

# AULA 25

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

## TÓPICOS

Transformação linear.

Matriz canónica da transformação.

Transformações lineares elementares em  $\mathbb{R}^2$ .

Transformações lineares elementares em  $\mathbb{R}^3$ .

Isometria.

## 25. Transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ .

### 25.1. Transformação linear.

Sejam  $\mathbb{E}$  e  $\mathbb{E}'$  espaços vectoriais sobre o corpo  $\mathbb{K}$ . Uma função  $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  é uma **transformação** (aplicação, função) **linear** se:

$$1. T(\alpha \mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$$

$$2. T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

, ou, equivalentemente,

$$T(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v})$$

, para quaisquer  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ .

Resulta imediatamente da definição que

$$T(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}) = \mathbf{0}_{\mathbb{E}'}$$

Com efeito

$$T(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}) = T(0 \mathbf{0}_{\mathbb{E}}) = 0 T(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}) = \mathbf{0}_{\mathbb{E}'}$$

### Exemplo

1. Se  $\mathbf{A}$  é uma matriz real  $m \times n$  e  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ , a aplicação  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que

$$\mathbf{w} = T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

é uma transformação linear dado que,  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} T(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) &= \mathbf{A}(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \mathbf{A}(\alpha \mathbf{u}) + \mathbf{A}(\beta \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{u}) + \beta(\mathbf{A}\mathbf{v}) \\ &= \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Por exemplo, sendo  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\alpha = -1$  e  $\beta = 4$ , temos

$$\begin{aligned}
T(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) &= \mathbf{A}(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \left( (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ -2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -11 \\ 16 \end{bmatrix} \\
\alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}) &= \alpha \mathbf{A}\mathbf{u} + \beta \mathbf{A}\mathbf{v} = (-1) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= (-1) \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 \\ 24 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -11 \\ 16 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

## 25.2. Matriz canónica da transformação.

Sejam  $\mathbb{E}$  e  $\mathbb{E}'$  espaços vectoriais sobre o corpo  $\mathbb{K}$  e  $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  uma transformação linear. Se  $\mathbb{E}$  tem dimensão finita  $n$  e  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  é uma base de  $\mathbb{E}$  então,  $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{E}$ ,  $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + \dots + u_n \mathbf{e}_n$ ,

$$T(\mathbf{u}) = u_1 T(\mathbf{e}_1) + u_2 T(\mathbf{e}_2) + \dots + u_n T(\mathbf{e}_n)$$

Significa isto que uma transformação linear fica perfeitamente definida quando se conhecem as imagens dos vectores de uma base do seu domínio.

Em particular, se  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma transformação linear,  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  a base canónica de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + \dots + u_n \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ , então existe uma e uma só matriz real  $\mathbf{A}_{m \times n}$  tal que

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

$\mathbf{A}$  é chamada **matriz (canónica) da transformação**

$$\mathbf{A} = [T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2) \mid \dots \mid T(\mathbf{e}_n)]$$

, em que,  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $T(\mathbf{e}_k)$  é o vector coluna que resulta da calcular a imagem de  $\mathbf{e}_k$  por meio de  $T$ .

### Exemplos

**2.** Considere-se a transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $T(1,1) = (1,1,0)$  e  $T(0,1) = (0,1,-1)$ . Vamos determinar a expressão geral de  $T$ , isto é,  $T(x,y) \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Sendo

$$T(0,1) = \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e

$$T(1,1) = \mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

então

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

, logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pelo que

$$\begin{aligned} T(x,y) &= \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ x - y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

, ficando assim determinada a expressão geral de  $T$  :

$$T(x,y) = (x, y, x - y)$$

Alternativamente, como  $\{(1,1), (0,1)\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^2$  (2 vectores linearmente independentes num espaço de dimensão 2) e,  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1)$$

, tem-se

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T(x(1,1) + (y-x)(0,1)) \\ &= x T(1,1) + (y-x) T(0,1) \\ &= x(1,1,0) + (y-x)(0,1,-1) \\ &= (x, x, 0) + (0, y-x, x-y) \\ &= (x, y, x-y) \end{aligned}$$

