) = \begin{cases} t^2 & , 0 \leq t \leq 4 \\ 0 & , t \notin [0, 4] \end{cases}$$

Sendo a energia de um sinal contínuo  $x(t)$  definida por

$$E = x \cdot x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

, temos em particular

$$E = \int_0^4 t^4 dt = \frac{t^5}{5} \Big|_0^4 = \frac{4^5}{5}$$

**23.4.** Calcular a potência do sinal contínuo definido por

$$x(t) = 4 \cos(10\pi t)$$

Sendo a potência de um sinal contínuo periódico  $x(t)$  definida por

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt$$

, temos em particular

$$\omega_0 t = 10\pi t \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} t = 10\pi t \Rightarrow T_0 = \frac{1}{5}$$

, e

$$\begin{aligned}
P &= 5 \int_{-1/10}^{1/10} 4^2 \cos^2(10\pi t) dt \\
&= 4^2 \left( \frac{1}{4\pi} \cos(10\pi t) \sin(10\pi t) + \frac{5t}{2} \right) \Big|_{-1/10}^{1/10} = \frac{4^2}{2} = 8
\end{aligned}$$

Em geral, a potência do sinal  $x(t) = A \cos(\omega_0 t)$  é igual a  $\frac{A^2}{2}$ .

**23.5.** Calcular a energia do sinal discreto  $x[n]$  definido por

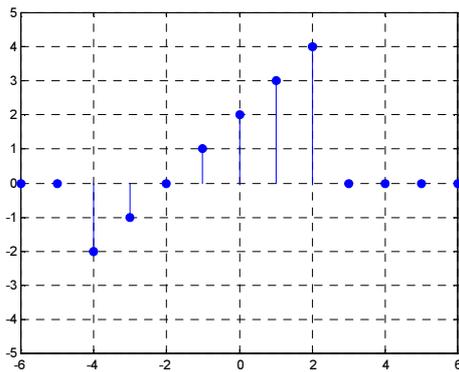


Figura 23.4

$$x[n] = \begin{cases} 0 & n < -4 \\ n + 2 & -4 \leq n < 3 \\ 0 & n \geq 3 \end{cases}$$

Seja a energia de um sinal discreto  $x[n]$  definida por

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

, temos em particular

$$E = (-2)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 = 35$$

**23.6.** Calcular a potência dos sinais discretos  $x_1[n]$  e  $x_2[n]$  definidos por

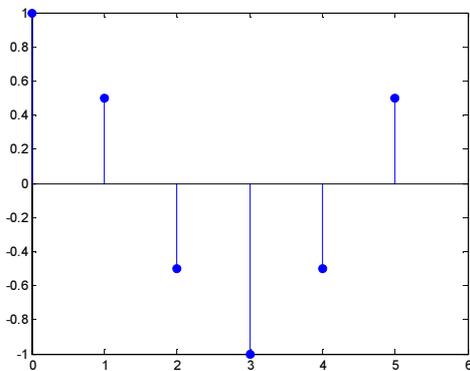


Figura 23.5

$$x_1[n] = \cos\left[n \frac{\pi}{3}\right]$$

$$x_2[n] = \cos\left[n \frac{\pi}{5}\right]$$

Seja a potência de um sinal discreto periódico  $x[n]$  definida por

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

, temos em particular

$$\Omega_0 n = \frac{\pi}{3} n \Rightarrow \frac{2\pi}{N} n = \frac{\pi}{3} n \Rightarrow N = 6$$

$$P_1 = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 \cos^2\left[n \frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{6} \left( (1)^2 + (0.5)^2 + (-0.5)^2 + (-1)^2 + (-0.5)^2 + (0.5)^2 \right)$$

$$= 0.5$$

Para o segundo sinal temos  $N = 10$ , pelo que

$$P_2 = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^9 \cos^2\left[n \frac{\pi}{5}\right] = 0.5$$

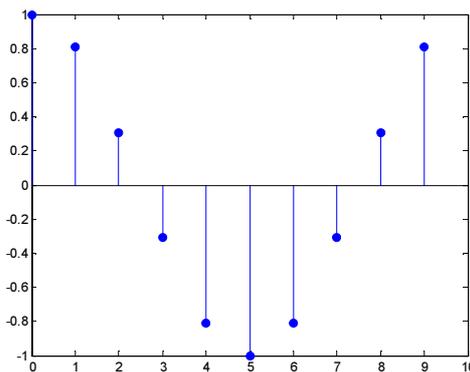


Figura 23.6