

AULA 26

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Composição de transformações lineares.

Transformação linear inversa.

Transformações afins. Translação.

26. Transformações lineares de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m .

26.1. Composição de transformações lineares.

Sejam \mathbb{E} , \mathbb{E}' e \mathbb{E}'' espaços vectoriais sobre o corpo \mathbb{K} e $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$, $S : \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{E}''$ transformações lineares. Então

$$S \circ T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}''$$

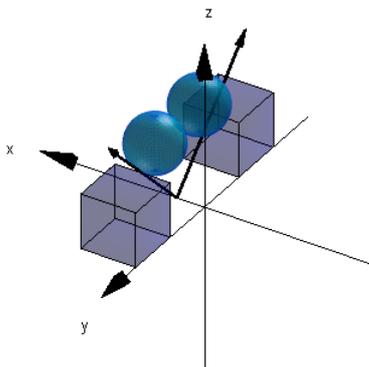
é uma transformação linear, chamada **composta** de S com T (e escrevemos $S(T(\mathbf{u}))$ ou $(S \circ T)(\mathbf{u})$). Por outras palavras, a composta de uma transformação linear é uma transformação linear.

Em particular, se $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é uma transformação linear com matriz canónica \mathbf{A}_T e $S : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ é outra transformação linear com matriz canónica \mathbf{A}_S , então $S \circ T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é linear e a sua matriz canónica é

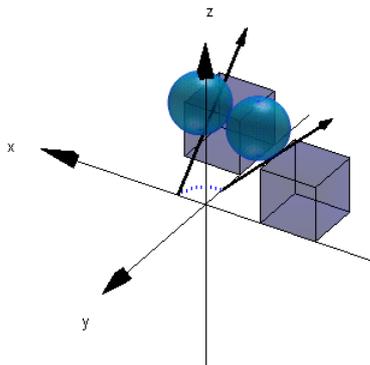
$$\mathbf{A}_{S \circ T} = \mathbf{A}_S \mathbf{A}_T$$

Exemplos

1. Sendo $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reflexão sobre o plano \mathbf{xz}

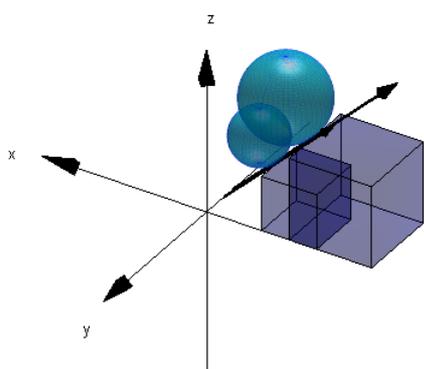


$$\mathbf{w} = T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}_T \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$



, $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma rotação de $\theta = -\pi/2$ sobre o eixo do zz

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= S(\mathbf{w}) \\ &= \mathbf{A}_S \mathbf{w} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w} \end{aligned}$$



, $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma expansão de $k = 1.5$

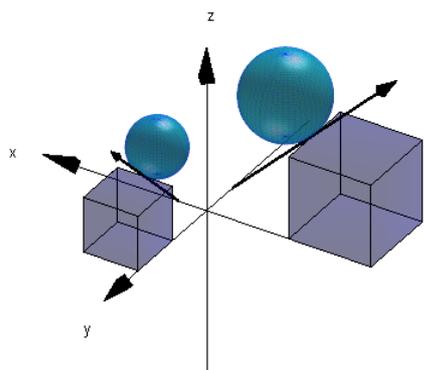
$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= U(\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{A}_U \mathbf{v} \\ &= \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \mathbf{v} \end{aligned}$$

A composição de U com S com T , $\mathbf{r} = V(\mathbf{u}) = U(S(T(\mathbf{u}))) = (U \circ S \circ T)(\mathbf{u}) = \mathbf{A}_U \mathbf{A}_S \mathbf{A}_T \mathbf{u}$, é uma transformação linear, $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, com matriz de transformação

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_V &= \mathbf{A}_U \mathbf{A}_S \mathbf{A}_T \\ &= \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0 \\ -1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

, ou seja

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= V(\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{A}_V \mathbf{u} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0 \\ -1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \mathbf{u} \end{aligned}$$



Saliente-se que a composição de transformações lineares não é comutativa (basta atender ao facto de se efectuar à custa de um produto matricial).