, ou ainda, matricialmente, sendo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (y-x) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) &= T\left(x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (y-x) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= xT\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + (y-x)T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) & T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y-x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y-x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ x-y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**3.** Seja  $\mathbf{w} = f(x_1, x_2)$  uma função de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que

$$\begin{aligned} w_1 &= x_1 \\ w_2 &= 2x_1 - x_2 \\ w_3 &= 3x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

Adoptando a notação matricial, podemos escrever

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

, e ainda

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

A função  $\mathbf{w} = f(x_1, x_2)$  considerada, sendo uma transformação matricial, é uma transformação linear,  $\mathbf{w} = T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , sendo a matriz da transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

**4.** Em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  é possível fazer uma representação geométrica simples do efeito da aplicação de uma transformação linear, quer se considere que os pares ou ternos ordenados são representativos de pontos ou de vectores. Em  $\mathbb{R}^n$  a interpretação do resultado da aplicação de uma transformação linear é idêntica, embora a sua representação geométrica não seja possível.

a) Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear,  $\mathbf{w} = T(x, y)$

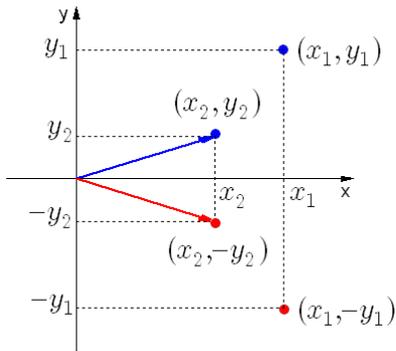


Figura 25.1

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Temos então  $w_1 = x$  e  $w_2 = -y$ . Da aplicação da matriz da transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a qualquer objecto de  $\mathbb{R}^2$  resulta uma imagem que corresponde ao seu simétrico relativamente ao eixo dos  $\mathbf{xx}$

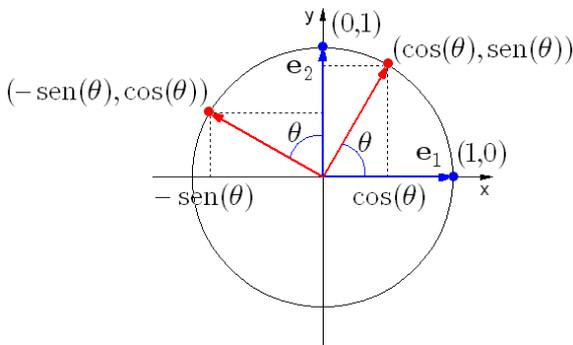
$$T(x, y) = (x, -y)$$

b) Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear,  $\mathbf{w} = T(x, y)$

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

em que  $\theta$  é um ângulo medido no sentido directo.



Cada uma das colunas da matriz de transformação resulta da aplicação da transformação a cada um dos vectores da base canónica de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = [T(\mathbf{e}_1) : T(\mathbf{e}_2)]$$

Temos assim que

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \end{bmatrix}$$

e

$$T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

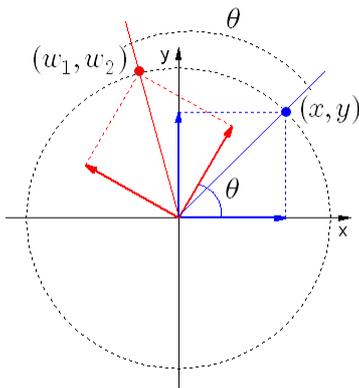


Figura 25.2

Ambos os vectores da base canónica de  $\mathbb{R}^2$  sofrem uma rotação de  $\theta$  no sentido directo. Em resultado da aplicação de uma transformação com matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

, todos os objectos do plano sofrem uma rotação de  $\theta$  no sentido directo. A matriz é, por isso, chamada **matriz de rotação em  $\mathbb{R}^2$** .

### 25.3. Transformações lineares elementares em $\mathbb{R}^2$ .

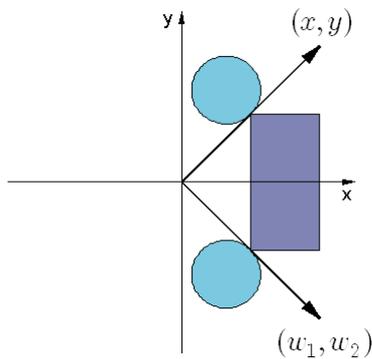


Figura 25.3

#### 1. Projecção ortogonal.

Projecção ortogonal sobre o eixo dos  $xx$ .