26.2. Transformação linear inversa.

Se \mathbb{E} é um espaço vectorial sobre um corpo \mathbb{K} , a aplicação $1_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ tal que $1_{\mathbb{E}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ é linear e designa-se por **identidade** em \mathbb{E} .

Duas aplicações quaisquer $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ e $S : \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{E}$ dizem-se **transformações inversas** uma da outra se $S \circ T = 1_{\mathbb{E}}$ e $T \circ S = 1_{\mathbb{E}'}$. Escrevemos $S = T^{-1}$ e $T = S^{-1}$ (uma vez que a inversa, quando existe é única) e dizemos que S e T são **invertíveis**.

Se \mathbb{E} e \mathbb{E}' são espaços vectoriais sobre o corpo \mathbb{K} e $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ é uma transformação linear invertível então $T^{-1} : \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{E}$ é uma transformação linear (invertível). Por outras palavras, a inversa de uma transformação linear é linear.

Em particular, se $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear invertível (um **isomorfismo**), com matriz canónica A_T , então $T^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear invertível com matriz canónica

$$A_{T^{-1}} = A_T^{-1}$$

Ou seja, a matriz da transformação inversa é igual à inversa da matriz da transformação.

Exemplo

2. Sendo $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma rotação de $\theta = -\pi/2$ sobre o eixo do **zz**

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}_T \mathbf{u} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(-\pi/2) & -\text{sen}(-\pi/2) & 0 \\ \text{sen}(-\pi/2) & \cos(-\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \end{aligned}$$

, a sua transformação inversa tem matriz de transformação

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= T^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{A}_{T^{-1}} \mathbf{w} = \mathbf{A}_T^{-1} \mathbf{w} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{w} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & -\text{sen}(\pi/2) & 0 \\ \text{sen}(\pi/2) & \cos(\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w} \end{aligned}$$

ou seja, como seria de esperar, uma rotação de $\theta = \pi/2$.

26.3. Transformações afins. Translação.

Chamamos **transformação afim** de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a uma transformação da forma

$$S(\mathbf{u}) = T(\mathbf{u}) + \mathbf{k}$$

, em que T é uma transformação linear de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$ é um vector constante. (Note bem: **uma transformação afim não é uma transformação linear.**)

Uma transformação afim $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ da forma

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{I}_n \mathbf{u} + \mathbf{k}$$

, em que $\mathbf{k} = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ corresponde a uma **translação** de k_i unidades segundo cada um dos vectores \mathbf{e}_i da base canónica de \mathbb{R}^n .

Exemplos

3. A transformação afim $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

corresponde a uma translação de uma unidade segundo \mathbf{e}_1 e de 2 unidades segundo \mathbf{e}_2

4. A transformação afim $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

corresponde a uma reflexão sobre o eixo dos yy seguida de uma translação de 2 unidades segundo \mathbf{e}_2 .

Por exemplo, para o ponto $(2, 2)$ temos

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

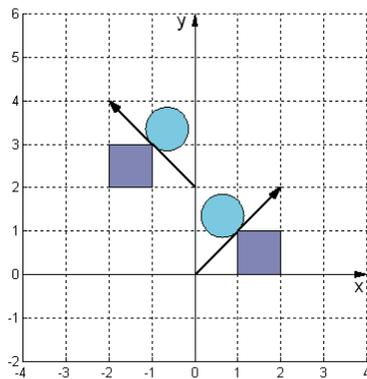


Figura 26.1

Exercícios.

CALCULAR A IMAGEM DADA A MATRIZ DA TRANSFORMAÇÃO E O OBJECTO.

26.1. Sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a matriz canónica de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, determine $T(1,2)$.

Temos

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

A imagem do vector $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ é o vector $\mathbf{w} = T(\mathbf{u}) = 6\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_3$.



```
>> A=[2 2; -1 -1;2 3];
>> u=[1 2]';
>> w=A*u
w =
     6
    -3
     8
```

26.2. Sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a matriz canónica de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, determine $T(1,2,3)$.

Temos

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

A imagem do vector $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ é o vector $\mathbf{w} = T(\mathbf{u}) = 6\mathbf{e}_1 + 12\mathbf{e}_2$.



```
>> A=[-2 1 2; -1 2 3];
>> u=[1 2 3]';
```

```
>> w=A*u
w =
     6
    12
```

26.3. Sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a matriz canónica de uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, determine $T(1,2,1)$.

Temos

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

A imagem do vector $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ é o vector $\mathbf{w} = T(\mathbf{u}) = 2\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$.



```
>> A=[-2 1 2; -1 2 3;-1 0 -1];
>> u=[1 2 1]';
>> w=A*u
w =
     2
     6
    -2
```

26.4. Dada a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que consiste numa reflexão sobre o eixo dos \mathbf{yy} , seguida duma rotação de $\pi/2$ (no sentido directo) e duma projecção ortogonal sobre o eixo dos \mathbf{yy} , determine $T(2,2)$.

Como vimos, a uma reflexão sobre o eixo dos \mathbf{yy} corresponde a matriz de transformação

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

, a uma rotação de um ângulo θ no sentido directo corresponde a matriz de transformação

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

, e a uma projecção ortogonal sobre o eixo dos \mathbf{yy} corresponde a matriz de transformação

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo a transformação T uma composição das 3 transformações elementares, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = T(\mathbf{u}) &= \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{u} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



```
>> A1=[-1 0;0 1];
>> teta=pi/2;
>> A2=[cos(teta) -sin(teta); sin(teta) cos(teta)];
>> A3=[0 0;0 1];
>> A=A3*A2*A1
A =
         0         0
    -1.0000    0.0000
>> u=[2 2]';
>> w=A*u
w =
         0
    -2.0000
```

26.5. Considere a seguinte matriz dos vértices de um triângulo em \mathbb{R}^2

$$\mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine a imagem final (os vértices) do triângulo quando é reflectido sobre o eixo dos \mathbf{yy} , e depois rodado de $\pi/2$ no sentido directo.

Dado que a uma reflexão sobre o eixo dos \mathbf{yy} corresponde a matriz de transformação

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

, e a uma rotação de um ângulo $\pi/2$ no sentido directo corresponde a matriz de transformação

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz da transformação é

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dado que os vértices do triângulo correspondem a vectores coluna correspondentes a cada uma das colunas da matriz \mathbf{T}_r

$$\mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} [v1] & [v2] & [v3] \end{bmatrix}$$

, resulta que ao produto $\mathbf{A}\mathbf{T}_r$ corresponde uma matriz

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{T}_r &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [v1] & [v2] & [v3] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [0 \ -1] [v1] & [0 \ -1] [v2] & [0 \ -1] [v3] \\ [-1 \ 0] [v1] & [-1 \ 0] [v2] & [-1 \ 0] [v3] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} [v1] & \mathbf{A} [v2] & \mathbf{A} [v3] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [w1] & [w2] & [w3] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

em que cada uma das colunas corresponde à imagem de cada um dos vértices do triângulo

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{T}_r &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



```
>> teta=pi/2;
>> A2=[cos(teta) -sin(teta);...
      sin(teta)   cos(teta)];
>> A=A2*A1;
>> Tr=[1 3 2;2 3 1];
>> A*Tr
ans =
    -2.0000    -3.0000    -1.0000
    -1.0000    -3.0000    -2.0000
```