Equações

Matriz de Transformação

$$\begin{aligned} w_1 &= x \\ w_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Projecção ortogonal sobre o eixo dos  $yy$ .

Equações

Matriz de Transformação

$$\begin{aligned} w_1 &= 0 \\ w_2 &= y \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

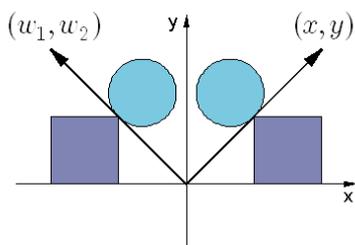


Figura 25.4

#### 2. Reflexão.

Reflexão sobre o eixo dos  $xx$  (figura 25.3).

Equações

Matriz de Transformação

$$\begin{aligned} w_1 &= x \\ w_2 &= -y \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Reflexão sobre o eixo dos  $yy$  (figura 25.4).

Equações

Matriz de Transformação

$$\begin{aligned} w_1 &= -x \\ w_2 &= y \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

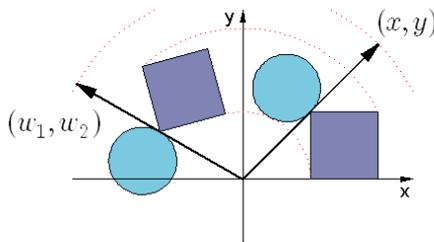


Figura 25.5

#### 3. Rotação (figura 25.5).

Rotação de um ângulo  $\theta$  no sentido directo

Equações

Matriz de Transformação

$$\begin{aligned} w_1 &= x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \\ w_2 &= x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

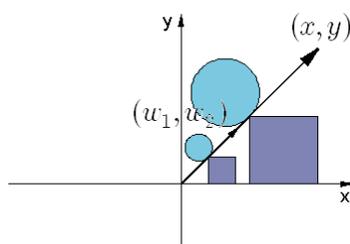


Figura 25.6

#### 4. Contração (figura 25.6).

Contração de um factor  $k$ ,  $T(\mathbf{u}) = k\mathbf{u}$  ( $0 \leq k < 1$ ).

Equações

Matriz de Transformação

$$\begin{aligned} w_1 &= kx \\ w_2 &= ky \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

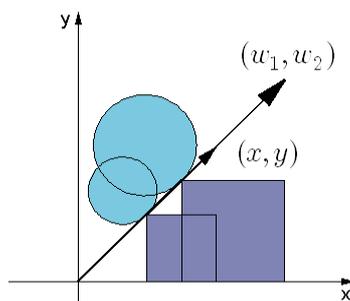


Figura 25.7

#### 5. Expansão (figura 25.7).

Expansão de um factor  $k$ ,  $T(\mathbf{u}) = k\mathbf{u}$  ( $k > 1$ ).

Equações

Matriz de Transformação

$$\begin{aligned} w_1 &= kx \\ w_2 &= ky \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

## 25.4. Transformações lineares elementares em $\mathbb{R}^3$ .

### 1. Projecção ortogonal.

Projecção ortogonal sobre plano  $xy$ .

Equações

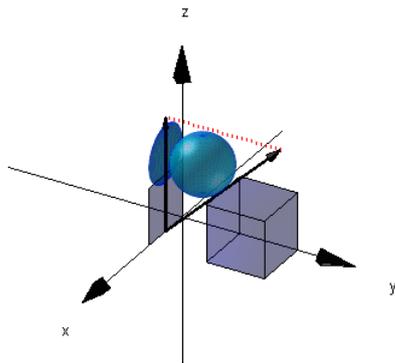
$$w_1 = x$$

$$w_2 = y$$

$$w_3 = 0$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



(Projecção ortogonal sobre o plano  $xz$ )

Projecção ortogonal sobre plano  $xz$

Equações

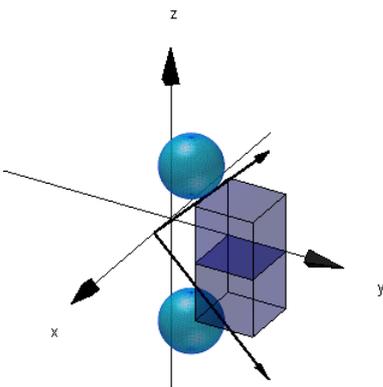
$$w_1 = x$$

$$w_2 = 0$$

$$w_3 = z$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(Reflexão sobre o plano  $xy$ )

Projecção ortogonal sobre plano  $yz$ .

Equações

$$w_1 = 0$$

$$w_2 = y$$

$$w_3 = z$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 2. Reflexão.

Reflexão sobre o plano  $xy$ .

Equações

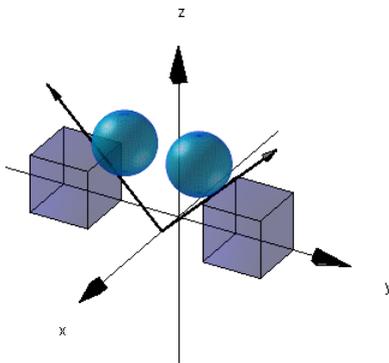
$$w_1 = x$$

$$w_2 = y$$

$$w_3 = -z$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



(Reflexão sobre o plano  $xz$ )

Reflexão sobre o plano  $xz$ .

Equações

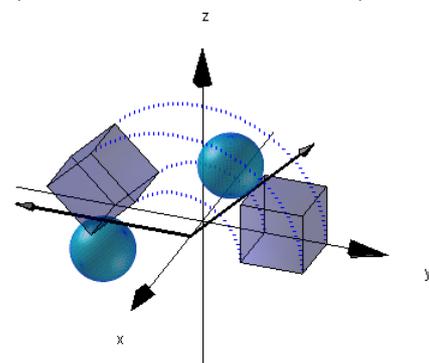
$$w_1 = x$$

$$w_2 = -y$$

$$w_3 = z$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(Rotação sobre o eixo dos  $xx$ ,  $\theta = 3\pi/4$ )

Reflexão sobre o plano  $yz$ .

Equações

$$w_1 = -x$$

$$w_2 = y$$

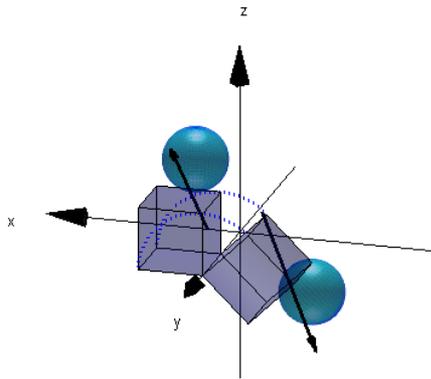
$$w_3 = z$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3. Rotação.

Rotação de um ângulo  $\theta$ , no sentido directo, sobre o eixo dos **xx**.



Equações

$$\begin{aligned} w_1 &= x \\ w_2 &= y \cos(\theta) - z \sin(\theta) \\ w_3 &= y \sin(\theta) + z \cos(\theta) \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

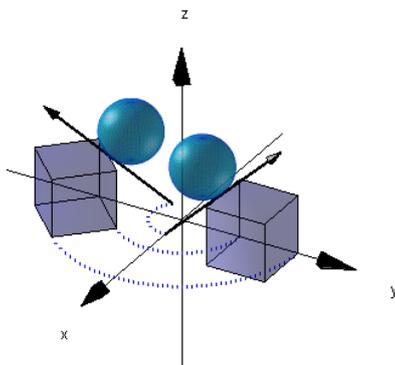
(Rotação sobre o eixo dos **yy**,  $\theta = -\pi/4$ )

Equações

$$\begin{aligned} w_1 &= x \cos(\theta) + z \sin(\theta) \\ w_2 &= y \\ w_3 &= -x \sin(\theta) + z \cos(\theta) \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$



Rotação de um ângulo  $\theta$ , no sentido directo, sobre o eixo dos **zz**.

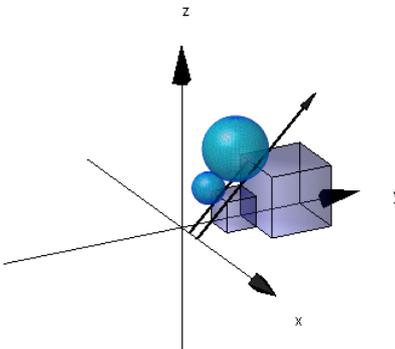
Equações

$$\begin{aligned} w_1 &= x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \\ w_2 &= x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \\ w_3 &= z \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Rotação sobre o eixo dos **zz**,  $\theta = -3\pi/4$ )



### 4. Contração.

Contração de um factor  $k$  ( $0 \leq k < 1$ ).

Equações

$$\begin{aligned} w_1 &= kx \\ w_2 &= ky \\ w_3 &= kz \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

(Contração,  $k = 0.5$ )

### 5. Expansão.

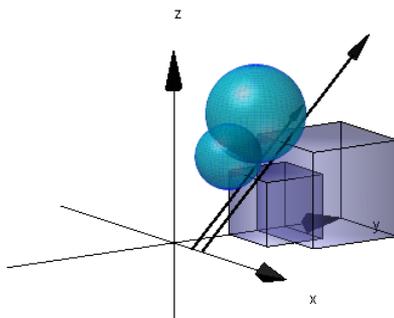
Expansão de um factor  $k$  ( $k > 1$ ).

Equações

$$\begin{aligned} w_1 &= kx \\ w_2 &= ky \\ w_3 &= kz \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$



(Expansão,  $k = 1.5$ )

### 25.5. Isometria.

Observe-se que, seja em  $\mathbb{R}^2$  ou em  $\mathbb{R}^3$ , a **matriz de qualquer rotação ou qualquer reflexão é uma matriz ortogonal**, isto é, verifica a igualdade

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

Resulta daí que, se  $T$  é uma rotação ou uma reflexão, em  $\mathbb{R}^2$  ou em  $\mathbb{R}^3$ , então  $T$  é uma **isometria** (uma transformação linear que conserva normas), isto é,

$$\forall \mathbf{u}, \quad \|T(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{A}\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|$$

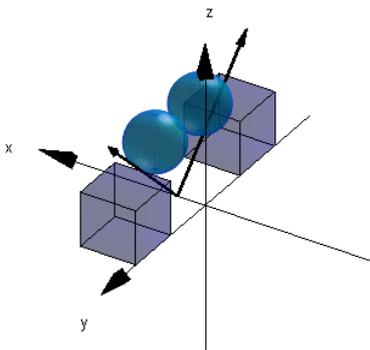
Com efeito,

$$\begin{aligned} \|T(\mathbf{u})\|^2 &= T(\mathbf{u}) \cdot T(\mathbf{u}) \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{u})^T \mathbf{A}\mathbf{u} \\ &= (\mathbf{u}^T \mathbf{A}^T) \mathbf{A}\mathbf{u} \\ &= \mathbf{u}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{u} \\ &= \mathbf{u}^T \mathbf{I}_n \mathbf{u} \\ &= \mathbf{u}^T \mathbf{u} \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \end{aligned}$$

Já as contracções e as expansões (no plano e no espaço) são as vulgarmente designadas **homotetias de razão  $k$**  e, obviamente, não preservam normas.

#### Exemplos

5. Podemos verificar se uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  consistindo numa reflexão sobre o plano  $xz$ , seguida de uma rotação de  $\theta = -\pi/2$  sobre o eixo dos  $zz$  é uma isometria

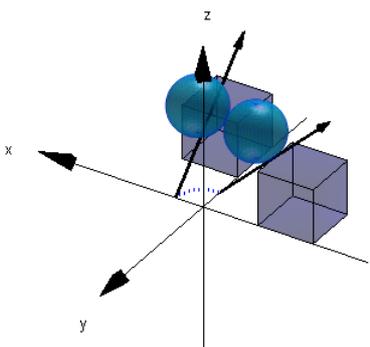


Sendo a matriz de uma reflexão sobre o plano  $xz$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

, e a matriz de uma rotação de  $\theta = -\pi/2$  sobre o eixo dos  $zz$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



A matriz da transformação  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Para verificar se a transformação linear é uma isometria vamos verificar se a matriz  $\mathbf{A}$  é ortogonal

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \mathbf{A}^T &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_3
 \end{aligned}$$

, logo a transformação linear é uma isometria.



```

>> A1=[1 0 0;0 -1 0;0 0 1];
>> A2=[0 1 0;-1 0 0;0 0 1];
>> A=A2*A1;
>> A'*A
ans =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1

```